Функциональный анализ и его приложения
2003, т. 37, вып. 4, с. 74–85

УДК 517.9

Многомерные результаты о непредставимости функций в квадратурах*

© 2003. А. Г. Хованский

Израилю Моисеевичу Гельфанду в связи с его 90-летием

Настоящая статья завершает цикл работ [4–6], посвященных топологическим препятствиям к представимости функций многих переменных в квадратурах. Аналогичные результаты для функции одной переменной были получены в моей кандидатской диссертации [1–3], защищенной в 1973 г. Моим научным руководителем был В. И. Арнольд.

Арнольд нашел топологические доказательства неразрешимости ряда задач [9–16], включая задачу решения алгебраических уравнений в радикалах (ср. [7, 8]), хотя результаты, относящиеся к этой задаче, он приписал Абелю [7].

В [1–3] построен обширный класс бесконечнозначных функций одной переменной, для которых определена группа монодромии. Существует ли достаточно широкий класс ростков бесконечнозначных функций многих переменных (содержащий ростки функций, представимых в обобщенных квадратурах, и ростки целых функций многих переменных и замкнутый относительно естественных операций, таких, как операция суперпозиций), обладающих аналогичным свойством? Долгое время я считал, что ответ на поставленный вопрос отрицателен. В этой статье определяется класс $\mathcal{SC}$-ростков, дающий положительный ответ на этот вопрос. Доказательство использует результаты о продолжаемости многозначных аналитических функций вдоль их множеств ветвления [4].

Основная теорема (см. §5) описывает изменения групп монодромий $\mathcal{SC}$-ростков, которые происходят в результате применения кросткам естественных операций. Она очень близка к соответствующей одномерной теореме [2, 3], но использует также новые результаты аналитического [4] и теоретико-группового [6] характера. Как следствие получаются топологические результаты о неразрешимости уравнений в явном виде, более сильные, чем аналогичные классические теоремы. Довольно подробную библиографию классических работ, содержащую основополагающие работы Лиувилля, Пикара, Вессио и Колчина, можно найти в [17].

Я признателен В. И. Арнольду, который подтолкнул меня к написанию этой статьи, и моей жене Т. В. Белокриницкой, которая помогла мне ее написать.

§1. Функции, представимые в квадратурах, k-квадратурах и обобщенных квадратурах

Задать класс ростков аналитических функций можно следующим образом: фиксировать множество *основных ростков* и список *допустимых операций* над

*Работа выполнена при частичной поддержке Канадского гранта OGP0156833.

ними и определить *класс ростков как совокупность всех ростков, которые получаются из множества основных ростков применением допустимых операций*. Именно таким образом определяются классы ростков функций, представимых в квадратурах, k-квадратурах и обобщенных квадратурах. Напомним соответствующие определения. Фиксируем стандартное пространство $\mathbb{C}^n$ вместе с системой координат $x_1, \dots, x_n$.

Определение 1. *Росток функции φ в точке $a \in \mathbb{C}^n$ выражается через ростки в точке a функций*:

1) f_1 *и* f_2 *при помощи арифметических операций*, если выполняется одно из тождеств $\varphi = f_1 + f_2$, $\varphi = f_1 - f_2$, $\varphi = f_1 f_2$ или $\varphi = f_1/f_2$ (в случае $\varphi = f_1/f_2$ предполагается, что росток f_2 не обращается в тождественный нуль);

2) $f_0, \dots, f_k$ *при помощи операции решения алгебраического уравнения*, если росток функции f_0 не является тождественным нулем и выполняется тождество

$$f_0\varphi^k + f_1\varphi^{k-1} + \dots + f_k = 0;$$

3) $f_1, \dots, f_n$ *при помощи операции интегрирования*, если выполняется тождество $d\varphi = \alpha$, где $\alpha = f_1\,dx_1 + \dots + f_n\,dx_n$ (для заданных ростков функций $f_1, \dots, f_n$ росток функции φ существует, если и только если 1-форма α замкнута; при этом росток функции φ определен с точностью до произвольной аддитивной постоянной);

4) $f_1, \dots, f_n$ *при помощи операции взятия экспоненты интеграла*, если выполняется тождество $d\varphi = \alpha\varphi$, где $\alpha = f_1\,dx_1 + \dots + f_n\,dx_n$ (для заданных ростков функций $f_1, \dots, f_n$ росток функции φ существует, если и только если 1-форма α замкнута; при этом росток функции φ определен с точностью до произвольной мультипликативной постоянной);

5) $f_1, \dots, f_m$ *и росток функции g в точке $b \in \mathbb{C}^m$ при помощи суперпозиции*, если выполняется тождество $\varphi = g(f_1, \dots, f_m)$.

Определение 2. *Класс ростков функций в $\mathbb{C}^n$, представимых в квадратурах*, определяется следующими данными. Основные ростки — ростки постоянных функций (в любой точке пространства $\mathbb{C}^n$). Допустимые операции: арифметические операции, операция интегрирования, операция взятия экспоненты интеграла. *Классы ростков функций в $\mathbb{C}^n$, представимых в k-квадратурах и в обобщенных квадратурах*, определяются точно так же. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить соответственно операцию решения алгебраических уравнений степени не выше k и операцию решения алгебраических уравнений любой степени.

Замечание. Операцию взятия экспоненты интеграла в дальнейшем мы не рассматриваем: ее можно заменить операцией интегрирования и операцией суперпозиции с экспонентой. Но в приведенных выше определениях она важна: эти определения не используют абсолютно неалгебраизуемой операции взятия суперпозиции. Они почти дословно переносятся на случай абстрактных дифференциальных полей, снабженных n коммутирующими операциями дифференцирования $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$, и играют важную роль в дифференциальной теории Галуа. В таком обобщенном виде определения квадратур и обобщенных квадратур для $n = 1$ принадлежат Лиувиллю и для $n > 1$ — Колчину.

Рассмотрим классы ростков функций, представимых в квадратурах, k-квадратурах и обобщенных квадратурах в пространствах $\mathbb{C}^n$ любой размерности $n \geqslant 1$ одновременно. Повторяя рассуждения, проведенные Лиувиллем для одномерного случая, несложно показать, что *эти классы ростков функций замкнуты относительно суперпозиций и содержат ростки рациональных функций от многих переменных и ростки всех основных элементарных функций.* (Основные элементарные функции — это те функции, которые мы проходили в школе и которые часто вносятся в клавиатуры калькуляторов. Вот их список: константы, независимая переменная x, радикалы $\sqrt[n]{x}$, экспонента $\exp x$, логарифм $\ln x$, тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$.)

Замечание. Росток аналитической функции (вообще говоря, многозначной) мы иногда обозначаем той же буквой, что и саму функцию, не уточняя в обозначении, о какой точке и о каком ростке функции в этой точке идет речь, если это ясно из контекста.

§ 2. Формулы, их мультиростки, аналитические продолжения и римановы поверхности

В статье рассматриваются классы ростков аналитических функций, представимых формулами, в которых участвуют описанные выше операции и операция решения системы голономных уравнений (см. § 3). Для каждой такой формулы можно определить мультиросток, содержащий ростки всех функций, фигурирующих в этой формуле (см. § 4).

Можно говорить об аналитическом продолжении мультиростка формулы вдоль кривой (являющемся, в сущности, аналитическим продолжением ростков, фигурирующих в этой формуле, вдоль различных кривых, связанных этой формулой между собой). Можно определить понятие римановой поверхности формулы, говорить об $\mathcal{S}$-свойстве формулы и т. д. Мы подробно обсудим эти определения для случая простейшей формулы $y = f \circ G$. Чтобы не загромождать текст, для более сложных формул аналогичные определения не приводятся. О чем идет речь, ясно из разбираемого ниже примера.

Рассмотрим композицию ростка аналитического отображения G связного аналитического многообразия M в $\mathbb{C}^n$ и ростка аналитической функции $f\colon \mathbb{C}^n \to C$. *Мультиростком формулы* $y = f \circ G$ называется тройка ростков $\{y_b \mid G_b, f_a\}$, где y_b, G_b — ростки в точке $b \in M$ аналитической функции y и аналитического отображения $G\colon (M, b) \to (\mathbb{C}^n, b)$, f_a — росток в точке $a \in \mathbb{C}^n$ аналитической функции f, для которых справедлива формула $y_b = f_a \circ G_b$.

Пусть $\gamma\colon [0,1] \to M$, $\gamma(0) = b$, — параметризованная кривая на многообразии M. Рассмотрим параметризованную кривую $G_{\gamma(t)} \circ \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^n$ в пространстве $\mathbb{C}^n$, переводящую точку t, $1 \leqslant t \leqslant 1$, в точку $G_{\gamma(t)} \circ \gamma(t)$, где $G_{\gamma(t)}$ — результат аналитического продолжения ростка G_b вдоль кривой $\gamma\colon [0,t] \to M$. *Аналитическим продолжением мультиростка* $\{y_{b_1} | G_{b_1}, f_{a_1}\}$ *формулы* $y = f \circ G$ вдоль кривой $\gamma\colon [0,1] \to M$, $\gamma(0) = b_1$, $\gamma(1) = b_2$, называется тройка $\{y_{b_2} | G_{b_2}, f_{a_2}\}$, где y_{b_2} и G_{b_2} — ростки, полученные аналитическим продолжением ростков y_{b_1} и G_{b_1} вдоль кривой γ, и f_{a_2} — росток, полученный аналитическим продолжением ростка f_{a_1} вдоль кривой $G_{\gamma(t)} \circ \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^n$. Очевидно, что эти ростки связаны соотношением $y_{b_2} = f_{a_2} \circ G_{b_2}$.

Скажем, что два мультиростка формулы $y = f \circ G$ эквивалентны, если один мультиросток получается из другого аналитическим продолжением вдоль некоторой кривой. Как множество точек *риманова поверхность* R формулы $y = f \circ G$ — это совокупность всех мультиростков, эквивалентных заданному мультиростку

$\{y_b \,|\, G_b, f_a\}$. Определена *естественная проекция* $\pi\colon R \to M$ римановой поверхности формулы $y = f \circ G$ на многообразие M, сопоставляющая мультиростку $\{y_{b_1} \,|\, G_{b_1}, f_{a_1}\}$ точку $b_1 \in M$. По малой окрестности U точки b_1 на многообразии M можно определить окрестность $\widetilde{U}$ мультиростка $\tilde{b}_1 = \{y_{b_1} \,|\, G_{b_1}, f_{a_1}\}$ на римановой поверхности R. Для этого нужно, чтобы окрестность U лежала в некоторой координатной окрестности точки b_1 на многообразии M, чтобы в области U ряд Тейлора ростка $G_{b_1}\colon M \to \mathbb{C}^n$ сходился к некоторому отображению $\widetilde{G}\colon U \to \mathbb{C}^n$ и чтобы образ $\widetilde{G}(U) \subset \mathbb{C}^n$ окрестности U при отображении $\widetilde{G}$ лежал в области сходимости ряда Тейлора ростка f_{a_1}. Если эти условия выполнены, то окрестность $\widetilde{U}$ мультиростка $\tilde{b}_1$ на римановой поверхности R определяется как множество мультиростков $\{y_{b_2} \,|\, G_{b_2}, f_{a_2}\}$, где $b_2 \in U$, G_{b_2} — росток в точке b_2 отображения $\widetilde{G}$, f_{a_2} — росток в точке $a_2 = \widetilde{G}(b_2)$ функции $\tilde{f}$, равной сумме ряда Тейлора ростка f_{b_1}, и $y_{b_2} = f_{a_2} \circ G_{b_2}$.

Окрестности $\widetilde{U}$ описанного вида задают топологию на римановой поверхности R. В этой топологии естественная проекция $\pi\colon R \to M$ является локальным гомеоморфизмом поверхности R в M. При помощи локального гомеоморфизма π на поверхности R индуцируется структура комплексно-аналитического многообразия, которая по определению существует на многообразии M.

Риманова поверхность R формулы $y = f \circ G$ играет в точности ту же роль, что и риманова поверхность аналитической функции. А именно, мультиросток $\{y^*_{\tilde{b}} \,|\, G^*_{\tilde{b}}, f_a\}$ формулы $y^* = f \circ G^*$, где $G^* = \pi^* G$, однозначно аналитически продолжается на всю риманову поверхность R и риманова поверхность R является максимальным многообразием, для которого это условие выполнено (это значит, что если $\pi_1\colon R_1 \to M$ — другое многообразие R_1 вместе с локальным гомеоморфизмом π_1 в M, для которого верен этот факт, то существует вложение $j\colon R_1 \to R$, коммутирующее с проекциями, т. е. $\pi_1 = \pi \circ j$).

Точка $b_2 \in M$ называется *особой* для мультиростка $\{y_{b_1} \,|\, G_{b_1}, f_{a_1}\}$ формулы $y = f \circ G$, если существует кривая $\gamma\colon [0,1] \to M$, $\gamma(0) = b_1$, $\gamma(1) = b_2$, такая, что мультиросток не может быть регулярно продолжен вдоль этой кривой, но для любого t, $0 \leqslant t < 1$, он регулярно продолжается вдоль укороченной кривой $\gamma\colon [0,t] \to M$. У эквивалентных мультиростков множества особых точек совпадают. Будем говорить, что формула $y = f \circ G$ обладает *$\mathcal{S}$-свойством*, если множество особых точек для любого ее мультиростка является тощим (см. [6]).

Кроме множества особых точек удобно рассматривать и другие множества, вне которых неограничено продолжается мультиросток формулы. Тощее множество A называется *запрещенным множеством* для мультиростка формулы, если мультиросток регулярно продолжается вдоль кривой $\gamma(t)$, $\gamma(0) = a$, пересекающей множество A лишь, может быть, в начальный момент.

Следующая теорема доказывается точно так же, как аналогичная теорема об $\mathcal{S}$-функциях в одномерном случае [2, 3].

Теорема (о запрещенном множестве (ср. [6])). *Тощее множество является запрещенным множеством мультиростка формулы, если и только если оно содержит множество его особых точек. В частности, мультиросток формулы обладает некоторым запрещенным множеством, если и только если формула обладает $\mathcal{S}$-свойством.*

§ 3. Класс $\mathcal{SC}$-ростков, его замкнутость относительно естественных операций

Ключевую роль для дальнейшего играет следующее

Определение 1. Росток f_a аналитической функции f в точке a пространства $\mathbb{C}^n$ является *$\mathcal{SC}$-ростком*, если выполнено следующее условие. Для всякого связного комплексно-аналитического многообразия M, всякого аналитического отображения $G\colon M \to \mathbb{C}^n$ и всякого прообраза b точки a, $G(b) = a$, существует тощее множество $A \subset M$, такое, что для всякой кривой $\gamma\colon [0,1] \to M$, начинающейся в точке b, $\gamma(0) = b$, и пересекающей множество A лишь, может быть, в начальный момент, $\gamma(t) \notin A$ при $t > 0$, росток f_a аналитически продолжается вдоль кривой $G \circ \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^n$.

Другими словами, росток f_a в точке $a \in \mathbb{C}^n$ является $\mathcal{SC}$-ростком, если для всякого аналитического отображения $G\colon M \to \mathbb{C}^n$ и всякой точки $b \in M$, такой, что $G(b) = a$, мультиросток $\{y_b \,|\, G_b, f_a\}$ формулы $y = f \circ G$ обладает $\mathcal{S}$-свойством на многообразии M.

Предложение 1. *Каждый росток $\mathcal{S}$-функции f одной переменной является $\mathcal{SC}$-ростком.*

Доказательство. Если отображение $G\colon M \to \mathbb{C}^1$ постоянно, то функция $f \circ G$ является константой. Если отображение G непостоянно, то в качестве тощего множества A достаточно взять множество $G^{-1}(O)$, где O — множество особенностей функции f.

Предложение 2. *Если $f_1, \dots, f_m$ суть $\mathcal{SC}$-ростки в точке $a \in \mathbb{C}^n$ и g есть $\mathcal{SC}$-росток в точке $(f_1(a), \dots, f_m(a))$ пространства $\mathbb{C}^m$, то $g(f_1, \dots, f_m)$ является $\mathcal{SC}$-ростком в точке a.*

Доказательство. Пусть $G\colon M \to \mathbb{C}^n$ — аналитическое отображение связного комплексного многообразия M в $\mathbb{C}^n$, и пусть $b \in M$ — точка, такая, что $G(b) = a$. Так как ростки $f_1, \dots, f_m$ в точке $a \in \mathbb{C}^n$ являются $\mathcal{SC}$-ростками, то для $i = 1, \dots, m$ существует тощее множество $A_i \in M$, запрещенное для мультиростка формулы $y_i = f_i \circ G$. В качестве запрещенного множества для мультиростка формулы $\mathbf{z} = \mathbf{f} \circ G$, где $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — росток вектор-функции в точке $a \in \mathbb{C}^n$, достаточно взять множество $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$. Обозначим через $\pi\colon R \to M$ естественную проекцию римановой поверхности R формулы $\mathbf{z} = \mathbf{f} \circ G$ и обозначим через $\tilde{b}$ точку римановой поверхности R, соответствующую мультиростку $\{\mathbf{z}_b \,|\, G_b, \mathbf{f}_a\}$. Росток функции g в точке $c = (f_1(a), \dots, f_m(a))$ пространства $\mathbb{C}^m$ является $\mathcal{SC}$-ростком. Поэтому в многообразии R существует тощее множество $B \subset R$, запрещенное для мультиростка $\{w_{\tilde{b}} \,|\, (\mathbf{f} \circ G \circ \pi)_{\tilde{b}}, g_c\}$ формулы $w = g \circ (\mathbf{f} \circ G \circ \pi)$. В качестве запрещенного множества для мультиростка $\{u_b \,|\, (\mathbf{f} \circ G)_b, g_c\}$ формулы $u = g \circ (\mathbf{f} \circ G)$ достаточно взять тощее множество $A \cup \pi(B)$.

Определение 2. Операцию $\aleph$, сопоставляющую ростку аналитической вектор-функции $\mathbf{f}$ в точке $a \in \mathbb{C}^n$ росток аналитической функции $\varphi = \aleph(\mathbf{f})$ в той же точке a, назовем *операцией с контролируемыми особенностями*, если при естественной проекции $\pi\colon R \to M$ римановой поверхности R ростка $\mathbf{f}$ у ростка $\pi^*\varphi$ существует запрещенное замкнутое аналитическое подмножество $A \subset R$ (т.е. росток $\pi^*\varphi$ аналитически продолжается вдоль любой кривой $\gamma\colon [0,1] \to R$, $\gamma(0) = \tilde{a}$, где $\tilde{a}$ — точка на R, соответствующая ростку $\mathbf{f}$, пересекающей множество A лишь, может быть, в начальный момент, $\gamma(t) \notin A$ при $0 < t \leqslant 1$).

Предложение 3. 1) *Для каждого* $i = 1, \dots, n$ *операция дифференцирования, сопоставляющая ростку аналитической функции* f *в точке* $a \in \mathbb{C}^n$ *росток функции* $\partial f / \partial x_i$ *в той же точке, является операцией с контролируемыми особенностями.*

2) *Операция интегрирования, сопоставляющая ростку вектор-функции* $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ *в точке* $a \in \mathbb{C}^n$ *росток в той же точке аналитической функции* φ, *для которого выполнено тождество* $d\varphi = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$, *является операцией с контролируемыми особенностями.*

Доказательство. Если росток функции f (формы $\alpha = f_1\, dx_1 + \dots + f_n\, dx_n$) аналитически продолжается вдоль некоторой кривой в $\mathbb{C}^n$, то вдоль этой же кривой аналитически продолжаются частные производные ростка f (неопределенный интеграл формы α). Поэтому частная производная (неопределенный интеграл) вообще не имеет особенностей на римановой поверхности ростка функции f (ростка вектор-функции $\mathbf{f}$).

Предложение 4. *Операция решения алгебраического уравнения, сопоставляющая ростку вектор-функции* $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_k)$ *в точке* $a \in \mathbb{C}^n$, *где* $f_0 \not\equiv 0$, *росток* y *в той же точке* $a \in \mathbb{C}^n$, *удовлетворяющий уравнению* $f_0 y^k + \dots + f_k = 0$, *является операцией с контролируемыми особенностями.*

Доказательство. Рассмотрим поле K, порожденное ростками $f_0, \dots, f_k$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. По определению росток y удовлетворяет алгебраическому уравнению $f_0 y^k + \dots + f_k = 0$ над полем K, однако это уравнение может оказаться приводимым. Выберем неприводимое уравнение

$$Q_0 y^l + \dots + Q_l = 0 \qquad (*)$$

над полем K, которому удовлетворяет росток y. Можно считать, что коэффициенты $Q_0, \dots, Q_l$ этого уравнения лежат в кольце над полем $\mathbb{C}$, порожденном ростками $f_0, \dots, f_k$ (если это не так, то достаточно умножить коэффициенты этого уравнения на общий знаменатель). Коэффициенты $Q_0, \dots, Q_l$ однозначно продолжаются на риманову поверхность R ростка вектор-функции $\mathbf{f}$.

Обозначим через $D(Q_0, \dots, Q_l)$ дискриминант уравнения $(*)$. Дискриминант не обращается в тождественный нуль на R, так как уравнение $(*)$ неприводимо. Пусть $\Sigma_D \subset R$ — аналитическое множество, на котором дискриминант $D(Q_0, \dots, Q_l)$ обращается в нуль. Пусть $\Sigma_0 \subset R$ — аналитическое множество, на котором коэффициент Q_0 обращается в нуль. В качестве множества Σ достаточно взять множество $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_D$.

Напомним, что система из N линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$L_j(y) = \sum a^j_{i_1,\dots,i_n} \frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} y}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = 0, \qquad j = 1, \dots, N, \qquad (**)$$

на неизвестную функцию y, коэффициенты $a^j_{i_1,\dots,i_n}$ которых — аналитические функции от n комплексных переменных $x_1, \dots, x_n$, называется *голономной*, если пространство ростков ее решений в любой точке пространства $\mathbb{C}^n$ конечномерно.

Определение. *Операцией решения голономной системы уравнений* называется операция, сопоставляющая ростку вектор-функции $\mathbf{a} = (a^j_{i_1,\dots,i_n})$ в точке a, компоненты которой — занумерованные в любом порядке коэффициенты голономной системы уравнений (∗∗), росток y в точке a некоторого решения этой системы.

Предложение 5. *Операция решения голономной системы уравнений является операцией с контролируемыми особенностями.*

Это утверждение вытекает из общих теорем о голономных системах.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{f}$ *— росток аналитической вектор-функции в точке* $a \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_N)$, *компоненты* $f_1, \ldots, f_N$ *которого являются* $\mathcal{SC}$*-ростками. Пусть росток* φ *в точке* $a \in \mathbb{C}^n$ *получается из ростка* $\mathbf{f}$ *применением операции с контролируемыми особенностями. Тогда росток* φ *является* $\mathcal{SC}$*-ростком.*

Доказательство. Пусть $\pi\colon R \to \mathbb{C}^n$ — естественная проекция римановой поверхности R ростка $\mathbf{f}$ и $\tilde{a} \in R$ — отмеченная точка на R, соответствующая этому ростку, $\pi(\tilde{a}) = a$. По определению росток $\pi^*\varphi$ в точке $\tilde{a} \in R$ аналитически продолжается вдоль любой кривой на римановой поверхности R, пересекающей некоторое аналитическое множество $\Sigma \subset R$ лишь, может быть, в начальный момент. Фиксируем стратификацию Уитни пары (R, Σ), замыкание каждого страта которой является замкнутым комплексно-аналитическим множеством. Нас будут интересовать лишь страты, замыкания которых содержат отмеченную точку $\tilde{a}$ на римановой поверхности R. Пусть $\overline{\Sigma_1}$ — замыкание одного из таких стратов Σ_1, а Σ_1^0 — объединение всех стратов, кроме страта Σ_1, лежащих в $\overline{\Sigma_1}$. Согласно результату статьи [4], росток $\pi^*\varphi$ аналитически продолжается вдоль любой кривой $\gamma\colon [0,1] \to \Sigma_1$, $\gamma(0) = \hat{a}$, пересекающей множество Σ_1^0 лишь, может быть, в начальный момент. Отсюда и вытекает теорема.

Действительно, пусть $G\colon M \to \mathbb{C}^n$ — аналитическое отображение связного комплексного многообразия M в $\mathbb{C}^n$, и пусть $b \in M$ — точка, такая, что $G(b) = a$. Так как все компоненты ростка вектор-функции $\mathbf{f}$ являются $\mathcal{SC}$-ростками, то существует тощее множество $A \subset M$, запрещенное для мультиростка $\{\mathbf{y}_b \,|\, G_b, \mathbf{f}_a\}$ формулы $\mathbf{y} = \mathbf{f} \circ G$. Пусть $\pi_1\colon R_1 \to M$ — естественная проекция римановой поверхности R_1 этой формулы и $\tilde{b} \in R_1$ — отмеченная точка на M_1, соответствующая этому ростку. На риманову поверхность R_1 аналитически продолжается росток $\pi^{-1}G\pi_1$ в точке $\tilde{b} \in R_1$ отображения поверхности R_1 в поверхность R, переводящий точку $\tilde{b}$ в точку $\tilde{a}$. Полученное аналитическим продолжением отображение будем обозначать символом $\widetilde{G}\colon R_1 \to R$. Пусть $\overline{\Sigma_1}$ — наименьшее из замыканий стратов стратификации Уитни пары (R, Σ), содержащее образ $\widetilde{G}(R_1)$ многообразия R_1. Пусть Σ_1^0 — объединение всех стратов, кроме страта Σ_1, лежащих в $\overline{\Sigma_1}$. Множество $B \subset R_1$, где $B = \widetilde{G}^{-1}(\Sigma_1^0)$, является собственным аналитическим подмножеством в R_1. Согласно [4], росток φ_a аналитически продолжается вдоль образа $G \circ \pi_1 \circ \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^n$ всякой кривой $\gamma\colon [0,1] \to M_1$, $\gamma(0) = \tilde{b}$, пересекающей множество B лишь, может быть, в начальный момент. Поэтому множество $A \cup \pi_1(B) \subset M$ является запрещенным для мультиростка $\{y_c \,|\, G_c, \varphi_a\}$ формулы $y = \varphi \circ G$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть множество особенностей многозначной аналитической функции в* $\mathbb{C}^n$ *является замкнутым аналитическим множеством. Тогда каждый росток этой функции является* $\mathcal{SC}$*-ростком.*

Доказательство. По определению росток такой функции в точке $a \in \mathbb{C}^n$ можно рассматривать как результат применения операции с контролируемыми особенностями к ростку в точке a вектор-функции $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, компоненты которой — координатные функции.

Теорема 2 (о замкнутости класса $\mathcal{SC}$-ростков). *Класс $\mathcal{SC}$-ростков содержит все ростки $\mathcal{S}$-функций одной переменной и все ростки $\mathcal{S}$-функций многих переменных, имеющих аналитические множества особых точек.*

Класс $\mathcal{SC}$-ростков в $\mathbb{C}^n$ замкнут относительно операции суперпозиции с $\mathcal{SC}$-ростками функции m переменных, операций дифференцирования, интегрирования, решения алгебраических уравнений и решения голономных систем линейных дифференциальных уравнений

Доказательство. Принадлежность ростков $\mathcal{S}$-функций, о которых говорится в теореме 2, классу $\mathcal{SC}$-ростков доказана в предложении 1 и в следствии 1. Замкнутость класса $\mathcal{SC}$-ростков относительно суперпозиций доказана в предложении 2. Замкнутость класса $\mathcal{SC}$-ростков относительно остальных операций вытекает из теоремы 1 в силу предложений 3–5.

Следствие 2. *Если росток функции f можно получить из ростков $\mathcal{S}$-функций, имеющих аналитические множества особенностей, и из ростков $\mathcal{S}$-функций одной переменной с помощью интегрирования, дифференцирования, арифметических операций, суперпозиций, решения алгебраических уравнений и решения голономных систем линейных дифференциальных уравнений, то росток f является $\mathcal{SC}$-ростком. В частности, росток, не являющийся $\mathcal{SC}$-ростком, нельзя представить в обобщенных квадратурах.*

§ 4. Класс мультиростков формул, обладающих $\mathcal{SC}$-свойством

Пусть класс $\mathscr{A}$ ростков аналитических функций задан множеством основных ростков $\mathscr{B}$ и списком допустимых операций $\mathscr{D}$. Пусть список $\mathscr{D}$ содержит лишь операции, перечисленные в § 1, и операцию решения голономных уравнений (см. § 2). По определению каждый росток класса $\mathscr{A}$ выражается через множество основных ростков при помощи формул, содержащих допустимые операции. Приведем индуктивное определение мультиростков формул такого вида.

Мультиросток простейшей *формулы Ω, означающей принадлежность ростка φ множеству основных ростков*, по определению *состоит из ростков φ и g, где g — элемент множества $\mathscr{B}$, и равенства $\varphi = g$*, т. е. $\Omega = \{\varphi \,|\, g \,|\, \varphi = g\}$. Пусть росток φ в точке $a \in \mathbb{C}^n$ выражается через ростки в точке a функций $f_1, \ldots, f_m$ при помощи одной из операций 1)–4) из определения 1 § 1 или при помощи решения системы голономных уравнений. Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ — мультиростки формул, выражающих $f_1, \ldots, f_m$ через множество основных ростков. Тогда *мультиросток формулы, выражающей росток φ, — это набор, состоящий из ростка φ, из мультиростков всех формул $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ и из тождества, соответствующего рассматриваемой операции*. Например, если φ получается из $f_1, \ldots, f_m$ при помощи решения алгебраического уравнения $\varphi^m + f_1\varphi^{m-1} + \cdots + f_m = 0$, то $\Omega = \{\varphi \,|\, \Omega_1, \ldots, \Omega_m \,|\, \varphi^m + f_1\varphi^{m-1} + \cdots + f_m = 0\}$.

Если росток φ в точке $a \in \mathbb{C}^n$ выражается через ростки в точке a функций $f_1, \ldots, f_m$ и через росток в точке $b = (f_1(a), \ldots, f_m(a)) \in \mathbb{C}^m$ функции g при помощи суперпозиции, то мультиросток Ω формулы, выражающей φ, это $\Omega = \{\varphi \,|\, \Omega_1, \ldots, \Omega_m, \Omega_0 \,|\, \varphi = g(f_1, \ldots, f_m)\}$, где Ω_i при $i = 1, \ldots, m$ —

мультиросток формулы для ростка в точке a функции f_i и Ω_0 — мультиросток формулы для ростка в точке b функции g. (Из-за операции суперпозиции мультиростки формул могут содержать ростки функций в разных пространствах.)

Для мультиростка формулы Ω, представляющей росток φ в точке $a \in \mathbb{C}^n$, понятия *аналитического продолжения* и *римановой поверхности* определяются точно так же, как это делалось в §2 для формулы $y = f \circ G$. Отметим, что риманова поверхность R формулы Ω расположена над пространством $\mathbb{C}^n$ (т. е. определена естественная поверхность $\pi\colon R \to \mathbb{C}^n$), хотя в ней могут фигурировать ростки функций разного числа переменных.

Повторяя определение из §3, скажем, что мультиросток Ω формулы, выражающей росток функции φ в точке $a \in \mathbb{C}^n$ через основные ростки, обладает *$\mathcal{SC}$-свойством*, если выполнено следующее условие. Для всякого связного комплексно-аналитического многообразия M, всякого аналитического отображения $G\colon M \to \mathbb{C}^n$ и всякого прообраза b точки a, $G(b) = a$, существует тощее множество $A \subset M$, такое, что для всякой кривой $\gamma\colon [0,1] \to M$, начинающейся в точке b, $\gamma(0) = b$, и пересекающей множество A лишь, может быть, в начальный момент, $\gamma(t) \notin A$ при $t > 0$, мультиросток формулы Ω аналитически продолжается вдоль кривой $G \circ \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^n$.

Теорема. 1) *Пусть класс ростков $\mathscr{A}$ задан множеством $\mathscr{B}$ основных ростков, содержащим лишь $\mathcal{SC}$-ростки, и списком допустимых операций $\mathscr{D}$, содержащим лишь операции, перечисленные в §1, и операцию решения системы голономных уравнений. Тогда для каждого ростка из класса $\mathscr{A}$ любая формула, выражающая этот росток через основные ростки при помощи допустимых операций, обладает $\mathcal{SC}$-свойством.*

2) *Если дополнительно множество $\mathscr{B}$ основных ростков замкнуто относительно операции аналитического продолжения, то для всякого ростка $\varphi_a \in \mathscr{A}$, заданного в точке a пространства $\mathbb{C}^n$, существует запрещенное множество $A \subset \mathbb{C}^n$, такое, что в каждой точке $b \notin A$ каждый росток φ_b, эквивалентный ростку φ_a, тоже принадлежит классу $\mathscr{A}$ (и выражается через основные ростки, в некотором смысле, той же формулой, что и росток φ).*

Доказательство. Для доказательства п. 1) достаточно повторить рассуждения из §3 (заменяя ростки функций на мультиростки формул). Докажем п. 2). Согласно п. 1), мультиросток формулы Ω, выражающей росток φ_a через ростки основных функций, обладает $\mathcal{SC}$-свойством и, в частности, имеет тощее запрещенное множество A. Пусть росток φ_b получается из ростка φ_a аналитическим продолжением вдоль кривой γ. Можно считать, что $\gamma(t)$ не принадлежит множеству A при $0 < t \leqslant 1$ (см. теорему о снятии кривой с тощего множества из [3, 6]). При аналитическом продолжении мультиростка формулы Ω получается мультиросток формулы, выражающей мультиросток φ_b при помощи допустимых операций через основные ростки, так как множество основных ростков замкнуто относительно аналитического продолжения.

В условиях п. 2) теоремы мы имеем следующую альтернативу. Для всякой многозначной аналитической функции φ либо ни один из ее ростков не принадлежит классу $\mathscr{A}$, либо все ее ростки вне некоторого тощего множества принадлежат этому классу (и выражаются через основные ростки «одной и той же» формулой). В первом случае мы будем говорить, что функция φ *не выражается* *через основные ростки при помощи допустимых операций*, во втором — что такое *представление существует*. В частности, определены понятия *представимости многозначной аналитической функции в квадратурах, k-квадратурах и обобщенных квадратурах*.

§5. Топологические препятствия к представимости функций в квадратурах

Фиксируем некоторый непустой I-почти полный класс пар групп IM (см. [6]). Обозначим через $\widehat{IM}$ класс $\mathcal{SC}$-ростков аналитических функций (в точках всех пространств $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, одновременно), монодромная пара которых принадлежит классу пар групп IM.

Основная теорема. *Класс ростков $\widehat{IM}$ содержит $\mathcal{SC}$-ростки всех однозначных функций и замкнут относительно суперпозиций и дифференцирований. Кроме того,*

1) *если класс IM содержит группу $\mathbb{C}$ комплексных чисел по сложению, то класс $\widehat{IM}$ замкнут относительно интегрирований*;

2) *если класс IM содержит группу $S(k)$ перестановок k элементов, то класс $\widehat{IM}$ замкнут относительно решения алгебраических уравнений степени не выше k.*

Доказательство теоремы заключается в анализе изменений монодромных пар ростков функции, которые происходят при перечисленных в теореме операциях. Оно повторяет доказательство аналогичной теоремы про $\mathcal{S}$-функции одной переменной [2, 3]. Поэтому мы ограничимся перечислением отличий этих доказательств. Во-первых, теорема о замкнутости класса $\mathcal{SC}$-ростков (см. §3) сложнее аналогичной одномерной теоремы. Она опирается на результаты статьи [4]. Во-вторых, операция суперпозиции в многомерной ситуации связана с новой операцией над парами групп — с операцией индуцированного замыкания. Этот круг вопросов подробно описан в статье [6].

Результат о квадратурах. *Группа монодромии ростка функции f, представимой в квадратурах, разрешима. Более того, разрешима группа монодромии всякого ростка функции f, представимого через ростки однозначных $\mathcal{S}$-функций, имеющих аналитические множества особых точек, и ростки однозначных $\mathcal{S}$-функций одной переменной при помощи интегрировании, дифференцирований и суперпозиций.*

Результат о k-квадратурах. *Монодромная пара ростка функции f, представимой в k-квадратурах, k-разрешима* (*см.* [6]). *Более того, k-разрешима монодромная пара всякого ростка функции f, представимого через ростки однозначных $\mathcal{S}$-функций, имеющих аналитические множества особых точек, и ростки однозначных $\mathcal{S}$-функций одной переменной при помощи интегрирований, дифференцирований, суперпозиций и решения алгебраических уравнений степени $\leqslant k$.*

Результат об обобщенных квадратурах. *Монодромная пара ростка функции f, представимой в обобщенных квадратурах, почти разрешима* (*см.* [6]). *Более того, почти разрешима монодромная пара всякого ростка функции f,* *представимого через ростки однозначных $\mathcal{S}$-функций, имеющих аналитические множества особых точек, и ростки однозначных $\mathcal{S}$-функций одной переменной при помощи интегрирований, дифференцирований, суперпозиций и решения алгебраических уравнений.*

Доказательство. Перечисленные выше результаты вытекают из основной теоремы, так как упомянутые в них ростки являются $\mathcal{SC}$-ростками (см. §3), а классы пар групп, имеющих соответственно разрешимую, k-разрешимую и почти разрешимую группу монодромии, содержат группу $\mathbb{C}$ по сложению. Два последних класса пар групп, кроме того, содержат соответственно группу $S(k)$ и все группы $S(m)$ при $0 < m < \infty$ (см. [6]).

Колчин обобщил теорию Пикара–Вессио на случай голономных систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Приведем следствия теории Колчина, относящиеся к разрешимости в квадратурах регулярных голономных систем. Как и в одномерном случае, голономная система называется *регулярной*, если при подходе к особому множеству системы и при уходе на бесконечность решения системы растут не более чем степенным образом.

Теорема 1. *Регулярная голономная система решается в квадратурах, k-квадратурах и обобщенных квадратурах, если ее группа монодромии соответственно разрешима, k-разрешима и почти разрешима.*

Из теории Колчина тем самым вытекают следующие два результата.

1) *Если группа монодромии регулярной голономной системы разрешима (k-разрешима, почти разрешима), то эта система решается в квадратурах (k-квадратурах, обобщенных квадратурах).*

2) *Если группа монодромии регулярной голономной системы неразрешима (не k-разрешима, не почти разрешима), то эта система не решается в квадратурах (k-квадратурах, обобщенных квадратурах).*

Наша теорема позволяет усилить отрицательный результат 2).

Теорема 2. *Если группа монодромии голономной системы неразрешима (не k-разрешима, не почти разрешима), то никакой росток почти никакого решения этой системы нельзя выразить через ростки однозначных $\mathcal{S}$-функций, имеющих аналитические множества особых точек, и ростки однозначных $\mathcal{S}$-функций одной переменной при помощи суперпозиций, интегрирований и дифференцирований (и решения алгебраических уравнений степени не выше k, и решения алгебраических уравнений).*

Из теории Галуа легко вытекает следующая

Теорема 3. *Решения алгебраического уравнения $y^m + r_1 y^{m-1} + \dots + r_m = 0$, в котором r_i — рациональные функции n переменных, выражаются при помощи радикалов (при помощи радикалов и решений алгебраических уравнений степени не выше k), если и только если его группа монодромии разрешима (k-разрешима).*

Наша теорема позволяет усилить отрицательные результаты в теореме 3. Справедлив, например, следующий вариант классической теоремы Абеля, который сильнее всех известных результатов в этом направлении.

Теорема 4 (ср. [7, 8]). *При $n \geqslant 5$ никакой росток решения общего алгебраического уравнения $y^n + x_1 y^{n-1} + \dots + x_n = 0$, в котором $x_1, \dots, x_n$ — независимые переменные, нельзя выразить через ростки элементарных функций, ростки однозначных $\mathcal{S}$-функций, имеющих аналитические множества особых* *точек, и ростки однозначных S-функций одной переменной при помощи суперпозиций, интегрирований, дифференцирований и решения алгебраических уравнений степени меньше чем n.*

Литература

1. *Хованский А.* О представимости функций в квадратурах. УМН, **26**, вып. 4, 251–252 (1971).
2. *Хованский А.* О представимости функций в квадратурах. Диссертация. к. ф.-м. н., МИАН, М., 1973.
3. *Khovanskii A.* Topological obstructions for representability of functions by quadratures. J. Dynam. Control Systems, **1**, No. 1, 99–132 (1995).
4. *Хованский А.* О продолжаемости многозначных аналитических функций на аналитическое подмножество. Функц. анализ и его прил., **35**, вып. 1, 62–73 (2001).
5. *Khovanskii A.* A multi-dimensional topological version of Galois theory. In: Proceeding of International Conference “Monodromy in Geometry and Differential Equations,” 25–30 June, Moscow, 2001.
6. *Хованский А.* О монодромии многозначной функции на ее множестве ветвления. Функц. анализ и его прил., **37**, вып. 2, 65–74 (2003).
7. *Алексеев В. Б.* Теорема Абеля в задачах и решениях. МЦНМО, М., 2001.
8. *Хованский А.* О суперпозициях голоморфных функций с радикалами. УМН, **26**, вып. 2, 213–214 (1971).
9. *Арнольд В. И.* Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и проблема топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений. Функц. анализ и его прил., **4**, No. 3, 1–9 (1970).
10. *Арнольд В. И., Олейник О. А.* Топология действительных алгебраических многообразий. Вестник МГУ, сер. 1, матем., механ., **6**, 7–17 (1979).
11. *Арнольд В. И.* Суперпозиции. В кн.: А. Н. Колмогоров, Избранные труды. Математика и механика, Наука, М., 1985, с. 444–451.
12. *Арнольд В. И.* Топологическое доказательство трансцендентности абелевых интегралов в «Математических началах натуральной философии» Ньютона. Историко-математические исследования, **31**, 7–17 (1989).
13. *Arnold V. I., Vassiliev V. A.* Newton’s «Principia» read 300 years later, Notices Amer. Math. Soc., **36**, No. 9, 1148–1154 (1989) [добавление: ibid, **37**, No. 2, 144].
14. *Arnold V. I.* Problémes rèsolubles et problémes irrèsolubles analytiques et gèom‘etriques, Passion des Formes. In: Dynamique Qualitative Sèmiophysique et Intelligibilitè. Dèdiè á R. Thom., Fontenay-St Cloud: ENS Èditions, 1994, pp. 411–417.
15. *Арнольд В. И.* И. Г. Петровский, топологические проблемы Гильберта и современная математика. УМН, **57**, вып. 4 (346), 197–207 (2002).
16. *Арнольд В. И.* О некоторых задачах теории динамических систем. В кн.: Арнольд В. И. Избранное 60, Фазис, М., 1997, с. 533–551 (а также: Topol. Methods Nonlinear Anal., **4**, No. 2, 209–225 (1994)).
17. *Zinger M. F.* Formal solutions of differential equations. J. Symbolic Comput., **10**, 59–94 (1990).

Институт системного анализа РАН

Поступило в редакцию
26 ноября 2002 г.