О ПРОДОЛЖАЕМОСТИ МНОГОЗНАЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОДМНОЖЕСТВО*

А. Г. Хованский

Введение

В топологическом варианте теории Галуа для функций одной переменной (см. [1–4]) доказывается, что характер расположения римановой поверхности функции над комплексной прямой может препятствовать представимости этой функции в квадратурах. Это не только объясняет, почему многие дифференциальные уравнения не решаются в квадратурах, но и дает наиболее сильные известные результаты об их неразрешимости. Мне всегда казалось, что полноценного многомерного топологического варианта теории Галуа не существует. Дело в том, что для построения такого варианта в случае многих переменных нужно было бы иметь информацию не только о продолжаемости ростков функций вне их множеств ветвления, но и вдоль таких множеств. А такую информацию взять вроде бы неоткуда. Только весной 1999 года я неожиданно понял, что ростки функций временами автоматически продолжаются вдоль множества ветвления. Поэтому многомерный топологический вариант теории Галуа все-таки существует. Я собираюсь его опубликовать в следующих статьях. В этой статье описывается свойство продолжаемости функций вдоль их множеств ветвления, которое, как мне кажется, представляет и самостоятельный интерес.

Пусть M — аналитическое многообразие, и Σ — аналитическое подмножество в нем. Пусть в точке $b \in M$ задан росток f_b аналитической функции, который аналитически продолжается вдоль любой кривой $\gamma\colon [0,1] \to M$, $\gamma(0) = b$, пересекающей множество Σ лишь, может быть, в начальный момент. Что можно сказать о продолжаемости ростка f_b вдоль кривых, которые, начиная с некоторого момента, лежат в Σ? Этим вопросом мы и

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта N 99-01-00245 Российского Фонда Фундаментальных исследований и Канадского Гранта N 0GP0156833. Работа была закончена во время визита в Universidad de Valladolid, Dpto. de Algebra, Geometria y Topologia. Я признателен испанским коллегам за гостеприимство.

Ключевые слова: многозначная функция, стратификация Уитни, аналитическое продолжение.

будем заниматься. В пункте 1 мы рассмотрим классический случай, в котором дополнительно известно, что продолжения ростка f_b задают однозначную аналитическую функцию в множестве $M \setminus \Sigma$. В этом случае единственным препятствием к продолжаемости ростка f_b выступают неприводимые компоненты множества Σ, которые имеют коразмерность один в многообразии M и замыкания которых не содержат заданной точки b (см. утверждение 3, являющееся вариантом теорем Римана и Гартогса о продолжаемости аналитических функций). Росток f_b продолжается в дополнение к объединению таких компонент и, вообще говоря, не продолжается дальше. Однако, как показывает следующий простейший пример, этот результат не переносится непосредственно на случай многозначных функций.

Пример. Рассмотрим общее кубическое уравнение

$$y^3 + py + q = 0$$

с нулевым коэффициентом при члене y^2. Это уравнение в дополнении к дискриминантной кривой Σ определяет трехзначную аналитическую функцию $y(p, q)$. Дискриминантная кривая этого уравнения является полукубической параболой — неприводимой кривой, имеющей единственную особую точку в начале координат. В начале координат все три корня кубического уравнения совпадают, и это единственная точка плоскости p, q, обладающая этим свойством. Над множеством $\Sigma \setminus \{0\}$ сливаются ровно два корня уравнения. Пусть b — любая точка плоскости, лежащая в дополнении к дискриминантной кривой, a — любая точка, лежащая на дискриминантной кривой и отличная от начала координат, $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^2$ — любая кривая, начинающаяся в точке b, заканчивающаяся в точке a и пересекающая Σ лишь в последний момент, $\gamma(0) = b$, $\gamma(1) = a$, $\gamma(t) \notin \Sigma$ при $t \neq 1$. Выберем тот из ростков функции $y(p, q)$ над точкой b, который при продолжении вдоль кривой γ при подходе к точке a не сливается ни с каким другим ростком. Такой росток ровно один. Обозначим его f_b. Росток f_b, во-первых, аналитически продолжается вдоль любой кривой, не пересекающей Σ. Во-вторых, он продолжается до точки $a \in \Sigma$ вдоль кривой γ. В-третьих, росток f_a, полученный при таком продолжении, аналитически продолжается вдоль любой кривой, лежащей в множестве Σ и не проходящей через начало координат. В начале координат нет ни одного аналитического ростка функции $y(p, q)$. В этом примере препятствием к продолжаемости ростка вдоль кривой Σ является точка 0. В этой точке к кривой Σ не подходит никакая другая ветвь дискриминанта, но меняется локальная топология кривой Σ (в нуле полукубическая парабола Σ имеет особенность, в остальных точках она гладкая).

Приведенный пример подсказывает следующее естественное предположение. Пусть B — некоторый страт (аналитическое подмногообразие), лежащий в множестве Σ и содержащий точку a. Пусть росток аналитической функции f_a аналитически продолжается вдоль любой кривой, пересекающей множество Σ лишь, может быть, в начальный момент. Тогда если топология пары Σ, B при движении вдоль кривой $\gamma(t) \in B$, $\gamma(0) = a$, не меняется, то росток f_a аналитически продолжается вдоль такой кривой. Это предположение, действительно, оказывается верным. Сначала в п. 3

мы доказываем его для функций f, однозначных в $M \setminus \Sigma$. Согласно результату п. 1 нам достаточно показать, что при пересечении страта B с замыканием неприводимой компоненты Σ коразмерности 1 изменяется топология пары Σ, B. В доказательстве мы существенно используем результаты Уитни о существовании аналитических стратификаций аналитических множеств, которые хорошо согласуются с топологией. Эти результаты Уитни напоминаются в п. 2. Случай многозначной в $M \setminus \Sigma$ функции f несложной топологической конструкцией сводится к случаю, когда функция f однозначна (см. п. 6). Эта топологическая конструкция обобщает классическую конструкцию локально тривиального накрытия (см. п. 4) и тоже существенно использует стратификацию Уитни (см. п. 5.)

1. Продолжаемость однозначной аналитической функции на аналитическое подмножество

Представим пространство $\mathbb{C}^n$ в виде прямого произведения $(n-1)$-мерного пространства $\mathbb{C}^{n-1}$ и комплексной прямой $\mathbb{C}^1$. Будем отождествлять пространство $\mathbb{C}^{n-1}$ с гиперплоскостью $z = 0$, где z — одна из координатных функций в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Лемма 1. *Пусть окрестность U начала координат в пространстве $\mathbb{C}^n$ является прямым произведением связной окрестности U_1 в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$ на связную окрестность U_2 в комплексной прямой $\mathbb{C}^1$, $U = U_1 \times U_2$. Тогда любая функция f, аналитичная в дополнении окрестности U к гиперплоскости $z = 0$, которая ограничена в некоторой окрестности начала координат, аналитически продолжается на всю окрестность U.*

Доказательство. Лемма вытекает из интегральной формулы Коши. Действительно, определим функцию $\tilde{f}$ на области U при помощи интеграла Коши

$$\tilde{f}(x, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(x,z)} \frac{f(x, u)du}{u - z},$$

где x и z — точки в областях U_1 и U_2, $f(x, u)$ — заданная функция и $\gamma(x, z)$ — контур интегрирования, лежащий в области U на комплексной прямой $\{x\} \times \mathbb{C}^1$, охватывающий точки (x, z) и $(x, 0)$ и непрерывно зависящий от точки (x, z). Функция $\tilde{f}(x, z)$ задает искомое аналитическое продолжение. Действительно, функция $\tilde{f}$ аналитична во всей области U. В окрестности начала координат она, согласно теореме Римана об устранимой особенности, совпадает с заданной функцией f.

Утверждение 2. *Пусть M — n-мерное комплексное аналитическое многообразие, Σ — аналитическое подмножество в M, $a \in \Sigma$ — некоторая точка в этом подмножестве такая, что всякая неприводимая компонента множества Σ, имеющая размерность $(n-1)$, содержит точку a. Тогда любая функция f, аналитическая в дополнении $M \setminus \Sigma$ многообразия M к множеству Σ, которая ограничена в некоторой окрестности точки a, аналитически продолжается на все многообразие M.*

Доказательство. Утверждение 2 сводится к лемме 1. Действительно, обозначим через Σ_H подмножество множества Σ, определенное следующим условием: в окрестности каждой точки множества Σ_H аналитическое множество Σ является неособой $(n-1)$-мерной аналитической гиперповерхностью в многообразии M. Пересечение всякой неприводимой $(n-1)$-мерной компоненты D_i множества Σ с множеством Σ_H является связным $(n-1)$-мерным многообразием. Докажем, что функция f аналитически продолжается на множество $D_i \cap \Sigma_H$.

Обозначим через A_i подмножество в $D_i \cap \Sigma_H$, на которое аналитически продолжается функция f. Очевидно, что A_i открыто в топологии множества $D_i \cap \Sigma_H$. Множество A_i непусто, так как по теореме Римана о продолжении голоморфной функции (см. [5]) оно содержит все неособые точки компоненты D_i, достаточно близкие к точке a. Покажем, что A_i замкнуто в топологии множества $D_i \cap \Sigma_H$. Действительно, пусть b — предельная точка этого множества. По определению множества $D_i \cap \Sigma_H$ около точки b в многообразии M можно выбрать такую локальную систему координат, что множество $D_i \cap \Sigma_H$ в этой окрестности будет совпадать с координатной гиперплоскостью. Нужный факт теперь вытекает из леммы 1. Далее, в силу связности множества $D_i \cap \Sigma_H$, получаем, что множество A_i совпадает с множеством $D_i \cap \Sigma_H$, т.е. что функция f аналитически продолжается на все это множество. Поэтому функция f продолжается на все множество $\Sigma_H = \bigcup (D_i \cap \Sigma_H)$. Но множество $\Sigma \setminus \Sigma_H$ имеет в многообразии M коразмерность не менее двух. Согласно теореме Гартогса (см. [5]) утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Пусть f — аналитическая функция в дополнении n-мерного аналитического многообразия M к аналитическому множеству Σ. Если f ограничена в некоторой окрестности точки $a \in \Sigma$, то f аналитически продолжается на множество $M \setminus D_a$, где D_a — объединение всех $(n-1)$-мерных неприводимых компонент множества Σ, не содержащих точку a.*

Доказательство. Утверждение 3 вытекает из утверждения 2, примененного к многообразию $M \setminus D_a$, аналитическому подмножеству $\Sigma \setminus D_a$ и функции f.

2. Допустимые стратификации

Пусть Σ — собственное аналитическое подмножество в комплексно-аналитическом многообразии M. *Стратификацией* множества Σ называется его разбиение на непересекающиеся подмногообразия, называемые *стратами* (имеющие, вообще говоря, различные размерности), обладающее следующими свойствами:

1) каждый страт Σ_i является связным аналитическим многообразием;

2) замыкание $\overline{\Sigma}_i$ каждого страта Σ_i является аналитическим подмножеством в M, причем граница $\overline{\Sigma}_i \setminus \Sigma_i$ каждого страта представляется в виде объединения некоторых стратов меньшей размерности.

Пара, состоящая из аналитического многообразия M и его аналитического подмножества Σ, имеет *постоянную топологию вдоль страта* $B \subset \Sigma$, если выполнены следующие два условия.

Условие 1. Для всякой точки $a \in B$ и всякого аналитического подмногообразия L многообразия M, трансверсального к страту B в точке a, существует малая окрестность V_a точки a в многообразии L такая, что топология пары V_a, F_a, где $F_a = V_a \cap \Sigma$, не зависит ни от выбора точки a, ни от выбора сечения L, а определяется лишь стратом B и подмножеством Σ.

Условие 2. *У страта B существуют окрестность U в многообразии M вместе с проекцией $\pi\colon U \to B$, ограничение которой на множество $B \subset U$ является тождественным отображением, такие, что для каждой точки $a \in B$ пара $\pi^{-1}(a), \pi^{-1}(a) \cap \Sigma$ гомеоморфна паре V_a, F_a. Более того, для каждой точки $a \in B$ существует окрестность K_a в многообразии B такая, что пара $\pi^{-1}(K_a), \pi^{-1}(K_a) \cap \Sigma$ гомеоморфна паре $(V_a \times K_a, F_a \times K_a)$, причем гомеоморфизм, связывающий эти две пары, переводит проекцию π в проектсию прямого произведения $V_a \times K_a$ на сомножитель K_a, а ограничение этого гомеоморфизма на множество $K_a \subset \pi^{-1}(K_a)$ является тождественным отображением (точнее, переводит точку $b \in K_a$ в точку $a \times b$ в прямом произведении $V_a \times K_a$).*

Скажем, что стратификация аналитического множества $\Sigma \subset M$ является *допустимой*, если пара M, Σ имеет постоянную топологию вдоль всякого страта Σ_i этой стратификации.

Как открыл Уитни, допустимые стратификации существуют для любого комплексно аналитического множества в любом комплексно аналитическом многообразии (см. [6]). Мы будем использовать этот результат.

3. Изменение топологии аналитического множества при подходе к неприводимой компоненте

Согласно следующей лемме 4, вещественное топологическое подмногообразие в M, лежащее в аналитической гиперповерхности Σ и отличающееся от этой гиперповерхности множеством малой размерности, имеет ровно столько же компонент связности, сколько неприводимых $(n-1)$-мерных компонент имеется в гиперповерхности Σ.

Лемма 4. *Пусть подмножество T аналитического $(n-1)$-мерного множества Σ, лежащего в n-мерном аналитическом многообразии M, обладает следующими свойствами.*

1. Множество T является вещественным топологическим подмногообразием в многообразии M коразмерности 2, т.е. у каждой точки $a \in T$ существует такая окрестность U_a в многообразии M, что множество $U_a \cap T$ является топологическим подмногообразием в области U_a вещественной размерности $(2n-2)$.

2. Множество $\Sigma \setminus T$ является замкнутым подмножеством в Σ вещественной коразмерности ≥ 2 (т.е. является объединением конечного числа вещественных топологических подмногообразий в M размерностей $\leq (2n-4)$).

Тогда каждая из $(n-1)$-мерных неприводимых компонент множества Σ пересекается ровно с одной компонентой связности топологического многообразия T. При этом каждая компонента связности многообразия T всюду плотна в соответствующей неприводимой $(n-1)$-мерной компоненте аналитического множества Σ.

Доказательство. Лемма 4 вытекает из следующих фактов: а) множество коразмерности 2 не может разделять топологическое многообразие, б) если из неприводимой компоненты аналитического множества удалить все его особые точки, то останется связное многообразие.

Покажем сначала, что всякая компонента связности T^0 множества T пересекается ровно с одной неприводимой компонентой множества Σ. Действительно, множество $\Sigma \setminus \Sigma_H$ имеет вещественную размерность $\leq (2n-4)$, поэтому оно не может делить связное $(2n-2)$-мерное вещественное многообразие T^0 на части. Поэтому дополнение множества T^0 до его пересечения с множеством $\Sigma \setminus \Sigma_H$ покрывается ровно одним множеством $D_i \cap \Sigma_H$. Так как множество $D_i \setminus \Sigma_H$ всюду плотно в компоненте D_i и множество D_i замкнуто, то множество T^0 целиком содержится в неприводимой компоненте D_i множества Σ. Допустим, что некоторая точка a множества T^0 принадлежит и другой $(n-1)$-мерной компоненте D_j, $D_j \neq D_i$, множества Σ. Но по условию множество T, а следовательно, и его компонента T^0 открыты в топологии множества Σ. Так как множество $D_j \cap \Sigma_H$ всюду плотно в D_j, множество T^0 будет содержать точки множества $D_j \cap \Sigma_H$, что невозможно. Противоречие доказывает нужное утверждение.

Покажем теперь, что различные компоненты связности многообразия T не могут лежать в одной и той же $(n-1)$-мерной неприводимой компоненте множества Σ. Действительно, если из неприводимой $(n-1)$-мерной компоненты удалить все ее особые точки и точки, не принадлежащие многообразию T, то останется связное многообразие. Следовательно, оно покрывается ровно одной компонентой связности многообразия T. Лемма доказана.

Утверждение 5. *Пусть пара, состоящая из n-мерного аналитического многообразия и его аналитического подмножества Σ, имеет постоянную топологию вдоль связного страта $B \subset \Sigma$* (см. п. 2). *Тогда каждая $(n-1)$-мерная неприводимая компонента множества Σ либо не пересекается со стратом B, либо содержит его целиком.*

Доказательство. Рассмотрим сначала локальный случай. То есть предположим, что многообразие B совпадает с множеством K_a, а многообразие M совпадает с его окрестностью $\pi^{-1}(K_a)$, о которых идет речь в условии 2 из п. 2 Покажем, что в этом случае замыкание каждой неприводимой $(n-1)$-мерной компоненты множества Σ совпадает с множеством K_a.

Мы будем использовать обозначения из этого пункта. Пусть $F_a^0 \subset F_a$ — множество, состоящее из точек аналитического множества F_a, в окрестности которых множество F_a является аналитической гиперповерхностью в многообразии V_a. Множество F_a^0 распадается на компоненты связности $F_a^{0,i}$. Дополнение $F_a \setminus F_a^0$ имеет меньшую комплексную размерность, чем множество F_a.

Гомеоморфизм, о котором идет речь в условии 2, переводит множество F_a^0 в множество Σ. Из леммы 4 вытекает, что этот гомеоморфизм переводит множества $F_a^{0,i} \times K_a$ в различные неприводимые $(n-1)$-мерные компоненты множества Σ, причем образ каждого из множеств $F_a^{0,i} \times K_a$ всюду плотен в соответствующей неприводимой компоненте множества Σ, и в каждую из $(n-1)$-мерных компонент множества Σ отобразится некоторое множество $F_a^{0,i} \times K_a$.

Далее, для каждой компоненты связности $F_a^{0,i}$ точка a является предельной (компоненты, для которых это не так, не пересекаются с достаточно малой окрестностью точки a и не входят в множество F_a^0). Поэтому замыкание каждого из множеств $F_a^{0,i} \times K_a$ содержит множество K_a. Следовательно, каждая из неприводимых $(n-1)$-мерных компонент множества Σ содержит множество K_a (гомеоморфизм, о котором идет речь в условии 2 из п. 2, тождественен на базе K_a).

Локальный случай разобран. Предположим теперь, что многообразие M находится в малой окрестности страта B. Именно, пусть многообразие M совпадает с окрестностью U страта B, о котором идет речь в условии 2. В этом случае страт B покрывается областями K_{a_j}. В каждой из таких областей действует предыдущее рассуждение. Поэтому если неприводимая $(n-1)$-мерная компонента D_i множества Σ пересекает множество $\pi^{-1}(K_{a_j})$, то ее замыкание содержит всю окрестность K_{a_j}. Итак, множество предельных точек компоненты D_i, лежащих в страте B, является открытым в топологии страта B. Но это множество, очевидно, является замкнутым в топологии страта B. Поэтому, так как страт B связен, он должен содержаться в замыкании компоненты D_i.

Перейдем теперь к общему случаю. Если неприводимая $(n-1)$-мерная компонента множества Σ не пересекает окрестность U страта B, о котором идет речь в условии 2, то страт B не содержит предельных точек этой компоненты. Если же она пересекает область U, то действует предыдущее рассуждение, согласно которому замыкание компоненты содержит весь страт B.

Утверждение доказано.

Теорема 6. *Пусть пара, состоящая из n-мерного многообразия M и его аналитического подмножества Σ, имеет постоянную топологию вдоль связного страта $B \subset \Sigma$. Тогда любая функция f, аналитическая в дополнении $M \setminus \Sigma$ многообразия M к множеству Σ, которая ограничена в некоторой окрестности точки $a \in B$, аналитически продолжается на окрестность страта B.*

Доказательство. Каждая $(n-1)$-мерная неприводимая компонента D_i множества Σ, не содержащая точку a, не пересекает страта B (см. утверждение 5). Поэтому объединение D_a неприводимых $(n-1)$-мерных компонент множества, не содержащих точку a, является замкнутым множеством, не пересекающим страта B. Теорема теперь вытекает из утверждения 3.

4. Накрывающие над дополнением многообразия к подмножеству хаусдорфовой коразмерности, большей единицы

В топологическом варианте теории Галуа роль полей играют римановы поверхности, а роль групп Галуа играют их группы монодромии. При этом приходится требовать, чтобы римановы поверхности обладали разумными топологическими свойствами. Римановы поверхности, являющиеся локально тривиальными накрытиями, такими свойствами обладают. Однако класс локально тривиальных накрытий является слишком узким и недостаточным для наших целей. В этом параграфе описывается класс *накрывающих многообразий над $M \setminus \Sigma$*, где M — многообразие, в котором отмечено, в некотором смысле, малое подмножество Σ. В одномерном топологическом варианте теории Галуа [1–4] идет речь о функциях, римановы поверхности которых являются накрывающими над комплексной прямой, в которой отмечено счетное (возможно, всюду плотное) множество Σ. В настоящей статье ключевую роль играют накрывающие многообразия над комплексным многообразием M, в котором отмечено аналитическое подмножество Σ (см. п. 5).

Пусть M, Σ — пара, состоящая из связного вещественного многообразия M и его подмножества $\Sigma \subset M$ таких, что дополнение $M \backslash \Sigma$ локально линейно связно и всюду плотно в многообразии M. В качестве примера такого подмножества Σ можно взять любое подмножество многообразия M, коразмерность которого по Хаусдорфу строго больше единицы. Отметим точку b, лежащую в дополнении к множеству Σ.

Определение 7. Связное многообразие R вместе с отмеченной точкой c и с проекцией $\pi : R \to M$ назовем *накрывающим многообразием над* $M \setminus \Sigma$ с отмеченной точкой b, если, во-первых, отображение π является локальным гомеоморфизмом, во-вторых, оно переводит отмеченную точку c в отмеченную точку b, $\pi(c) = b$, и, в-третьих, для всякой кривой γ в множестве $M \setminus \Sigma$, начинающейся в точке b, $\gamma\colon [0, 1] \to M \setminus \Sigma$, $\gamma(0) = b$, существует поднятие $\tilde{\gamma}$ кривой γ, $\tilde{\gamma}\colon [0, 1] \to R$, $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, начинающееся в точке c, $\tilde{\gamma}(0) = c$.

Для удобства изложения мы будем считать, что многообразие M наделено некоторой римановой метрикой.

Определение 8. Скажем, что подгруппа Γ в фундаментальной группе $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$ является *открытой*, если для каждой кривой $\gamma\colon [0, 1] \to M \setminus \Sigma$, $\gamma(0) = \gamma(1) = b$, принадлежащей подгруппе Γ, существует число $\varepsilon > 0$ такое, что всякая кривая $\tilde{\gamma}\colon [0, 1] \to M \setminus \Sigma$, $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = b$ такая, что при любом t, $0 \le t \le 1$, расстояние между точками $\gamma(t)$ и $\tilde{\gamma}(t)$ не превосходит ε, тоже лежит в подгруппе Γ, $\tilde{\gamma} \in \Gamma$.

С каждым накрывающим многообразием $\pi\colon (R, c) \to (M, b)$ над множеством $M \setminus \Sigma$ свяжем подгруппу в фундаментальной группе множества $(M \backslash \Sigma, b)$. Скажем, что кривая $\gamma\colon [0, 1] \to M \backslash \Sigma$, $\gamma(0) = \gamma(1) = b$, является *допустимой* для накрывающего многообразия (R, c), если поднятие $\tilde{\gamma}\colon [0, 1] \to R$ этой кривой $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ с началом в точке c, $\tilde{\gamma}(0) = c$, является замкнутой кривой, т.е. если $\tilde{\gamma}(1) = c$. Ясно, что все допустимые для накрывающего многообразия кривые образуют подгруппу в фундаментальной группе $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$. Будем говорить, что эта подгруппа *соответствует* накрывающему многообразию (R, c).

Определение 9. Накрывающее многообразие $\pi\colon (R, c) \to (M, b)$ над множеством $M \setminus \Sigma$ называется *максимальным*, если его нельзя вложить ни в какое большее накрывающе многообразие. Другими словами, если из существования другого накрывающего многообразия $\pi^1\colon (R_1, c_1) \to (M, b)$ над множеством $M \setminus \Sigma$ и из существования вложения $i\colon (R, c) \to (R_1, c_1)$, коммутирующего с проекциями $\pi = \pi^1 \circ i$, вытекает, что вложение i является гомеоморфизмом.

Теорема 10. *1. Если подгруппа Γ в фундаментальной группе множества $M \setminus \Sigma$ с отмеченной точкой b соответствует накрывающему многообразию*

$\pi\colon (R,c) \to (M,b)$ над $M \setminus \Sigma$ с отмеченной точкой c, $\pi(c) = b$, то подгруппа Γ открыта в $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$.

2. Для всякой открытой подгруппы Γ в группе $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$ существует единственное максимальное накрывающее многообразие $\tilde{\pi}(\Gamma)\colon (\tilde{R}(\Gamma), c) \to (M, b)$ над множеством $M \setminus \Sigma$, которому соответствует подгруппа Γ.

3. Произвольное открытое множество U в многообразии $\tilde{R}(\Gamma)$, содержащее полный прообраз множества $M \setminus \Sigma$ при отображении $\tilde{\pi}(\Gamma)$ и наделенное ограничением проекции $\tilde{\pi}(\Gamma)\colon U \to M$, является накрывающим многообразием над $M \setminus \Sigma$, соответствующим группе $\Gamma \subset \pi_1(M \setminus \Sigma, b)$. Обратно, каждое накрывающее многообразие над $M \setminus \Sigma$, соответствующее подгруппе Γ, получается таким способом.

Наметим доказательство теоремы. Докажем сначала п. 1. Пусть кривая γ в множестве $M \setminus \Sigma$ поднимается на R, начиная из точки c как замкнутая кривая. Отображение $\pi\colon R \to M$ является локальным гомеоморфизмом. Поэтому все достаточно близкие к кривой γ замкнутые кривые $\tilde{\gamma}$, лежащие в многообразии M, тоже поднимаются на R, начиная из точки c как замкнутые кривые. (Это верно, даже если близкая кривая $\tilde{\gamma}$ пересекает множество Σ.) Поэтому подгруппа Γ, соответствующая накрывающему многообразию над множеством $M \setminus \Sigma$, является открытой подгруппой в $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$.

Для доказательства п. 2 прежде всего нужно предъявить конструкцию максимального накрывающего многообразия $\tilde{\pi}(\Gamma)\colon (\tilde{R}(\Gamma), c) \to (M, b)$ над $M \setminus \Sigma$, соответствующего открытой подгруппе Γ в группе $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$.

Определение 11. Пусть Γ — открытая подгруппа в $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$. Замкнутую кривую γ на многообразии M, начинающуюся и заканчивающуюся в точке b, $\gamma\colon [0,1] \to M$, $\gamma(0) = \gamma(1) = b$, назовем Γ-*допустимой*, если она обладает следующим свойством. Существует число $\varepsilon > 0$ такое, что всякая замкнутая кривая в множестве $M \setminus \Sigma$, начинающаяся и заканчивающаяся в точке b, $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to M \setminus \Sigma$, $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = b$, и такая, что при любом t, $0 \le t \le 1$, расстояние между точками $\gamma(t)$ и $\tilde{\gamma}(t)$ не превосходит ε, принадлежит группе Γ.

С каждой (вообще говоря, незамкнутой) кривой $\gamma\colon [0,1] \to M$, $\gamma(0) = b$, связана замкнутая *дважды пройденная* кривая, являющаяся композицией кривой γ и кривой γ^{-1}.

Определение 12. Скажем, что незамкнутая кривая $\gamma\colon [0,1] \to M$ является Γ-*хорошей*, если

1) кривая γ начинается в отмеченной точке, $\gamma(0) = b$;

2) дважды пройденная кривая $\gamma\gamma^{-1}$ является Γ-допустимой.

Множество всех Γ-хороших кривых обозначим через $\Pi(\Gamma, b)$. Введем на множестве $\Pi(\Gamma, b)$ соотношение эквивалентности. Две Γ-хорошие кривые γ_1 и γ_2 назовем Γ-*эквивалентными*, если

1) кривые γ_1 и γ_2 имеют одинаковые правые концы, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$;

2) композиция γ кривых γ_1 и γ_2^{-1} является Γ-допустимой.

Опишем теперь множество $\tilde{R}(\Gamma)$ и отображение $\tilde{\pi}(\Gamma)\colon \tilde{R}(\Gamma) \to M$ на теоретико-множественном уровне. Множество $\tilde{R}(\Gamma)$ — это фактормножество множества $\Pi(\Gamma, b)$ всех Γ-хороших кривых по описанному выше соотношению эквивалентности. Отображение $\tilde{\pi}(\Gamma)$ сопоставляет каждой кривой

$\gamma \in \pi(\Gamma, b)$ ее правый конец $\gamma(1)$. Отмеченная точка $\tilde{c}$ в множестве $\tilde{R}(\Gamma)$ — класс эквивалентности постоянной кривой $\gamma(t) \equiv b$.

Определим теперь топологию в множестве $\tilde{R}(\Gamma)$: топология в $\tilde{R}(\Gamma)$ — это минимальная топология, для которой отображение $\tilde{\pi}(\Gamma)\colon \tilde{R}(\Gamma) \to M$ является непрерывным.

Легко видеть, что построенное многообразие $\tilde{R}(\Gamma)$ вместе с отмеченной точкой $\tilde{c}$ и проекцией $\tilde{\pi}(\Gamma)$, действительно, представляют собой накрывающее многообразие над множеством $M \setminus \Sigma$, соответствующее подгруппе Γ.

Докажем, что $\tilde{R}(\Gamma)$ является расширением всякого другого накрывающего многообразия $\pi\colon (R, c) \to (M, b)$ над множеством $M \setminus \Sigma$, соответствующего подгруппе Γ. Пусть $\gamma\colon [0,1] \to R$ — любая кривая на многообразии R, начинающаяся в точке c. Очевидно, что проекция $\pi \circ \gamma$ этой кривой будет Γ-хорошей в многообразии M.

Сопоставим каждой точке d на многообразии R совокупность $\Pi(c, d, R)$ всех кривых $\gamma\colon [0,1] \to R$ на многообразии R с началом в точке c и с концом в точке d, $\gamma(0) = c$, $\gamma(1) = d$. Ясно, что проекции $\pi \circ \gamma$ всех кривых γ из множества $\Pi(c, d, R)$ являются $\tilde{\Gamma}$-эквивалентными кривыми. Поэтому отображение, сопоставляющее каждой точке d многообразия R совокупность проекций $\pi \circ \gamma$ всех кривых γ из множества $\Pi(c, d, R)$, является вложением многообразия R в описанное выше многообразие $\tilde{R}(\Gamma)$.

Проверка остальных утверждений теоремы не представляет труда, и мы не будем на ней останавливаться.

5. Накрывающие над дополнением многообразия к аналитическому подмножеству

Утверждение 13. *Пусть M — аналитическое многообразие, Σ — аналитическое подмножество в M, и $b \in M \setminus \Sigma$ — отмеченная точка. Фиксируем некоторую подгруппу Γ фундаментальной группы $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$. Допустим, что некоторая Γ-хорошая кривая* (см. определение 14) $\gamma_1\colon [0,1] \to M$, $\gamma_1(0) = b$, *при $0 \leq t < 1$ лежит в множестве $M \setminus \Sigma$, а ее правый конец $a = \gamma(1)$ принадлежит множеству Σ. Рассмотрим любую допустимую стратификацию множества Σ* (см. п. 2). *Пусть B — страт этой стратификации, который содержит точку a, и пусть $\gamma_2\colon [0,1] \to B$ — любая кривая в этом страте, начинающаяся в точке a, $\gamma_2(0) = a$. Тогда композиция кривых γ_1 и γ_2 является Γ-хорошей кривой.*

Доказательство. Пусть U — достаточно малая окрестность страта B, и $\pi\colon U \to B$ — проекция, о которых идет речь в условии 2 (см. п. 2). Обозначим через $\pi(\Gamma)\colon (R(\Gamma), c) \to (M \setminus \Sigma, b)$ локально тривиальное накрытие, соответствующее подгруппе $\Gamma \subset \pi_1(M \setminus \Sigma, b)$. По определению накрытия кривая $\gamma_1\colon [0, t_1] \to M \setminus \Sigma$, где t_1 — любое число, строго меньшее 1, поднимается на многообразие $R(\Gamma)$ так, что поднятая кривая начинается в отмеченной точке $c \in R(\Gamma)$. Фиксируем значение параметра t_1, настолько близкое к 1, что точка $b_1 = \gamma(t_1)$ принадлежит множеству U. Обозначим через c_1 точку на поднятой кривой, соответствующую параметру t_1, $\pi(c_1) = b_1$. Пусть R_1 — компонента связности прообраза множества U при отображении $\pi(\Gamma)\colon R(\Gamma) \to M \setminus \Sigma$. Ограничение ρ отображения $\pi(\Gamma)$ на многообразие R_1 задает локально тривиальное накрытие $\rho\colon (R_1, c_1) \to$

$(U\setminus\Sigma, b_1)$. Обозначим через Γ_1 подгруппу фундаментальной группы $\pi_1(U\setminus\Sigma, b_1)$, соответствующую этому накрытию.

Лемма 14. *Группа Γ_1 содержит ядро гомоморфизма фундаментальной группы пространства $U\setminus\Sigma$ в фундаментальную группу страта B, индуцированного проектированием $\pi\colon U\to B$.*

Доказательство. Ограничение отображения $\pi\colon U\to B$ на область $U\setminus\Sigma$ является локально тривиальным расслоением (см. условие 2 из п. 2). Обозначим через a_1 образ точки b_1 при проекции π и обозначим через $V\setminus F$ слой расслоения над точкой a_1. Из отрезка

$$\dots\to\pi_1(V\setminus F, b_1)\to\pi_1(U\setminus\Sigma, b_1)\to\pi_1(B, a_1)\to\dots$$

точной гомотопической последовательности этого расслоения вытекает, что ядро интересующего нас гомоморфизма совпадает с образом фундаментальной группы слоя $\pi_1(V\setminus F, b_1)$. Поэтому нам надо показать, что группа Γ_1 содержит образ фундаментальной группы слоя. Пусть $\overline{\gamma}\colon[0,1]\to V\setminus F$, $\overline{\gamma}(0)=\overline{\gamma}(1)=b_1$, — любая замкнутая петля, лежащая в слое. Покажем, что $\overline{\gamma}\in\Gamma_1$. Для этого нам надо проверить, что композиция кривых $\tilde{\gamma}_1$, $\overline{\gamma}$ и $\tilde{\gamma}_1^{-1}$, где $\tilde{\gamma}_1$ — ограничение кривой γ_1 на отрезок $[0,t_1]$, принадлежит группе $\Gamma\subset\pi_1(M\setminus\Sigma, b)$. Но композицию этих кривых можно рассматривать как малое возмущение дважды пройденной кривой γ_1. По условию кривая γ_1 является Γ-хорошей, что и означает, что малое возмущение дважды пройденной кривой, не пересекающее множества Σ, лежит в группе Γ. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству утверждения 13. Пусть γ — композиция кривых γ_1 и γ_2, о которых идет речь в утверждении. Мы должны показать, что кривая γ является Γ-хорошей, т.е. что любая малая деформация дважды пройденной кривой γ, которая не пересекает множества Σ, лежит в группе Γ. Сначала докажем это для специальных малых деформаций, не пересекающих множество Σ и имеющих следующий вид. Кривая $\overline{\gamma}$ должна быть композицией кривых $\overline{\gamma}_1$, $\overline{\gamma}_2$ и $\overline{\gamma}_3$, которые являются малыми деформациями, соответственно, кривых γ_1, $\gamma_2\gamma_2^{-1}$ и γ_1^{-1}, при этом кривая $\overline{\gamma}_2$ должна быть замкнута. Разумеется, мы считаем, что выполнены равенства $\overline{\gamma}_1(1)=\overline{\gamma}_2(0)=\overline{\gamma}_2(1)=\overline{\gamma}_3(0)$, иначе композиция не определена. Так как кривая $\overline{\gamma}_2$ замкнута и близка к дважды пройденной кривой γ_2, ее проекция на страт B задает тривиальный элемент фундаментальной группы базы. Рассмотрим поднятие кривой $\overline{\gamma}_1$ на пространство расслоения $R(\Gamma)$, начинающееся в точке c. Обозначим через c_1 правый конец поднятой кривой. Согласно лемме, поднятие кривой $\overline{\gamma}_2$ на пространство $R(\Gamma)$, начинающееся в точке c_1, будет заканчиваться в той же точке c_1. Далее, поднятие кривой $\overline{\gamma}_3$ на $R(\Gamma)$, начинающееся в точке c_1, должно заканчиваться в точке c. Действительно, композиция кривых $\overline{\gamma}_1$ и $\overline{\gamma}_3$ является малой деформацией дважды пройденной кривой γ_1. Кривая Γ_1 является Γ-хорошей. Поэтому поднятие композиции кривых $\overline{\gamma}_1$ и $\overline{\gamma}_3$ на $R(\Gamma)$, начинающееся в точке c, должно заканчиваться в той же точке.

Итак, поднятие композиции кривых $\overline{\gamma}_1$, $\overline{\gamma}_2$ и $\overline{\gamma}_3$ на $R(\Gamma)$, начинающееся в точке c, заканчивается в той же точке c. Другими словами, композиция этих кривых лежит в группе Γ. Мы доказали нужное утверждение для специально возмущенной кривой, являющейся дважды пройденной композицией кривых γ_1 и γ_2. Очевидно, что любое малое возмущение этой кривой, лежащей в области $M \setminus \Sigma$, гомотопно в этой области некоторому специальному возмущению этой кривой.

(Дважды пройденная композиция кривых γ_1 и γ_2 является композицией кривых γ_1, $\gamma_2\gamma_2^{-1}$ и γ_1^{-1}. Возмущение этой композиции является композицией трех кривых l_1, l_2 и l_3, из которых кривая l_2 близка к кривой $\gamma_2\gamma_2^{-1}$, но не обязательно замкнута. Такая композиция, очевидно, гомотопна композиции близких кривых $\tilde{l}_1$, $\tilde{l}_2$, $\tilde{l}_3$, в которых кривая $\tilde{l}_2$ замкнута.)

Утверждение 13 доказано.

6. Основная теорема

Теперь все готово для формулировки и доказательства основной теоремы.

Теорема 15 (об аналитическом продолжении функции вдоль аналитического множества). *Пусть M — комплексное аналитическое многообразие, Σ — аналитическое подмножество в M, и f_b — росток аналитической функтсии в некоторой точке $b \in M$. Допустим, что росток f_b аналитически продолжается вдоль любой кривой $\gamma\colon [0,1] \to M$, $\gamma(0) = b$, не пересекающей множество Σ при $t > 0$. Пусть росток f_b аналитически продолжается вдоль некоторой кривой $\gamma_1\colon [0,1] \to M$, $\gamma_1(0) = b$, с правым концом в точке a, $a = \gamma_1(1)$, принадлежащим множеству Σ, $a \in \Sigma$. Рассмотрим любую допустимую стратификацию множества Σ* (см. п. 2). *Пусть B — страт этой стратификации, замыкание которого содержит точку a, и пусть $\gamma_2\colon [0,1] \to M$ — любая кривая, начинающаяся в точке a, $\gamma_2(0) = a$, такая, что $\gamma_2(t) \in B$ при $t > 0$. Тогда росток f_b аналитически продолжается вдоль композиции кривых γ_1 и γ_2.*

Доказательство. Пусть росток аналитической функции f_b продолжается вдоль кривой γ. Рассмотрим любую точку $\tilde{b}$, лежащую в области сходимости ряда Тейлора ростка f_b. Росток в точке $\tilde{b}$ суммы этого ряда Тейлора продолжается вдоль любой кривой, которая вне области сходимости ряда Тейлора достаточно близка к кривой γ. Поэтому *в формулировке основной теоремы, не ограничивая общности, можно считать, что точка b лежит в множестве $M \setminus \Sigma$, что точка a лежит в страте B и что кривая $\gamma_1\colon [0,1] \to M$, $\gamma_1(0) = b$, $\gamma_1(1) = a$, не пересекает множество Σ при* $0 \le t < 1$. В этих предположениях мы и будем доказывать основную теорему.

Обозначим через Γ подгруппу фундаментальной группы области $M \setminus \Sigma$ с отмеченнной точкой b, состоящую из петель в $M \setminus \Sigma$ с началом и концом в отмеченной точке, продолжение вдоль которых ростка f_b приводит к тому же ростку. Рассмотрим максимальное накрывающее многообразие $\tilde{\pi}(\Gamma)\colon (\tilde{R}(\Gamma), c) \to (M, b)$ над множеством $M \setminus \Sigma$, соответствующее этой подгруппе Γ (см. определение 9). Многообразие $\tilde{R}(\Gamma)$ имеет естественную структуру комплексно-аналитического многообразия, эта структура наследуется из аналитической структуры на M при отображении $\tilde{\pi}(\Gamma)$, являющемся локальным гомеоморфизмом. Множество $\tilde{\Sigma} = \tilde{\pi}^{-1}(\Gamma)(\Sigma)$ является аналитическим подмножеством в этом многообразии $\tilde{R}(\Gamma)$. Росток $\tilde{f}_c = \pi^* f_b$, рассматриваемый как росток аналитической функции в точке c на аналитическом многообразии $\tilde{R}(\Gamma)$, по условию аналитически продолжается на все многообразие $\tilde{R}(\Gamma) \setminus \tilde{\Sigma}$ и задает там однозначную аналитическую функцию $\tilde{f}$. Всякая кривая $\gamma\colon [0,1] \to M$, $\gamma(0) = b$, вдоль которой аналитически продолжается росток f_b, является Г-хорошей кривой. Действительно, аналитическое продолжение ростка f_b как вдоль дважды пройденной кривой γ, так и вдоль любой близкой к кривой $\gamma\gamma^{-1}$ замкнутой кривой $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to M$, $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = b$, приводит, очевидно, к тому же ростку f_b, с которого мы начинали.

В частности, кривая $\gamma_1\colon [0,1] \to M$, $\gamma_1(0) = b$, $\gamma_1(1) = a \in \Sigma$, вдоль которой продолжается росток f_b и о которой идет речь в основной теореме, является Г-хорошей. Поэтому существует поднятие кривой γ_1 на $\tilde{R}(\Gamma)$, которое начинается в точке c. Обозначим через $\tilde{a}$ правый конец поднятой кривой. Согласно утверждению 13, для всякой кривой γ_2, начинающейся в точке a и лежащей в страте B, композиция кривых γ_1 и γ_2 является Г-хорошей кривой. Следовательно, существует поднятие этой композиции на $\tilde{R}(\Gamma)$ с началом в точке c. Другими словами, это означает, что всякая кривая, лежащая в страте B и начинающаяся в точке a, поднимается на $\tilde{R}(\Gamma)$ с началом в точке $\tilde{a}$. Пусть $\tilde{B}$ — компонента связности прообраза страта B относительно проекции $\tilde{\pi}(\Gamma)$, которая содержит точку $\tilde{a}$. Мы доказали, что ограничение отображения $\tilde{\pi}(\Gamma)$ на $\tilde{B}$ задает локально тривиальное накрытие над стратом B. Ясно, что топология пары, состоящая из многообразия $\tilde{R}(\Gamma)$ и множества $\tilde{\Sigma}$, являющегося полным прообразом множества Σ при проекции $\tilde{\pi}(\Gamma)$, имеет постоянную топологию вдоль страта $\tilde{B}$. Действительно, локально тройка $\tilde{R}(\Gamma)$, $\tilde{\Sigma}$, $\tilde{B}$ гомеоморфна тройке M, Σ, B, и топология пары M, Σ, по условию, постоянна вдоль страта B.

Теперь мы можем применить теорему 6 к ростку $\tilde{f}_c = \pi^* f_b$ однозначной аналитической функции на многообразии $\tilde{R}(\Gamma) \setminus \tilde{\Sigma}$, которая продолжается в окрестность точки $\tilde{a} \in \tilde{B}$. Доказательство основной теоремы закончено.

Цитированная литература

[1] *Хованский А. Г.* О представимости функций в квадратурах // УМН.–1971.–Т. 26, вып. 4.–С. 251–252.

[2] *Хованский А. Г.* Римановы поверхности функций, представимых в квадратурах. “Тезисы Всесоюзной топологической конференции”, Тбилиси, 1972.

[3] *Хованский А. Г.* О представимости функций в квадратурах. Дис. … канд. физ.-матем. наук. М.: МИАН СССР им. В. А. Стеклова, 1973.

[4] *Khovanskii A. G.* Topological obstructions for representability of functions by quadratures. “Journal of dynamical and control systems”, V.1, N.1, 99–132, 1995.

[5] *Фукс Б. А.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. Гос. издат. физ.-мат. литературы, Москва, 1962.

[6] *М. Горески, Р. Макферсон.* Стратифицированная теория Морса. Мир, Москва, 1991.