СОГЛАСОВАННЫЕ РАЗБИЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МЕРЫ*

А. Хованский

Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ — n многогранников в $\mathbb{R}^n$. Существует много способов разбить многогранники Δ_i на более мелкие многогранники Γ_i^j и затем выбрать определенные "согласованные" наборы, содержащие по одному многограннику $\Gamma_i^{j_i}$ из каждого многогранника Δ_i так, чтобы выполнялась формула

$$V(\Delta_1, \dots, \Delta_n) = \sum V(\Gamma_1^{j_1}, \dots, \Gamma_n^{j_n}), \tag{1}$$

где V — смешанный объем, а суммирование ведется по всем согласованным набором. Теория многогранников Ньютона доставляет массу примеров такого рода (см. §2). Настоящая статья возникла из попытки выяснить, существует ли аналогичный эффект и для других отличных от объемов конечноаддитивных мер (таких, как, скажем, число целых точек в многограннике).

В статье вводится понятие согласованного разбиения нескольких многогранников (число которых не обязательно равно размерности пространства, в котором они лежат). Центральный результат настояшей статьи — обобщение соотношения (1) для любых согласованных разбиений и для любой конечноаддитивной меры (см. §5).

Рассмотрим меру на целочисленных многогранниках, полиномиальную относительно сдвигов многогранников на вектора целочисленной решетки. Известно, что такая мера будет полиномом на полугруппе целочисленных многогранников относительно сложения по Минковскому. Для мер, инвариантных относительно сдвигов на вектора целочисленной решетки, этот результат принадлежит Мак-Маллену [6]. Перенесение на случай полиномиальных мер относительно сдвигов дано в [5], где используется интеграл по эйлеровой характеристике. Здесь мы показываем, что этот результат является прямым следствием обобщенного соотношения (1).

---

*Работа выполнена во время визита в Ekole Normale Superieure при частичной поддержке гранта N 95-011-8701 Российского Фонда Фундаментальных исследований и Канадского Гранта OGP0156833. Я признателен французским коллегам за гостеприимство.

§1 Согласованные регулярные разбиения

В статье под словом многогранник мы имеем в виду компактный выпуклый многогранник, т.е. выпуклую оболочку конечного числа точек. *Разбиением* многогранника Δ называется конечное множество многогранников $\mathcal{R}(\Delta)$ такое, что
1) объединение многогранников из $\mathcal{R}(\Delta)$ равно многограннику Δ,
2) множество $\mathcal{R}(\Delta)$ с каждым многогранником содержит все его грани,
3) пересечение любых двух многогранников из $\mathcal{R}(\Delta)$ либо пусто, либо является гранью этих многогранников.

Простейший пример разбиения доставляет *тавтологическое разбиение* многогранника, содержащее многогранник и все его грани.

Среди разбиений многогранников выделяются *регулярные разбиения* [3]. Этот класс разбиений, во-первых, тесно связан с теорией многогранников Ньютона (см. [7]), и, во-вторых, является гибким и удобным для работы. Переходим к определению этого класса разбиений.

Пусть Δ — многогранник, лежащий в линейном пространстве L_1. Скажем, что многогранник $\tilde{\Delta}$, принадлежащий произведению пространства L_1 на вещественную прямую $\mathbb{R}^1$, *лежит над многогранником* Δ, если многогранник Δ является проекцией многогранника $\tilde{\Delta}$. Будем считать, что в $\mathbb{R}^1$ фиксирована ориентация. Пусть e_1 — базисный вектор в $\mathbb{R}^1$. Скажем, что точка $x \in \tilde{\Delta}$ является верхней точкой многогранника $\tilde{\Delta}$, если луч $x + \lambda e_1$, где $\lambda \geq 0$, пересекается с $\tilde{\Delta}$ лишь по точке x. Грань многогранника $\tilde{\Delta}$ называется верхней гранью, если каждая ее точка является верхней точкой этого многогранника.

Очевидно, что грань Γ многогранника $\tilde{\Delta}$ является верхней гранью, если и только если существует ковектор $\xi \in (L_1 \times \mathbb{R}^1)^*$, для которого $\langle \xi, e_1 \rangle > 0$, такой, что максимум скалярного произведения с ковектором ξ на многограннике $\tilde{\Delta}$ достигается в точности на грани Γ.

Разбиением многогранника Δ, *связанным с* лежащим над ним *многогранником* $\tilde{\Delta}$, называется разбиение $\mathcal{R}(\Delta)$, состоящее из проекций верхних граней многогранника $\tilde{\Delta}$. Разбиение многогранника Δ, связанное с каким-либо многогранником $\tilde{\Delta}$, называется *регулярным.*

Отметим, что регулярное разбиение многогранника Δ зависит не от самого многогранника $\tilde{\Delta}$, а лишь от его верхних точек. Множество верхних точек многогранника $\tilde{\Delta}$ можно рассматривать как график кусочно линейной выпуклой функции на многограннике Δ. Обратно, *с каждой кусочно линейной выпуклой функцией на многограннике* Δ *связано его регулярное разбиение* — в качестве многогранника $\tilde{\Delta}$ нужно взять выпуклую оболочку графика этой функции.

Пусть $\mathcal{R}(\Delta_1), \ldots, \mathcal{R}(\Delta_k)$ — набор регулярных разбиений многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Выберем многогранники $\tilde{\Delta}_1, \ldots, \tilde{\Delta}_k$, лежащие над многогранниками $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ и порождающие $\mathcal{R}(\Delta_1), \ldots, \mathcal{R}(\Delta_k)$. Выбор многогранников $\tilde{\Delta}_i$ определяет согласование регулярных разбиений.

Скажем, что многогранники $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ из разбиений $\mathcal{R}(\Delta_1), \dots, \mathcal{R}(\Delta_k)$ *регулярно согласованы* (с помощью многогранников $\tilde{\Delta}_i$), если сумма Минковского $\tilde{\Gamma}_1 + \dots + \tilde{\Gamma}_k$ лежащих над ними верхних граней $\tilde{\Gamma}_i$ многогранников $\tilde{\Delta}_i$ является верхней гранью $\tilde{\Gamma}$ многогранника $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}_1 + \dots + \tilde{\Delta}_n$. Таким образом, с каждой верхней гранью $\tilde{\Gamma}$ многогранника $\tilde{\Delta}$ связывается единственный набор согласованных многогранников $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$.

Вот эквивалентное определение. Многогранники $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ из разбиений $\mathcal{R}(\Delta_1)$, $\dots, \mathcal{R}(\Delta_k)$ *регулярно согласованы* (с помощью многогранников $\tilde{\Delta}_i$), если существует линейная функция $l\colon L_1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, максимум которой на i-ом многограннике $\tilde{\Delta}_i$ достигается в точности на верхней грани $\tilde{\Gamma}_i$ многогранника $\tilde{\Delta}_i$, лежащей над многогранником Γ.

Скажем, что многогранники $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ *аффинно независимы*, если независимы минимальные аффинные пространства, их содержащие. Другими словами, многогранники $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ аффинно независимы, если размерность суммы Минковского этих многогранников равна сумме их размерностей

$$\dim(\Delta_1 + \dots + \Delta_k) = \dim \Delta_1 + \dots + \dim \Delta_k.$$

Теорема. *Любой набор регулярных разбиений $\mathcal{R}(\Delta_1), \dots, \mathcal{R}(\Delta_k)$ можно регулярно согласовать так, чтобы каждый согласованный набор многогранников был аффинно независим.*

Доказательство. Пусть регулярное разбиение многогранника Δ соответствует кусочно линейной выпуклой функции $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$. Тогда если к функции f прибавить любую линейную функцию, то соответствующее регулярное разбиение не изменится. Пусть разбиение $\mathcal{R}(\Delta_i)$ соответствует функции $f_i\colon \Delta_i \to \mathbb{R}$. Несложно видеть, что прибавляя к функциям f_i различные достаточно общие линейные функции L_i, можно добиться того, чтобы каждый согласованный набор многогранников был аффинно независим.

Следствие. *Можно так регулярно согласовать тавтологические разбиения нескольких многогранников в $\mathbb{R}^n$, чтобы каждый согласованный набор содержал аффинно независимые грани этих многогранников.*

Доказательство. Действительно, тавтологическое разбиение, очевидно, является регулярным — оно связано с любой линейной функцией на многограннике.

§2 Многогранники Ньютона и смешанные объемы

В этом параграфе мы прокомментируем связь алгебраической геометрии с рассматриваемым кругом вопросов. Приведенные здесь соображения в дальнейшем не используются, и при первом чтении его можно пропустить.

Рассмотрим систему из n уравнений

$$P_1 = \dots = P_n = 0 \tag{1}$$

в $(\mathbb{C}^*)^n$, в которой $P_1, \dots, P_n$ — полиномы Лорана, достаточно общие для своих многогранников Ньютона $\Delta_1, \dots, \Delta_n$. Связь теории меры и алгебраической геометрии доставляет теорема Бернштейна [1], согласно которой число решений системы (1) равно $n!V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$.

Обозначим через a_{ij} коэффициенты полинома Лорана P_i, $P_i = \sum a_{ij}x^j$, $j \in \mathbb{Z}^n$. Рассмотрим произвольные полиномы Лорана $a_{ij}(\tau)$ одной переменной τ такие, что $a_{ij}(1) = a_{ij}$.

Систему уравнений

$$\tilde{P}_1(x, \tau) = \dots = \tilde{P}_n(x, \tau) = 0, \tag{2}$$

в которой $\tilde{P}_i(x, \tau) = \sum a_{ij}(\tau)x^j$, можно рассматривать как зависящую от параметра τ систему уравнений на точку $x \in (\mathbb{C}^*)^n$. При $\tau = 1$ система (2) совпадает с ситемой (1) и имеет те же корни. Теория многогранников Ньютона позволяет описать поведение корней системы (2) при $\tau \to \infty$, по крайней мере, в том случае, когда полиномы Лорана $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ достаточно общи для своих многогранников Ньютона $\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_n$.

Приведем это описание. Рассмотрим любую верхную грань $\tilde{\Gamma}$ многранника $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}_1 + \dots + \tilde{\Delta}_n$. Она является суммой определенных верхних граней $\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_n$ многогранников $\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_n$. С каждой верхней гранью $\tilde{\Gamma}$ свяжем систему равнений

$$\tilde{P}_1^{\tilde{\Gamma}_1}(x, \tau) = \dots = \tilde{P}_n^{\tilde{\Gamma}_n}(x, \tau) = 0, \tag{$3_{\tilde{\Gamma}}$}$$

где $\tilde{P}_i^{\tilde{\Gamma}_i}$ — укорочение полинома Лорана $\tilde{P}_i$ по грани $\tilde{\Gamma}_i$ (см. [4]). Мы получаем столько систем, сколько верхних граней имеет многогранник $\tilde{\Delta}$.

Пусть $\tau\colon (\mathbb{R}^1, 0) \to (\tilde{\mathbb{C}}, \infty)$ — росток вещественной кривой на сфере Римана такой, что $\tau(0) = \infty$. Рассмотрим корни системы (1) при $\tau = \tau(t)$, $t \to 0$, $\tau(t) \to \infty$.

Теорема (об асимптотическом решении системы (1), ср. [1], [4]). *Если полиномы Лорана $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ — Δ-невырожденны для своих многогранников Ньютона, то на ростке кривой $\tau(t)$ существует взаимнооднозначное соответствие между множеством $\{x(\tau(t))\}$ корней системы (1) и объединением $\{\tilde{x}(\tau(t))\}$ корней систем ($3_{\tilde{\Gamma}}$), по всем верхним граням $\tilde{\Gamma}$ многогранника $\tilde{\Delta}$. При этом отношение $x\tilde{x}^{-1}$ в группе $(\mathbb{C}^*)^n$ соответствующих друг другу корней x и $\tilde{x}$ стремится при $t \to 0$, $\tau(t) \to \infty$ к единичному элементу группы $(\mathbb{C}^*)^n$.*

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что число решений системы (1) равно сумме чисел решений систем ($3_{\tilde{\Gamma}}$) при фиксированном значении $\tau(t_0)$ параметра τ, где t_0 мало. Обозначим через $\Gamma_i \subset \Delta_i$ проекцию грани $\tilde\Gamma_i$ многогранника $\tilde\Delta_i$. При фиксированном $\tau = \tau(t_0)$ многогранники Ньютона системы $(3_{\tilde\Gamma})$ будут проекциями $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ граней $\tilde\Gamma_1, \dots, \tilde\Gamma_n$. Применяя к этим системам теорему Бернштейна, получим

Следствие. *В описанной выше ситуации справедливо равенство*

$$n!V(\Delta_1, \dots, \Delta_n) = \sum n!V(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n),$$

где суммирование ведется по всем согласованным при помощи многогранников $\tilde\Delta_1, \dots, \tilde\Delta_n$ *наборам* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ *соответствующих регулярных разбиений многогранников* $\Delta_1, \dots, \Delta_n$.

Замечание 1. Если среди слагаемых грани $\tilde\Gamma$ многогранника $\tilde\Delta$, $\tilde\Gamma = \tilde\Gamma_1 + \dots + \tilde\Gamma_n$, $\tilde\Gamma_i \in \tilde\Delta_i$, одна из граней $\tilde\Gamma_j$ является вершиной, то смешанный объем $V(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ соответствующих ей многогранников равен нулю. Такой грани $\tilde\Gamma$ соответствует несовместная система $(3_{\tilde\Gamma})$.

Замечание 2. Полиномы Лорана $a_{ij}(\tau)$ можно выбрать так, чтобы все системы $(3_{\tilde\Gamma})$ явно решались. Для этого достаточно, чтобы для каждой грани $\tilde\Gamma \subset \tilde\Delta$, для которой система $(3_{\tilde\Gamma})$ совместна, каждый из полиномов Лорана $\tilde P_i^{\tilde\Gamma_i}$ был линейной комбинацией лишь двух мономов. В этом случае проекция грани $\tilde\Gamma$ будет параллелепипедом, а число решений системы $(3_{\tilde\Gamma})$ будет объемом этого параллелепипеда, умноженным на $n!$. Используя это соображение, можно не только доказать теорему Бернштейна, но и получить новые формулы для смешанного объема (обобщаюсчие формулы из [3]). Я вернусь к этой теме в другой статье.

§3 Согласованные разбиения нескольких многогранников

Нашей ближайшей целью является общее определение согласования (не обязательно регулярного) разбиений k многогранников. Возможны два подхода к этому определению. Один — с "многомерной" точки зрения, в которой фигурирует *джойн* k многогранников. Второй — с точки зрения пространства, в котором лежат k многогранников. Начнем с многомерной точки зрения.

Джойном Ω многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, лежащих в линейном пространстве L_1, над симплексом размерности $(k-1)$ с вершинами $A_1, \dots, A_k$, лежащим в пространстве L_2, называется выпуклая оболочка многогранников $(\Delta_i, A_i) \subset L_1 \times L_2$.

Ниже дается описание граней джойна многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_k$. Нам понадобится следующее определение. Набор граней $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_k \subset L$ называется *согласованным*, если существует ковектор $\xi \in L^*$ такой, что максимум скалярного произведения с ковектором ξ на многограннике Δ_i достигается в точности на грани Γ_i.

Легко проверяется следующее

Утверждение 1. *С каждым подмножеством $\Delta_{i_1},\dots,\Delta_{i_l}$ множества многогранников $\Delta_1,\dots,\Delta_k$ и с каждым согласованным набором граней $\Gamma_{i_1}\subset\Delta_{i_1},\dots,\Gamma_{i_l}\subset\Delta_{i_l}$ связана грань джойна Ω многогранников $\Delta_1,\dots,\Delta_l$. Именно, эта грань является джойном граней $\Gamma_{i_1},\dots,\Gamma_{i_l}$ над симплексом с вершинами $A_{i_1},\dots,A_{i_l}$. Обратно, каждая грань джойна Ω имеет описанный вид.*

Разбиение $\mathcal{R}(\Omega)$ джойна Ω многогранников $\Delta_1,\dots,\Delta_k$ над симплексом в пространстве L_2 с вершинами $A_1,\dots,A_k$ назовем *правильным*, если проекция любой вершины этого разбиения на пространство L_2 является одной из вершин $A_1,\dots,A_k$. Правильное разбиение $\mathcal{R}(\Omega)$ джойна определяет разбиения $\mathcal{R}(\Delta_1),\dots,\mathcal{R}(\Delta_k)$ многогранников $\Delta_1,\dots,\Delta_k$. Для построения разбиения $\mathcal{R}(\Delta_i)$ нужно отождествить многогранник Δ_i с гранью (Δ_i,A_i) джойна Ω и рассмотреть разбиение этой грани, индуцированное разбиением $\mathcal{R}(\Omega)$. В описанной ситуации мы также будем говорить, что правильное разбиение джойна $\mathcal{R}(\Omega)$ задает *согласование разбиений* $\mathcal{R}(\Delta_1),\dots,\mathcal{R}(\Delta_k)$ многогранников $\Delta_1,\dots,\Delta_k$.

Обозначим через $\mathcal{R}(\Omega,k)$ подмножество многогранников правильного разбиения $\mathcal{R}(\Omega)$, вершины которых проектируются на множество $A_1,\dots,A_k$. Ясно, что многогранник $\Gamma\in\mathcal{R}(\Omega,k)$ является джойном соответствующих многогранников $\Gamma_1,\dots,\Gamma_k$ из разбиений $\mathcal{R}(\Delta_1),\dots,\mathcal{R}(\Delta_k)$. Множество $\mathcal{R}(\Omega,k)$ вполне определяет разбиение $\mathcal{R}(\Omega)$: в $\mathcal{R}(\Omega)$ входят только многогранники из $\mathcal{R}(\Omega,k)$ и их грани.

Множество $\mathcal{R}(\Omega,k)$ можно определить, задав следующее подмножество S в декартовом произведении $\mathcal{R}(\Delta_1),\times\cdots\times\mathcal{R}(\Delta_k)$: набор многогранников $(\Gamma_1(s),\dots,\Gamma_k(s))$, в котором $\Gamma_i\in\mathcal{R}(\Delta_i)$, является точкой s множества S, если и только если в множестве $\mathcal{R}(\Omega,k)$ содержится джойн многогранников $\Gamma_1,\dots,\Gamma_k$ над симплексом с вершинами $A_1,\dots,A_k$.

Множество $S\subset\mathcal{R}(\Delta_1)\times\cdots\times\mathcal{R}(\Delta_k)$ обладает следующими свойствами:

1) для любых положительных чисел $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)=\lambda$ множество многогранников $\Gamma(s,\lambda)=\lambda_1\Gamma_1(s)+\cdots+\lambda_k\Gamma_k(s)$ является разбиением $\mathcal{R}(\Delta(\lambda))$ многогранника $\Delta(\lambda)=\lambda_1\Delta_1+\cdots+\lambda_k\Delta_k$, при этом каждый многогранник $\Gamma\in\mathcal{R}(\Delta(\lambda))$ совпадает с многогранником $\Gamma(s,\lambda)$ ровно для одного элемента $s\in S$;
2) для всякого ковектора ξ и любого элемента $s_1\in S$ существует элемент $s_2\in S$ такой, что $\Gamma_i(s_2)=\Gamma_i^{\xi}(s_1)$.

Обратно, согласование разбиений $\mathcal{R}(\Delta_1),\dots,\mathcal{R}(\Delta_k)$ можно задать, фиксировав подмножество S в декартовом произведении $\mathcal{R}(\Delta_1)\times\cdots\times\mathcal{R}(\Delta_k)$, обладающее свойствами 1–2. Это дает второе, “маломерное”, описание согласования разбиений многогранников.

Утверждение 2. *Регулярное согласование регулярных разбиений нескольких многогранников является их согласованием.*

Доказательство. Пусть регулярное согласование регулярных разбиений многогранников $\Delta_1,\dots,\Delta_k$ связано с кусочно линейными выпуклыми функциями $f_1,\dots,f_k$.

Рассмотрим кусчно линейную выпуклую функцию F на джойне Ω этих многогранников, определенную следующим условием: выпуклая оболочка графика функтсии F совпадает с выпуклой оболочкой графиков функций f_i, заданных на гранях (Δ_i, A_i) джойна Ω. Легко проверить, что регулярное разбиение джойна, связанное с функцией F, задает согласование регулярных разбиений многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, совпадающее с их регулярным согласованием, связанным с функциями $f_1, \dots, f_k$.

§4 Разбиения и эйлеровы характеристики

Нам понадобятся приводимые ниже известные утверждения 1–2, связанные с эйлеровыми характеристиками многогранников и их разбиениями.

Характеристическую функцию произвольного многогранника Δ будем обозначать χ_Δ.

Утверждение 1. *Для всякого многогранника Δ и его разбиения $\mathcal{R}(\Delta)$ справедлива формула*

$$\chi_\Delta = \sum_{\Gamma \in \mathcal{R}(\Delta), \Gamma \not\subset \partial\Delta} (-1)^{\operatorname{codim} \Gamma} \chi_\Gamma.$$

(Границу $\partial\Delta$ многогранника Δ мы всегда понимаем в смысле топологии минимального аффинного подпространства, содержащего многогранник Δ.)

Доказательство. Обозначим через $B(x, \varepsilon)$ шар радиуса ε с центром в точке x. Для любой точки $x \in \Delta$ пересечение $B(x, \varepsilon) \cap \Delta$ будет замкнутым выпуклым множеством той же размерности, что и многогранник Δ. Эйлерова характеристика относительных групп гомологий множества $B(x, \varepsilon) \cap \Delta$ по его границе $\partial(B(x, \varepsilon) \cap \Delta)$ равна $(-1)^{\dim \Delta}$. При достаточно малом ε эйлерову характеристику для относительных гомологий можно вычислять при помощи клеток $B(x, \varepsilon) \cap \Gamma$, где Γ — любой многогранник из разбиения $\mathcal{R}(\Delta)$, содержащий точку x и не лежащий целиком на границе множества $B(x, \varepsilon) \cap \Delta$. Откуда имеем

$$(-1)^{\dim \Delta} \chi_\Delta(x) = \sum_{x \in \Gamma, \Gamma \in \mathcal{R}(\Delta), \Gamma \not\subset \partial\Delta} (-1)^{\dim \Gamma} \chi_\Gamma(x)$$

или $\chi_\Delta(x) = \sum (-1)^{\operatorname{codim} \Gamma} \chi_\Gamma(x)$, ч.т.д.

Следствие 1. *Для всякой конечноаддитивной меры μ, в которой измеримы все многогранники из некоторого разбиения $\mathcal{R}(\Delta)$, справедливо равенство*

$$\mu(\Delta) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{R}(\Delta), \Gamma \not\subset \partial\Delta} (-1)^{\operatorname{codim} \Gamma} \mu(\Gamma).$$

Утверждение 2. *Для всякого разбиения $\mathcal{R}(\Delta)$ многогранника Δ справедливо тозхдество*

$$1 = \sum_{\Gamma \in \mathcal{R}(\Delta), \Gamma \not\subset \partial\Delta} (-1)^{\operatorname{codim} \Gamma}.$$

Доказательство. Тождество вытекает из следующего топологического факта: эйлерова характеристика пары $(\Delta, \partial\Delta)$ равна $(-1)^{\dim \Delta}$.

Замечание. Утверждение 2, конечно, связано со следствием 1. Дело в том, что существует конечноаддитивная мера на булевой алгебре, порожденной выпуклыми многогранниками, значение которой на всяком многограннике равно его эйлеровой характеристике, т.е. равно единице ([8],[5]). Формально мы будем этим пользоваться при доказательстве основной теоремы (см. §5). Однако фактически мы будем использовать лишь утверждение 2 для правильного разбиения джойна.

Применим эти факты для разбиения $\mathcal{R}(\Omega)$ джойна k многогранников (см. §3). В множестве $\mathcal{R}(\Omega, k)$ есть подмножество $\mathcal{R}_0(\Omega, k)$, состоящее из тех многогранников Γ, для которых соответствующие многогранники $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ не лежат на согласованных гранях многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_k$. Другими словами, из тех многогранников Γ, для которых не существует ненулевого ковектора ξ такого, что $\Gamma_i \subset \Delta_i^\xi$.

Из описания граней джойна (утверждение 1 §3) и из утверждения 2 и следствия 1 из настоящего параграфа вытекает

Следствие 2.
1. Для всякой конечноаддитивной меры g, в которой измеримы все многогранники Γ из разбиения $\mathcal{R}(\Omega)$ справедливо равенство

$$g(\Omega) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{R}_0(\Omega, k)} (-1)^{\operatorname{codim} \Gamma} g(\Gamma).$$

2.

$$1 = \sum_{\Gamma \subset \mathcal{R}_0(\Omega, k)} (-1)^{\operatorname{codim} \Gamma}.$$

Наша основная теорема (см. §5) представляет собой применение следствия 2 для специальной меры g в $L_1 \times L_2$, построенной по заданной мере μ в пространстве L_1.

§5 Основная теорема

Пусть $\mathcal{R}(\Omega)$ — произвольное согласованное разбиение многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ из проствакства L_1, причем все многогранники из каждого разбиения $\mathcal{R}(\Delta_i)$ измеримы в смысле конечоаддитивной меры μ. Пусть булева алгебра $\mathcal{B}_\mu$ измеримых множеств в смысле меры μ обладает следующим свойством: если она содержит выпуклые многогранники Δ_1 и Δ_2, то она содержит и их сумму Минковского $\Delta_1+\Delta_2$. В этих предположениях справедлива следующая

Основная теорема. *Для всякого измеримого согласованного разбиения $\mathcal{R}(\Omega)$ многогранников $\Delta_1,\dots,\Delta_k$ справедливо равенство*

$$\sum_{J\in 2^I}(-1)^{n-|J|}\mu\left(0+\sum_{i\in J}\Delta_i\right)=\sum_{\Gamma\in\mathcal{R}_0(\Omega,k)}(-1)^{\operatorname{codim}(\Gamma)}\left(\sum_{J\in 2^I}(-1)^{n-|J|}\mu\left(0+\sum_{i\in J}\Gamma_i\right)\right),$$

где $I=(1,\dots,k)$ — отрезок натурального ряда, суммирование ведется по всем подмножествам J множества I.

Доказательство. По мере μ на пространстве L_1 строится новая мера $\overline{\mu}$ на пространстве $L_1\times L_2$, содержащем джойн Ω многогранников $\Delta_1,\dots,\Delta_k$. Основная теорема получается применением следствия 2 из §4 к этой мере. Начнем с построения вспомогательной меры μ_J в пространстве $L_1\times L_2$. Пусть Ω — джойн многогранников $\Delta_1,\dots,\Delta_k\subset L_1$ над $(k-1)$-мерным симплексом с вершинами $A_1,\dots,A_k$, лежащем в пространстве L_2. Для всякого непустого подмножества J отрезка натурального ряда $I=(1,\dots,k)$ обозначим через L_J аффинное пространство, являющееся прообразом при проектировании $\pi\colon L_1\times L_2\to L_2$ точки $A_J\in L_2$, определенной равенством

$$A_J=\frac{1}{|J|}\left(\sum_{i\in J}A_i\right),$$

где $|J|$ — число элементов в множестве J. Обозначим через $\mathcal{B}_J^0$ булеву алгебру на аффинном пространстве L_J, состоящую из множеств (X,A_J) таких, что множество $|J|X$, полученное гомотетичным растяжением множества X в $|J|$ раз, лежит в булевой алгебре $\mathcal{B}_\mu$. Положим $\mu_J(X)$ равной $\mu(|J|X)$. Эта мера распространяется на булеву алгебру $\mathcal{B}_J$ в пространстве $L_1\times L_2$, состоящую из множеств Y таких, что $Y\cap L_J\in\mathcal{B}_J^0$, по следующей формуле: $\mu_J=\mu_J(Y\cap L_J)$. Легко видеть, что значение меры μ_J на джойне многогранников $\Gamma_1,\dots,\Gamma_k$ равна $\mu(\sum_{i\in J}\Gamma_i)$.

Определим также меру $\mu_\emptyset$ для пустого подмножества $\emptyset\subset I$. Булева алгебра $\mathcal{B}_\emptyset$ — это булева алгебра, порожденная всеми выпуклыми многогранниками Δ в проствранстве $L_1\times L_2$. Значение меры $\mu_\emptyset$ на многограннике Δ положим равным $\mu(0)$, где $\mu(0)$ — значение меры μ на точке $0\in L^n$. Другими словами мера $\mu_\emptyset$ —

это мера $\mu(0)E$, где E — продолжение по аддитивности эйлеровой характеристики на булеву алгебру $\mathcal{B}_\emptyset$.

Положим, наконец,

$$\overline{\mu} = \sum_{J \in 2^I} (-1)^{n-|J|} \mu_J,$$

где суммирование ведется по всем подмножествам J отрезка натурального ряда, включая и пустое подмножество. Мера $\overline{\mu}$ определена на пересечении булевых алгебр $\mathcal{B}_J$. Основная теорема получается применением следствия 2 из §4 к этой мере.

Замечание. В доказательстве теоремы мы пользовались существованием продолжения эйлеровой характеристики на булеву алгебру $\mathcal{B}_\emptyset$. Вместо этого достаточно воспользоваться пунктом 2 следствия 2 из §4.

Следствие. *Для правильного разбиения $\mathcal{R}(\Omega)$ джойна n многогранников в $\mathbb{R}^n$ справедливо тождество*

$$V(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) = \sum_{\Gamma \subset \mathcal{R}_0(\Omega, n)} V(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n).$$

Доказательство получается применением основной теоремы к мере μ, равной обычному евклидову объему.

§6 Полиномы на полугруппах

Функцию $f\colon G \to \mathcal{R}$, определенную на коммутативной полугруппе G, содержащей нуль, назовем полиномом степени $\leq k$, если для любых фиксированных элементов $a_1, \ldots, a_m$ полугруппы G функция $f(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m)$ от целых неотритсательных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ является полиномом степени не выше чем k.

Нам понадобится классическая формула Тейлора в конечных разностях для функций на решетке. Со всяким элементом $a \in G$ связано два оператора в пространстве вещественных функций на полугруппе G: оператор сдвига L_a, определенный формулой $L_a f(x) = f(x + a)$, и оператор конечной разности D_a, определенный формулой $D_a f(x) = f(x + a) - f(x)$.

Операторы сдвига и конечной разности связаны соотношением $L_a = D_a + I$, где I — тождественный оператор.

Формула Тейлора в конечных разностях. *Для любых целых неотрицательных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и для всякой функции $f\colon G \to \mathcal{R}$ справедлива следующая формула Тейлора*

$$f(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m) = \sum_{0 \leq k_1 \leq \lambda_1, \ldots, 0 \leq k_m \leq \lambda_m} C_{\lambda_1}^{k_1} \ldots C_{\lambda_m}^{k_m} (D_{a_1}^{k_1} \circ \cdots \circ D_{a_m}^{k_m} f)(y),$$

где $C_{\lambda_i}^{k_i} = \dfrac{\lambda_i(\lambda_i - 1)\dots(\lambda_i - k_i + 1)}{k!}$ *— биномиальный коэффициент,* $C_{\lambda_i}^0 = 1$ *и* $D_{a_i}^0 = I$.

Доказательство.

$$f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m) = (L^{\lambda_1} \circ \dots \circ L^{\lambda_m} a_m f)(0) = \\ ((D_{a_1} + I)^{\lambda_1} \circ \dots \circ (D_{a_m} + I)^{\lambda_m})(0) = \\ \sum C_{\lambda_1}^{k_1} \dots C_{\lambda_m}^{k_m} (D_{a_1}^{k_1} \circ \dots \circ D_{a_m}^{k_m} f)(0).$$

Из формулы Тейлора в конечных разностях вытекает

Следствие. *Функция f является полиномом степени $\le k$, если для любого выбора элементов $a_1, \dots, a_{k+1}$ справедливо равенство*

$$(D_{a_1} \circ \dots \circ D_{a_{k+1}} f)(0) = 0.$$

Скажем, что f — полиномиальная функция степени $\le k$ относительно подполугруппы $G_0 \subseteq G$, содержащей нуль, $0 \in G_0$, если для всякого элемента $a \in G$ ограничение функции $f_a(x) = f(a + x)$ на полугруппу G_0 является на ней полиномом степени $\le k$.

Утверждение. *Пусть f — полиномиальная функция степени $\le k$ относительно подполугруппы G_0. Пусть среди элементов $a_1, \dots, a_m$ не менее чем $(k+1)$ элемент лежит в полугруппе G_0. Тогда*

$$D_{a_1} \circ \dots \circ D_{a_m} f \equiv 0.$$

Доказательство. Занумеруем элементы $a_1, \dots, a_m$ так, чтобы первые $(k+1)$ элемент лежали в полугруппе G_0. Имеем

$$D_{a_1} \circ \dots \circ D_{a_m} f = D_{a_{k+2}} \circ \dots \circ D_{a_m}(D_{a_1} \circ \dots \circ D_{a_{k+1}} f).$$

Функция $D_{a_1} \circ \dots \circ D_{a_{k+1}} f$ в любой точке $a \in G$ обращается в нуль, так как функция $f_a(x) = f(x + a)$ — полином на полугруппе G_0 степени $\le k$.

§7 О полиномиальных мерах на пространстве многогранников

Остановимся на применении основной теоремы. Пусть $G_0 \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная полугруппа по сложению, содержащая точку 0. С полугруппой G_0 связана полугруппа G многогранников относительно сложения в смысле Минковского, состоящая из многогранников, все вершины которых лежат в полугруппе G_0.

Рассмотрим произвольную конечноаддитивную меру μ на булевой алгебре множеств, порожденной многогранниками из полугруппы G. Скажем, что μ — полиномиальная мера степени $\le k$, если для каждого фиксированного многогранника $\Delta \in G$ функция $f_\Delta(x) = \mu(x + \Delta)$ на полугруппе G_0 является полиномом степени $\le k$. Это определение согласуется с определением из §6 полиномиальности функции относительно подполугруппы.

Теорема. *Для всякой полиномиальной меры μ степени $\leq k$ и для любых фиксированных многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_m \in G$ функция $\mu(\lambda_1\Delta_1 + \dots + \lambda_m\Delta_m)$ от целых неотрицательных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ является полиномом степени $\leq n+k$.*

Доказательство. С мерой μ связана функция $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ на полугруппе G, сопоставляющая каждому многограннику $\Delta \in G$ его меру $\mu(\Delta)$. Согласно описанию полиномиальных функций на полугруппе нам достаточно показать, что для любого $(n+k+1)$ многогранника $\Delta_1, \dots, \Delta_{n+k+1} \in G$ справедливо равенство

$$D_{\Delta_1} \circ \dots \circ D_{\Delta_{n+k+1}} \mu(0) = 0.$$

Рассмотрим согласование тавтологических разбиений многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_{n+k+1}$, при котором каждый согласованный набор содержит аффинно независимые грани этих многогранников (см. следствие из §1).

Не менее чем $(k+1)$ грань в каждом согласованном наборе граней $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n+k+1}$ являются вершинами, так как $\dim \Gamma_1 + \dots + \dim \Gamma_{n+k+1} = n$. Другими словами, не менее чем $(k+1)$ из многогранников $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n+k+1}$ являются элементами полугруппы G_0. Согласно утверждению из §6 имеем

$$(D_{\Gamma_1} \circ \dots \circ D_{\Gamma_{n+k+1}} \mu)(0) = 0.$$

Далее, согласно основной теореме справедливо равенство

$$(D_{\Delta_1} \circ \dots \circ D_{\Delta_{n+k+1}} \mu)(0) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{R}_0(\Omega, n+k+1)} (-1)^{\operatorname{codim} \Gamma} (D_{\Gamma_1} \circ \dots \circ D_{\Gamma_{n+k+1}} \mu)(0) = 0.$$

Отсюда вытекает, что мера μ как функция на полугруппе многогранников G является полиномом степени $\leq n+k$ (см. следствие из §6).

Литература

1. Bernstein D. The number of roots of a system of equations. *Functional analyzes and its applications., Moscow* 1975, **9**(3), 1–4.
2. Gelfand I.M., Zelvinskii A., Kapranov M. Discriminants, Resultants, and Multidimansional Determinants *Mathematics: Theory and Applications* Birkhauser, Boston, MA, 1994.
3. Gelfond O., Khovanskii A. Newton polyhedra and Grothendieck residues. *Doklady RAN, Moscow* 1996, **3**(350).
4. Khovanskii A. Algebra and mixed volumes *A Series of geometry (Y. D. Burago and V. A. Zalgaller, eds), Springer-Verlag, Berlin and New York.* 1988, **285**, 182–207.
5. Khovanskii A., Pukhlikov A. Finitely additive measures of virtual polytopes. *Algebra and Analysis.* 1992, **4** (2), 161-185.

6. P. McMullen. Metrical and combinatorial properties of complex polytopes. *Proc.Internat. Congr. Math. (Vancouver, 1974), Vol. 1, Canad. Math. Congr., Montreal*, 1975, 491–495.
7. Viro O.Ya. Real algebraic varieties with prescribed topological properties. (to appear in Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society), Leningr. Univ., Leningrad, 1983.
8. Viro O.Ya. Some integral calculus based on Euler characteristics. *Topology and Geometry, Rokhlin Seminar, Lect. Notes Math.*, vol. 1346, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 127–138.