Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

B. Ya. Kazarnovskii, A. G. Khovanskii, A. I. Èsterov, Newton polytopes and tropical geometry, *Uspekhi Mat. Nauk*, 2021, Volume 76, Issue 1(457), 95–190

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9937

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 99.230.211.27
April 10, 2021, 00:03:02

2021 г. январь — февраль *т. 76, вып. 1 (457)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 512.7+514.17

Многогранники Ньютона и тропическая геометрия

Б. Я. Казарновский, А. Г. Хованский, А. И. Эстеров

Практика совместного использования понятий “многогранники Ньютона”, “торические многообразия”, “тропическая геометрия”, “базисы Грёбнера” привела к формированию устойчивых взаимно полезных связей между алгебраической и выпуклой геометриями. Обзор посвящен современному состоянию области математики, описывающей взаимодействие и применение перечисленных выше понятий.

Библиография: 68 названий.

Ключевые слова: семейство алгебраических многообразий, многогранник Ньютона, кольцо условий, торическое многообразие, тропическая геометрия, смешанный объем, экспоненциальная сумма.

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9937

Содержание

Работа второго автора выполнена при поддержке Канадского гранта № 156833-17. Исследование третьего автора выполнено при поддержке РФФИ (грант № 20-01-00579).

© Б. Я. Казарновский, А. Г. Хованский, А. И. Эстеров, 2021

1. Введение

Этот обзор посвящен современному состоянию и взаимосвязям нескольких областей алгебраической и выпуклой геометрии: теории многогранников Ньютона, геометрии торических многообразий, исчислительной тропической геометрии, а также некоторым вопросам теории нормирований и базисов Грёбнера. Напомним кратко, о чем идет речь.

1.1. Многогранники Ньютона. Пусть V – неприводимое алгебраическое многообразие, точки которого, $\varphi \in V$, параметризуют алгебраическое семейство многообразий N_φ. Тогда простейшие дискретные инварианты N_φ (число компонент, размерность, степень, эйлерова характеристика, род и т.д.) как функции от φ оказываются конструктивными функциями на V (т.е. конечными линейными комбинациями характеристических функций алгебраических подмногообразий V). В частности, каждый такой инвариант принимает одно и то же значение почти на всех членах семейства (т.е. для всех φ из открытого по Зарискому подмножества V). Это значение называется значением данного инварианта для общего элемента семейства.

В частности, во многих ситуациях естественно возникает семейство "полиномов с неопределенными коэффициентами": зафиксируем конечный набор мономов A от переменных $x_1, \dots, x_n$ и рассмотрим пространство $\mathbb{C}^A$ всех линейных комбинаций этих мономов с комплексными коэффициентами. С этими данными связано следующее естественное семейство алгебраических многообразий: пространство параметров $V_A = \mathbb{C}^A \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^A$ – это пространство наборов полиномов $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, составленных из данных мономов, а соответствующий точке φ член семейства – это многообразие $N_\varphi = \{x \mid \varphi_1(x) = \dots = \varphi_k(x) = 0\}$, т. е. множество решений системы уравнений $\varphi = 0$. Таково, например, семейство всех алгебраических гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n$ данной степени. Инварианты общего члена таких семейств – важный объект изучения: например, основная теорема алгебры гласит, что для $n = k = 1$ и $A = \{x^0, x^1, \dots, x^d\}$ общий член семейства V_A состоит из d точек.

Со временем было замечено, что алгебро-геометрические инварианты общего члена семейства V_A естественным образом связаны с геометрическими инвариантами следующего многогранника: отождествляя моном $x^a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ с точкой $a = (a_1, \dots, a_n)$ целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$, рассмотрим данное нам множество мономов A как подмножество $\mathbb{Z}^n$ и определим его многогранник Ньютона как его выпуклую оболочку $\operatorname{conv} A$. Теория многогранников Ньютона изучает инварианты множества решений общей системы уравнений $\varphi = 0$, составленной из данного набора мономов A, в терминах инвариантов многогранника Ньютона $\operatorname{conv} A$.

Начиная с 1970-х годов с этой точки зрения были изучены все ранее упомянутые инварианты [42], [4], [35], [64], [40]. Мы напомним эти результаты в п. 2.2. Более того, полученная связь между алгебраической и выпуклой геометриями оказалась полезной не только для первой, но и для второй: например, с ее помощью были получены алгебро-геометрические доказательства и обобщения таких фундаментальных фактов выпуклой геометрии, как гипотеза о верхней границе (upper bound conjecture) [57], [58] и неравенство Александрова–Фенхеля [61], [36].

Так как многогранник Ньютона полинома (т. е. выпуклая оболочка его мономов) оказывается важным инвариантом полинома, естественно возникает задача вычисления этого многогранника для различных "универсальных" полиномов – в первую очередь результантов и дискриминантов. Эта задача была решена в работах [21] и [59], мы напомним ответ в п. 3.3 и последующих.

1.2. Торические многообразия. Для геометрического изучения объектов любой природы (непрерывных, гладких, аналитических, алгебраических) оказывается важным понятие многообразия, т. е. результата склейки аффинных карт посредством отображений склейки с соответствующим свойством регулярности (непрерывных, гладких, аналитических, полиномиальных). В частности, для теории многогранников Ньютона, где основополагающий класс функций – мономы, оказывается полезным рассмотрение многообразий, у которых отображения склейки переводят мономы в мономы, т. е. сами записываются в координатах мономами. Такие многообразия называются торическими – это те и только те многообразия, которые допускают действие комплексного тора $T = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n = (\mathbb{C}^*)^n$, обладающее всюду плотной орбитой. Мы напомним определение и структуру торических многообразий в п. 2.3.

1.3. Тропическая геометрия. Множество вещественных чисел, дополненное элементом $-\infty$, образует полуполе относительно аддитивной операции $\max$ и мультипликативной операции $+$. Это полуполе называется тропическим и обозначается $\mathbb{T}$. Над ним можно развивать алгебраическую геометрию, называемую тропической. Тропическая алгебраическая геометрия оказалась важна тем, что, с одной стороны, ее объекты имеют чисто комбинаторную природу (это кусочно линейные множества и функции), но, с другой стороны, ответы на многие вопросы оказываются в этой геометрии такими же, как в “настоящей”. Таким образом, сам факт такого совпадения может давать комбинаторный ответ на сложные вопросы алгебраической геометрии. Каждый такой факт называется “тропической теоремой соответствия”.

Первая теорема соответствия, продемонстрировавшая практическую важность тропической алгебраической геометрии, – теорема Михалкина о совпадении инвариантов Громова–Виттена комплексной и тропической плоскостей: число комплексных алгебраических кривых данного рода и степени, проходящих через данный набор точек общего положения на комплексной проективной плоскости, равно аналогичной величине для тропических объектов (если ее правильно определить). Мы напомним этот сюжет в п. 3.2.

Доказательство фактов такого рода основано на том, что каждому алгебраическому многообразию соответствует тропическое – его тропикализация. Это соответствие имеет сложную природу и может рассматриваться и формализоваться с разных точек зрения:

– геометрическая тропикализация, тесно связанная с понятиями неархимедовой амебы, конуса Бергмана и универсального базиса Грёбнера;

– аналитификация алгебраического многообразия в смысле Берковича;

– переход к фундаментальному классу многообразия в кольце условий.

Мы напомним первую конструкцию в разделах 4 и 5, не будем касаться второй и более подробно остановимся на третьей в разделах 4 и 6, так как она, насколько нам известно, хуже других освещена в литературе.

1.4. Кольцо условий. Если U и V – подмногообразия дополнительной размерности в комплексном торе $T = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$, то почти для всех элементов $g \in T$ сдвиг gU пересекает V по одному и тому же числу точек. Это число называется индексом пересечения U и V и обозначается $U \circ V$. Два подмногообразия равной размерности называются численно эквивалентными, если они имеют один и тот же индекс пересечения с любым многообразием дополнительной размерности. Назовем k-циклом в комплексном торе T формальную линейную комбинацию с целыми коэффициентами конечного числа подмногообразий коразмерности k. Фактор пространства k-циклов по отношению численной эквивалентности обозначим через C_k, тогда прямая сумма пространств $\bigoplus\limits_k C_k$ обладает естественной структурой кольца относительно операции формального сложения k-циклов и следующей операции произведения-пересечения: произведением классов подмногообразий $U, V \subset T$ назовем класс подмногообразия $gU \cap V$ для сдвига на элемент $g \in T$ общего положения.

Это определение было впервые введено в работе [11] для некоторых других симметрических пространств и впоследствии обобщено на произвольные сферические многообразия – в частности, на произвольные редуктивные группы, в том числе на комплексный тор. Оно основано на том нетривиальном факте, что класс подмногообразия $gU \cap V$ не зависит от выбора элемента $g \in T$ общего положения. Для однородных пространств с действием нередуктивной группы это, вообще говоря, не так. Например, если заменить тор T аддитивной группой $\mathbb{C}^3$, то в пространстве C_1 классы прямых будут равны только для параллельных прямых, поэтому для плоскости $U = \{y = 0\}$ и гиперболического параболоида $V = \{xy = z\}$ пересечение $gU \cap V$ будет прямой $y = g_2$, $g_2 x = z$, класс которой в C_1 непрерывно зависит от выбора сдвига g_2.

В разделе 7 мы продемонстрируем, что для некоторого естественного класса аналитических подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ все же удается построить аналог кольца условий. Но в связи с обсуждением тропической геометрии и многогранников Ньютона нам будет важно в первую очередь кольцо условий C комплексного тора $T = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Оно будет играть для нас роль, аналогичную роли кольца когомологий: зная фундаментальные классы подмногообразий в когомологиях компактного многообразия, можно вычислить их индекс пересечения с помощью операции умножения в этом кольце. То же верно для фундаментальных классов подмногообразий тора T в кольце условий. Более того, в п. 4.3 мы покажем, что у подмногообразий комплексного тора существуют характеристические классы, принимающие значения в кольце условий.

Наиболее широко используемый способ развивать теорию пересечений на топологическом или алгебраическом многообразии состоит в рассмотрении его кольца когомологий или кольца Чжоу. Но для многих важных некомпактных многообразий (в частности, однородных пространств) эти кольца слишком бедны, что приходится исправлять переходом к подходящей компактификации данного пространства. Важной альтернативой этому подходу для однородных пространств является рассмотрение их колец условий. Кольца условий обобщают исчисление Шуберта на широкий класс некомпактных однородных пространств. Мы в основном используем подход, связанный с использованием кольца условий тора $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. В п. 4.1.5 мы, для полноты картины, напоминаем определение кольца Чжоу алгебраического многообразия.

1.5. Тропикализация многообразий тора. Оказывается, что для кольца условий C имеется тропическое соответствие: если правильно повторить его определение над тропическим полуполем $\mathbb{T}$, полученное кольцо $\mathbb{T}C$ комбинаторно-геометрической природы (называемое кольцом тропических вееров) окажется естественно изоморфным C.

Кольцо $\mathbb{T}C$ имеет чисто комбинаторное определение: k-мерный тропический веер – это объединение k-мерных полиэдральных конусов, снабженных целочисленными весами, удовлетворяющими некоторому условия сбалансированности (см. п. 4.2.2). Поэтому естественный изоморфизм между C и $\mathbb{T}C$ доставляет комбинаторную модель кольца условий C комплексного тора (важно заметить, что для колец условий произвольных редуктивных групп удовлетворительные комбинаторные модели пока не построены).

Таким образом, фундаментальному классу k-мерного подмногообразия $V \subset T$ в кольце условий C естественно соответствует элемент кольца $\mathbb{T}C$ – k-мерный тропический веер, называемый тропикализацией V.

1.6. Тропические компактификации. Чтобы вычислить тропический веер данного k-мерного многообразия V, достаточно построить его тропическую компактификацию – торическую компактификацию, в которой замыкание V собственно пересекает все орбиты (напомним, что пересечение многообразий U и V называется собственным, если $\operatorname{codim}(U \cap V) = \operatorname{codim} U + \operatorname{codim} V$). Оказывается, что торическое многообразие, соответствующее вееру Σ, дает тропическую компактификацию V тогда и только тогда, когда тропический веер V является частью k-мерного остова веера Σ.

В частности, каждый конус Γ тропического веера многообразия V соответствует некоторой орбите O коразмерности k в тропической компактификации. Оказывается, что вес конуса Γ в тропическом веере – это индекс пересечения замыкания V с O (корректно определенный в силу собственности пересечений с орбитами).

В частности, если V – гиперповерхность, задаваемая уравнением $\varphi = 0$, то знание ее тропикализации эквивалентно знанию многогранника Ньютона N полинома φ, поскольку ее тропическая компактификация дается торическим многообразием, соответствующим многограннику N. Тропический веер данной гиперповерхности – множество всех внешних нормалей к ребрам N, причем конусу всех внешних нормалей к ребру E приписан вес, равный целочисленной длине E. В этом смысле понятие тропикализации обобщает понятие многогранника Ньютона с гиперповерхностей на произвольные подмногообразия комплексного тора.

1.7. Конус Бергмана, универсальный базис Грёбнера, неархимедовы нормирования. Если алгебраическое подмногообразие V комплексного тора $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ задано системой уравнений, то существуют чисто алгебраические способы описать тропическую компактификацию и тропический веер подмногообразия V в терминах задающей его системы уравнений, точнее – порожденного ею идеала I. Необходимая техника была известна задолго до появления тропической алгебраической геометрии.

С одной стороны, каждый вектор $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{Q}^n$ определяет нормирование кольца полиномов Лорана n переменных (приписывающее переменной x_i вес v_i), и тропический веер многообразия V (как множество, без учета весов) состоит из всех нормирований $v \in \mathbb{Q}^n$, для которых главная часть $\operatorname{in}_v I$ идеала I нетривиальна. Близкий объект – конус Бергмана – изучался задолго до создания тропической алгебраической геометрии. Напомним, что для каждого нормирования существует так называемый базис Грёбнера – конечная система порождающих f_i идеала I такая, что их главные части $\operatorname{in} f_i$ порождают $\operatorname{in}_v I$. Оказывается, что существует и универсальный базис Грёбнера – конечная система порождающих, являющаяся базисом Грёбнера одновременно для всех нормирований. Именно поэтому конус Бергмана действительно является кусочно линейным множеством.

С другой стороны, если расширить поле скаляров с $\mathbb{C}$ до поля рядов Пюизо S, то точке $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in (S \setminus \{0\})^n$ многообразия V над новым полем (т. е. ростку аналитической кривой $\varphi \colon U \to V$, где $U \subset \mathbb{C}$ – малая проколотая окрестность нуля) соответствует нормирование $v \in \mathbb{Q}^n$, значение которого на полиноме Лорана f равно порядку нуля (или полюса) композиции $f \circ \varphi$ в нуле. Тропический веер V (как множество точек, без учета весов) состоит из нормирований всех точек V над полем рядов Пюизо. Поэтому он также называется неархимедовой амебой из-за очевидной аналогии с определением классической амебы.

Оба упомянутых подхода к алгебраическому вычислению тропикализации данного подмногообразия детально обсуждаются в разделе 5.

1.8. Связи с вещественной алгебраической геометрией. С теорией многогранников Ньютона тесно связана конструкция патчворкинга Виро, нашедшая важные приложения в вопросах, связанных с шестнадцатой проблемой Гильберта (см., в частности, [65] и [26]). Эту конструкцию также можно формулировать на языке тропической геометрии, а носитель тропического веера комплексного алгебраического многообразия V может быть представлен как предел множества (амеба $V)/t$ при $t \to \infty$ (см., например, [9]).

Первые ключевые приложения тропической алгебраической геометрии были связаны именно с применением идей патчворкинга к новым вопросам вещественной алгебраической геометрии, в частности к исследованию инвариантов Вельшенже [47] и задаче Хорна об эрмитовых матрицах [56]. Эти сюжеты мы освещать не будем, так как они находятся несколько в стороне от основных тем нашего обзора.

2. Многогранники Ньютона и торические многообразия

2.1. Смешанный объем. Пусть V – вещественное n-мерное векторное пространство с фиксированной формой объема μ. В работе [49] Г. Минковский ввел следующие понятия.

Определение 2.1.1. Суммой Минковского выпуклых тел $A, B \subset V$ называется выпуклое тело

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Смешанным объемом называется функция

$$\mathrm{MV} \colon \{\text{наборы } n \text{ выпуклых тел в } V\} \to \mathbb{R},$$

которая симметрична и линейна по всем n аргументам и удовлетворяет равенству $\mathrm{MV}_\mu(A, \ldots, A) = n!\, \mathrm{Vol}_\mu A$ для каждого выпуклого $A \subset V$.

Когда форма объема ясна из контекста, она будет опускаться в обозначении смешанного объема. Существование смешанного объема и приведенные ниже утверждения о нем доказаны, например, в [17] и [51]. Единственность вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 2.1.2. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{MV}(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} (-1)^{n-k} \operatorname{Vol}(A_{i_1} + \cdots + A_{i_k}).$$

Смешанный объем монотонен по каждому аргументу.

Утверждение 2.1.3. *Если* $B \subset C$, *то*

$$\mathrm{MV}(B, A_2, \ldots, A_n) \leqslant \mathrm{MV}(C, A_2, \ldots, A_n).$$

Пример 2.1.4. Если A и B – горизонтальный и вертикальный единичные отрезки в $\mathbb{R}^2$ со стандартной формой объема, то

$$A + B = [0,1] \times [0,1] \quad \text{и} \quad \mathrm{MV}(A, B) = 1.$$

Смешанный объем неотрицателен, причем все тела с нулевым смешанным объемом легко описать.

Определение 2.1.5. Коразмерностью набора тел $A_1, \ldots, A_m$ называется минимум величин $k - \dim(A_{i_1} + \cdots + A_{i_k})$ по всем подмножествам $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant m$.

В этом определении допускается пустое множество, так что коразмерность всегда неположительна.

Утверждение 2.1.6. *Смешанный объем набора тел равен нулю тогда и только тогда, когда коразмерность набора отрицательная.*

Смешанный объем мультипликативен в следующем смысле.

Утверждение 2.1.7. *Если* $A_1, \ldots, A_k$ *помещаются параллельными переносами в* k*-мерное подпространство* $U \subset V$, *то*

$$\mathrm{MV}_\mu(A_1, \ldots, A_n) = \mathrm{MV}_{\mu'}(A_1, \ldots, A_k)\, \mathrm{MV}_{\mu''}(\pi A_{k+1}, \ldots, \pi A_n),$$

где $\pi\colon V \to V/U$ *– естественная проекция и* $\mu'' = \mu/\mu'$.

Здесь смешанный объем тел $A_1, \ldots, A_k$ как подмножеств U определен корректно, поскольку смешанный объем инвариантен относительно параллельных переносов слагаемых. Важнейшим аналитическим результатом о смешанных объемах является неравенство Александрова–Фенхеля (см. [2]).

Утверждение 2.1.8. *Для любых* A_i, B, C *выполнено неравенство*

$$\mathrm{MV}(B, B, A_3, \ldots, A_n)\, \mathrm{MV}(C, C, A_3, \ldots, A_n) \leqslant \mathrm{MV}(B, C, A_3, \ldots, A_n)^2.$$

Классификация случаев равенства в этом неравенстве остается открытой проблемой.

Для приложений к алгебраической геометрии важен целочисленный смешанный объем. Пусть L – решетка и $V = L \otimes \mathbb{R}$ – векторное пространство размерности n; через $\operatorname{Vol} B$ обозначим объем измеримого множества $B \subset V$ относительно целочисленной формы объема (по которой объем тора V/L равен 1).

Подпространство $U \subset V$ называется рациональным, если $\dim U = \dim(U \cap L)$. Говоря об объемах в рациональном подпространстве U или факторе V/U, мы всегда будем иметь в виду целочисленную форму объема относительно решетки $U \cap L$ или $L/(U \cap L)$ соответственно.

Многогранник в V будем называть целочисленным, если он является пересечением конечного числа полупространств с рациональными границами, у которого все вершины содержатся в L. Целочисленным смешанным объемом в V будем называть смешанный объем, ассоциированный с целочисленной формой объема.

Утверждение 2.1.9. *Целочисленный смешанный объем целочисленных многогранников является целым числом.*

Это следует, например, из следующей явной формулы для смешанного объема, где $I(A)$ обозначает число точек решетки в многограннике A.

Утверждение 2.1.10. *Для ограниченных целочисленных многогранников* $A_1, \dots, A_n$ *верно равенство*

$$\mathrm{MV}(A_1, \dots, A_n) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n,\, 1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} (-1)^{n-k} I(A_{i_1} + \dots + A_{i_k}),$$

где предполагается, что $I(\varnothing) = 1$.

Следующая формула полезна для вычисления смешанного объема многогранников.

Определение 2.1.11. Опорной функцией замкнутого множества $A \subset V$ называется непрерывная функция $A(\cdot)\colon V^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, задаваемая равенством $A(\gamma) = \sup_{a \in A} \gamma(a)$. Опорной гранью для $\gamma \in V^*$ называется подмножество $A^\gamma \subset A$, на котором линейная функция γ достигает максимума: $A^\gamma = \{a \in A \mid \gamma(a) = A(\gamma)\}$.

Заметим, что для многогранников опорная функция кусочно линейна и каждая грань является опорной для некоторого γ, а для конечного множества A грани – это в точности пересечения A с гранями выпуклой оболочки A.

Утверждение 2.1.12. *Для любого ограниченного выпуклого тела* A_1 *и любых ограниченных целочисленных многогранников* $A_2, \dots, A_n$ *выполнено равенство*

$$\mathrm{MV}(A_1, \dots, A_n) = \sum_{\textit{примитивные } \gamma \in L^*} A_1(\gamma)\, \mathrm{MV}(A_2^\gamma, \dots, A_n^\gamma).$$

Заметим, что в правой части $(n-1)$-мерный целочисленный смешанный объем имеет смысл, так как грани $A_2^\gamma, \dots, A_n^\gamma$ помещаются параллельными переносами в $(n-1)$-мерное рациональное подпространство $\ker \gamma$, а сумма имеет смысл, так как равны нулю все слагаемые, кроме конечного числа (отличны от нуля слагаемые, соответствующие функциям γ, опорным к гиперграням суммы $A_1 + \dots + A_n$). Например, при $A_1 = \dots = A_n = A \ni 0$ эта формула превращается в формулу для вычисления объема A посредством его разбиения на пирамиды с вершинами в начале координат и гипергранями A в качестве оснований с последующим вычислением объема каждой из пирамид как одной n-й произведения объема основания на высоту:

$$\operatorname{Vol} A = \sum_{\text{примитивные } \gamma \in L^*} A(\gamma) \operatorname{Vol} A^{\gamma}.$$

Пример 2.1.13. Смешанный объем стандартного куба $[0,1]^3$ и двух копий стандартного симплекса в $\mathbb{R}^3$, очевидно, равен 3 по вышеуказанной формуле: единственное ненулевое слагаемое соответствует $\gamma = (1,1,1)$.

Для связей с алгебраической геометрией важны также кообъемы.

Определение 2.1.14 [14], [15]. Для выпуклого конуса $C \subset V$ (т. е. такого выпуклого множества, что $\mathbb{R}_+ \cdot C = C$) выпуклые тела $B \subset C$, такие что $C \setminus B$ ограничено, образуют полугруппу P_C по сложению Минковского и объем разности $C \setminus B$ называется кообъемом $\operatorname{coVol} B$. Смешанный кообъем – это единственная симметричная полилинейная функция $\mathrm{MV}_C \colon \underbrace{P_C \times \dots \times P_C}_{n} \to \mathbb{R}$ такая, что $\mathrm{MV}_C(B, \dots, B) = n! \operatorname{coVol} B$ для каждого $B \in P_C$.

Заметим, что определение содержательно, только если конус C имеет полную размерность n и является строго выпуклым (т. е. не содержит прямой). Более общее определение для произвольных C дано в указанных в определении 2.1.14 работах.

Для кообъемов верно следующее обращение неравенства Александрова–Фенхеля ([41], см. также [18] в специальном случае, связанном с гиперболической геометрией).

Теорема 2.1.15. *Для любых $A_i, B, B' \in P_C$ выполнено неравенство*

$$\mathrm{MV}_C(B, B, A_3, \dots, A_n)\, \mathrm{MV}_C(B', B', A_3, \dots, A_n) \geqslant \mathrm{MV}_C(B, B', A_3, \dots, A_n)^2.$$

Смешанные кообъемы многогранников можно вычислять аналогично объемам.

Утверждение 2.1.16. *Для целочисленных многогранников $A_1, \dots . A_n \in P_C$ выполнено равенство*

$$\mathrm{MV}_C(A_1, \dots, A_n) = \sum_{\textit{примитивные } \gamma \in C^* \cap L^*} A_1(\gamma)\, \mathrm{MV}(A_2^{\gamma}, \dots, A_n^{\gamma}),$$

где $C^* = \left\{ \gamma \mid \gamma\big|_C > 0 \right\} \subset V^*$ – открытый двойственный к C конус.

2.2. Многогранники Ньютона. Будем интерпретировать точки решетки $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ как мономы $x^a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$. Для конечного множества мономов $A \subset \mathbb{Z}^n$ рассмотрим пространство всех линейных комбинаций этих мономов: $\mathbb{C}^A = \left\{ \sum_{a \in A} c_a x^a \;\middle|\; c_a \in \mathbb{C} \right\}$. Полином Лорана $\varphi \in \mathbb{C}^A$ будем рассматривать как функцию $\varphi \colon (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \to \mathbb{C}$ (заметим, что она, вообще говоря, не определена на координатных плоскостях $x_i = 0$, поскольку a_i может быть отрицательным для некоторых $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$). *Ограничением* полинома $\varphi(x) = \sum\limits_{a \in A} c_a x^a$ на подмножество $B \subset \mathbb{R}^n$ называется полином $\varphi(x)|_B = \sum\limits_{a \in A \cap B} c_a x^a$.

Теорема 2.2.1 (формула Кушниренко–Бернштейна [4]). *Для конечных множеств $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$ и полиномов $\varphi_i \in \mathbb{C}^{A_i}$ общего положения число решений $x \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ системы $\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0$ с учетом кратностей равно целочисленному смешанному объему выпуклых оболочек множеств $A_1, \ldots, A_n$. Достаточным условием общего положения является следующее: для каждой ненулевой линейной функции $\gamma \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ система $\varphi_1(x)|_{A_1^\gamma} = \cdots = \varphi_n(x)|_{A_n^\gamma} = 0$ не имеет решений в $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$.*

Пример 2.2.2. Известный частный случай этой теоремы – теорема Безу о том, что общие полиномы n переменных степеней $d_1, \ldots, d_n$ имеют $d_1 \cdots d_n$ решений.

Замечание 2.2.3. (i) Под общим положением в формулировке теоремы 2.2.1 понимается существование открытого по Зарискому подмножества $U \subset \bigoplus\limits_i \mathbb{C}^{A_i}$, для каждого элемента $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ которого выполняется заявленное равенство. В частности, указанное в формулировке явное условие на систему уравнений является условием общего положения.

(ii) Теорема 2.2.1 иллюстрирует важность следующего понятия: грани выпуклых многогранников (или выпуклых оболочек конечных множеств) $A_i \subset \mathbb{R}^n$ называются *совместимыми*, если их можно представить как (выпуклые оболочки) A_i^γ для некоторой линейной функции $\gamma \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Эквивалентное определение для ограниченных многогранников: грани называются совместимыми, если их сумма Минковского является гранью суммы $\sum\limits_i A_i$. (Для неограниченных многогранников такая переформулировка невозможна.)

(iii) Число решений с кратностями можно понимать как размерность фактора $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]/\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ над $\mathbb{C}$ (соответственно отсутствие решений понимается как тривиальность этого фактора). В такой форме теорема 2.2.1 верна над любым алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

(iv) Традиционно теорема 2.2.1 формулируется несколько по-другому: выпуклая оболочка всех мономов, входящих в полином φ_i, называется его *многогранником Ньютона*, и утверждается, что для полиномов общего положения с данными многогранниками Ньютона число их общих корней в $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ равно смешанному объему многогранников Ньютона. В этом случае полиномы $\varphi_i(x)|_{A_i^\gamma}$, фигурирующие в условии общего положения, оказываются просто старшими ненулевыми однородными компонентами полиномов φ_i в смысле квазистепени, приписывающей моному x^a вес $\gamma(a)$. Заметим, однако, что традиционная формулировка слабее приведенной выше: в приложениях бывает важно применять теорему к таким $\varphi_i \in \mathbb{C}^{A_i}$, для которых выпуклая оболочка A_i строго больше многогранника Ньютона (это не всегда противоречит указанному в формулировке теоремы условию общего положения).

Для множеств $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через формальное произведение $A_1 \cdots A_n$ смешанный объем выпуклых оболочек этих множеств. Значением степенного ряда $f(y) = \sum_{a \in \mathbb{Z}_+^k} c_a y^a$ на наборе конечных множеств $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ назовем число

$$\sum_{a_1 + \dots + a_k = n} c_a A_1^{a_1} \cdots A_k^{a_k}.$$

Теорема 2.2.4 [35]. *Для конечных множеств $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{Z}^n$ и полиномов $\varphi_i \in \mathbb{C}^{A_i}$ общего положения эйлерова характеристика множества решений $x \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ системы $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_k(x) = 0$ равна $\dfrac{A_1 \cdots A_k}{(1 + A_1) \cdots (1 + A_k)}$. Достаточным условием общего положения является следующее: для каждой линейной функции $\gamma \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ нуль является регулярным значением отображения $(\varphi_1|_{A_1^\gamma}, \dots, \varphi_k|_{A_k^\gamma}) \colon (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \to \mathbb{C}^k$.*

Замечание 2.2.5. Выражение $\dfrac{A_1 \cdots A_k}{(1 + A_1) \cdots (1 + A_k)}$, дающее ответ, представляет собой значение на $A_1, \dots, A_k$ степенного ряда, в который разлагается в нуле рациональная функция $\dfrac{s_1 \cdots s_k}{(1 + s_1) \cdots (1 + s_k)}$. Для нульмерных полных пересечений ($k = n$) утверждение превращается в формулу Кушниренко–Бернштейна без кратных корней. Для кривых ($k = n - 1$) эйлерова характеристика равна $-\operatorname{MV}(A_1, \dots, A_{n-1}, A_1 + \dots + A_{n-1})$, для гиперповерхностей ($k = 1$) она равна $(-1)^{n-1} n! \operatorname{Vol} A_1$.

Аналогичный факт известен и для ростков аналитических функций. Пусть $I \subset \{1, \dots, n\}$; координатное подпространство $\{x_i = 0$ при $i \notin I\}$ обозначим через $\mathbb{R}^I \subset \mathbb{R}^n$, положительный октант $\{x_i \geqslant 0$ при $i \in I$ и $x_i = 0$ при $i \notin I\}$ – через $\mathbb{R}_+^I$, для каждого $B \subset \mathbb{R}^n$ пересечение $B \cap \mathbb{R}^I$ – через B^I, а $|I|$-мерный целочисленный смешанный кообъем $\operatorname{MV}_{\mathbb{R}_+^I}(B_1^I, \dots, B_{|I|}^I)$ – через $B_1^I \cdots B_{|I|}^I$.

Определение 2.2.6. Многогранником Ньютона $\mathscr{N}_f$ ростка $f \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ назовем выпуклую оболочку объединения множеств $a + \mathbb{R}_+^n$ по всем $a \in \mathbb{Z}^n$, для которых моном x^a входит в f с ненулевым коэффициентом. Назовем $\mathscr{N}_f$ удобным, если он имеет общую точку с каждой из координатных осей. Диаграммой Ньютона Δ_f назовем объединение ограниченных граней многогранника Ньютона $\mathscr{N}_f$, а главной частью f – ограничение $f\big|_{\Delta_f}$. Для каждой линейной функции $\gamma \in (\mathbb{R}_+^n)^*$ обозначим через f^γ первую ненулевую однородную в смысле квазистепени $\deg x^a = \gamma(a)$ компоненту ряда f (заметим, что она зависит только от главной части f).

Теорема 2.2.7. *Пусть ростки аналитических функций*

$$(f_1, \dots, f_k) \colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$$

имеют удобные многогранники Ньютона $A_1, \dots, A_k$, а их главные части удовлетворяют следующему условию общего положения: нуль является регулярным значением полиномиального отображения $(f_1^\gamma, \dots, f_k^\gamma) \colon (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \to \mathbb{C}^k$ для каждого $\gamma \in (\mathbb{R}_+^n)^*$. Тогда уравнения $f_1 = \dots = f_k = 0$ задают изолированную особенность полного пересечения в нуле, а ее число Милнора равно

$(-1)^{n-k} \sum\limits_{I \subset \{1,\dots,n\}} \dfrac{A_1^I \cdots A_k^I}{(1+A_1^I)\cdots(1+A_k^I)}$, *где слагаемое, соответствующее* $I = \varnothing$, *по определению считается равным* 1.

Для случая $k = n$ и без привлечения понятия смешанного кообъема эквивалентная формула была получена в книге [1].

Теорема 2.2.7 обобщается на ζ-функцию монодромии ростка f_1 на многообразии $f_2 = \cdots = f_k = 0$. Чтобы сформулировать это обобщение, для многогранников $A_1, \dots, A_k \in P_{\mathbb{R}_+^k}$ определим выражение

$$t^{A_1} \cdot A_2 \cdots A_k = \sum_{\text{примитивные } \gamma \in \mathbb{Z}_+^n} \mathrm{MV}(A_2^\gamma, \dots, A_n^\gamma) \log\bigl(1 - t^{A_1(\gamma)}\bigr).$$

Заметим, что согласно утверждению 2.1.16 экспонента этого выражения является полиномом степени $A_1 \cdots A_k$. Аналогичный смысл придается обозначению $t^{A_1} \cdot \varphi(A_2, \dots, A_k)$, где φ – произвольный степенной ряд.

Теорема 2.2.8 ([64] для $k = 1$ и [50]). *В условиях предыдущей теоремы логарифм характеристического полинома монодромии когомологий слоя Милнора* f_1 *на полном пересечении* $f_2 = \cdots = f_k = 0$ *равен*

$$(-1)^{n-k} \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} \frac{t^{A_1^I} \cdot A_2^I \cdots A_k^I}{(1+A_1^I)\cdots(1+A_k^I)},$$

где слагаемое, соответствующее $I = \varnothing$, *по определению считается равным* $\log(1-t)$.

2.3. Торические многообразия и многогранники.

2.3.1. *Мотивационный пример.* В [34] было обнаружено, что торические многообразия помогают доказывать утверждения из п. 2.2 выше, так как дают гладкие компактификации и разрешения изучаемых там объектов общего положения.

Приведем модельный пример: пусть $f = \sum\limits_{a \in N} c_a x^a$ – общий полином Лорана двух переменных с многоугольником Ньютона $N \subset \mathbb{Q}^2$. Поставим задачу построить гладкую компактификацию кривой $C = \{f = 0\} \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$. Оказывается, что простейшая компактификация, а именно замыкание C в $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2 \subset \mathbb{CP}^2$, будет гладкой лишь для немногих N.

Для построения гладкой компактификации обозначим через $\mathbb{CP}^N$ проективное пространство, в котором стандартные координаты y_a занумерованы целыми точками $a \in N$, и рассмотрим вложение $j \colon (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2 \to \mathbb{CP}^N$, переводящее $x \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ в точку с однородными координатами $y_a = x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$. Оказывается, что если коэффициенты f находятся в общем положении (в смысле замечания 2.2.3), то замыкание образа кривой C при вложении j будет гладким.

Эта компактификация кривой C называется торической, а замыкание образа комплексного тора $j\bigl((\mathbb{C} \setminus \{0\})^2\bigr) \subset \mathbb{CP}^N$ – торическим многообразием X_N.

Отождествляя тор $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$ с его образом $j\big((\mathbb{C}\setminus\{0\})^2\big)\subset X_N$, можно рассматривать X_N как компактификацию тора $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$. После этого про объемлющее пространство $\mathbb{CP}^N$ можно забыть и определять торическую компактификацию кривой C как замыкание этой кривой в торическом многообразии $X_N\supset(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2\supset C$.

Часть из сделанных выше утверждений требуют легкой корректировки при переходе от двумерного случая к многомерному: в частности, бывают трехмерные многогранники N, для которых или j не вложение, или замыкание $j(C)$ не гладкое. Такая корректировка будет естественно вытекать из сведений о торических многообразиях, которые мы кратко напомним ниже.

2.3.2. *Понятие торического многообразия.* Торическим многообразием называется (неприводимое) n-мерное алгебраическое многообразие X с действием комплексного тора $T\simeq(\mathbb{C}\setminus\{0\})^n$, одна из орбит которого плотна (по Зарискому) в X. Часто в определение включают предположение о нормальности X, однако мы этого делать не будем.

Торические многообразия (X_1,T_1) и (X_2,T_2) называются изоморфными, если существует пара изоморфизмов $X_1\to X_2$ и $T_1\to T_2$, согласованная с действиями T_i на X_i. Торические многообразия (X_1,T) и (X_2,T) называются канонически изоморфными, если существует изоморфизм $X_1\to X_2$, согласованный с действиями T на X_i.

Ниже мы явно конструируем некоторое проективное торическое многообразие X_A, соответствующее произвольному конечному множеству $A\subset\mathbb{Z}^n$, и далее некоторое нормальное торическое многообразие X_Σ, соответствующее произвольному вееру Σ (веер – кусочно линейный комбинаторный объект, определяемый ниже).

Важность этих конструкций состоит в их универсальности: любое проективное (или нормальное) торическое многообразие изоморфно X_A для подходящего A (соответственно X_Σ для подходящего Σ).

Замечание 2.3.1. Важно отличать задачу описания классов изоморфизма торических многообразий (ответ полностью описан ниже) от существенно более тонкой задачи описания группы абстрактных автоморфизмов торического многообразия и ее орбит (под абстрактными мы понимаем автоморфизмы алгебраического многообразия, на которые не наложено условие согласованности с действием тора), а также от открытых задач о диффеоморфизмах торических многообразий (в частности, об их когомологической жесткости). Эти активно развивающиеся области исследований требуют отдельных обзоров и здесь не затрагиваются.

2.3.3. *Проективное торическое многообразие X_A.* Для конечного множества A обозначим через $\mathbb{CP}^A$ стандартное $(|A|-1)$-мерное проективное пространство, однородные координаты y_a в котором занумерованы элементами $a\in A$. Подмножеству $B\subset A$ соответствуют координатное подпространство $\mathbb{CP}^B=\{y_a=0 \text{ при } a\notin B\}\subset\mathbb{CP}^A$ и содержащийся в нем стандартный комплексный тор $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^B=\{y_a\neq0 \text{ при } a\in B \text{ и } y_a=0 \text{ при } a\notin B\}$.

Пусть L – решетка характеров n-мерного комплексного тора T. Если зафиксировать систему координат $T\simeq(\mathbb{C}\setminus\{0\})^n$ и соответствующие координаты $L\simeq\mathbb{Z}^n$, то значение характера $a\in L$ в точке $x\in T$ будет мономом

$x^a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$, поэтому в отсутствие координат также будем обозначать это значение через x^a.

Определение 2.3.2. Торическим многообразием X_A, соответствующим конечному подмножеству $A \subset L$, называется замыкание в $\mathbb{CP}^A$ образа гомоморфизма $j_A\colon T \to (\mathbb{C} \setminus \{0\})^A$, переводящего $x \in T$ в точку с однородными координатами $y_a = x^a$, $a \in A$. Действие тора T на X_A определяется как композиция гомоморфизма $j_A\colon T \to (\mathbb{C} \setminus \{0\})^A$ и стандартного действия $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^A \subset \mathbb{CP}^A$ на $\mathbb{CP}^A$ покоординатным умножением.

Ядро $\ker_A$ отображения j_A, равное по построению $\{x \mid x^a = x^b$ для всех $a, b \in A\}$, может быть нетривиальным: это случится тогда и только тогда, когда A помещается параллельным переносом в собственную подрешетку решетки L. В частности, плотная орбита X_A, равная $j_A(T) = X_A \cap (\mathbb{C} \setminus \{0\})^A$, отождествляется с фактором $T/\ker_A$, поэтому размерность X_A равна размерности выпуклой оболочки A.

Заметим, однако, что торическое многообразие X_A не меняется при параллельных переносах множества A (т. е. $X_A = X_{A+a}$ для любого $a \in L$) и при замене объемлющей решетки (т. е. $X_A = X_B$, если $B \subset L'$ – образ A при вложении решеток $L \subset L'$). Поэтому любое проективное торическое многообразие можно представить как многообразие X_A для такого A, которое не помещается параллельным переносом ни в какую собственную подрешетку решетки L.

Замечание 2.3.3. (i) В связи с вышеизложенным мы всегда можем и будем предполагать без ограничения общности, что A не помещается параллельным переносом в собственную подрешетку L. В этом случае $\ker_A$ тривиально, $\dim X_A = \dim L$ и тор T отождествляется с плотной орбитой многообразия X_A.

(ii) В качестве множества A часто выбирают множество целых точек целочисленного многогранника P. Важно, однако, помнить, что в размерностях $n \geqslant 3$ существуют многогранники $P \subset \mathbb{Z}^n$, для которых множество целых точек $P \cap \mathbb{Z}^n$ не удовлетворяет предположению п. (i). Простейший пример – тетраэдр Рива, не имеющий целых точек кроме вершин $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,k)$, $k > 1$.

(iii) Многогранник, множество целых точек которого не помещается параллельным переносом в собственную подрешетку, называется порождающим (spanning) или приведенным (reduced). Аналогично п. (i), в дальнейшем мы рассматриваем только приведенные многогранники.

2.3.4. *Предельные точки кривых в X_A.* Так как X_A компактно, для любого ростка аналитической кривой $\varphi\colon (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \to T$ ее предел $\lim_{t \to 0} j_A(\varphi(t))$ содержится в X_A. Обратно, любая точка X_A представляется как такой предел – аналогично представлению бесконечно удаленных точек проективного пространства связками проходящих через них параллельных прямых. Чтобы сделать эту полезную аналогию полной, выясним, какому из координатных торов $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^B$ проективного пространства $\mathbb{CP}^A = \bigsqcup_{B \subset A} (\mathbb{C} \setminus \{0\})^B$ принадлежит вышеуказанный предел.

Решетка L^*, двойственная к решетке характеров тора T, называется решеткой однопараметрических подгрупп. Действительно, каждой точке l решетки L^* соответствует однопараметрическая подгруппа $\psi\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to T$, однозначно определяемая равенством $\psi(t)^a = t^{l(a)}$ для каждого $a \in L$. Если выбрать координаты $T \simeq (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ и $L^* \simeq \mathbb{Z}^n$, то $\psi(t) = t^l = (t^{l_1}, \dots, t^{l_n})$ – кривая Веронезе, поэтому в отсутствие координат также будем обозначать эту однопараметрическую подгруппу через t^l. Ниже для однопараметрической подгруппы t^l, рассматриваемой при малых значениях параметра t, мы используем термин *полуоднопараметрическая*.

Любой росток аналитической кривой $\varphi\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to T$ во введенных обозначениях представляется в виде

$$\varphi(t) = \frac{\tilde{\varphi}(t)}{t^l}\,,$$

где $\tilde{\varphi}(0) \in T$ уже корректно определено, а деление производится в смысле групповой операции на T. Действительно, если выбрать координаты $T \simeq (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ и $L^* \simeq \mathbb{Z}^n$, то координаты l_i ковектора l нужно положить равными степеням ведущих мономов в разложениях Лорана компонент $\varphi_i(t)$ кривой $\varphi(t)$, т. е. $l = \deg \varphi$. Поэтому и в отсутствие координат будем обозначать l через $\deg \varphi$.

Используя обозначения определения 2.1.11 для опорной грани A^l и опорной функции $A(l)$, однородные координаты y_a искомой предельной точки

$$\lim_{t \to 0} j_A(\varphi(t)) = \lim_{t \to 0} j_A\left(\frac{\tilde{\varphi}(t)}{t^l}\right)$$

после одновременного домножения на $t^{A(l)}$ можно записать следующим образом:

$$y_a = \lim_{t \to 0} t^{A(l) - l(a)} \tilde{\varphi}(t)^a = \begin{cases} \tilde{\varphi}(0)^a, & \text{если } l(a) = A(l), \\ 0, & \text{если } l(a) < A(l). \end{cases} \tag{2.1}$$

Следствие 1. Предельная точка любого ростка аналитической кривой $\varphi\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to T$ принадлежит координатному тору $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^{A^{\deg \varphi}} \subset \mathbb{CP}^A$. Более того, так как по валюативному критерию полноты любая точка в X_A представляется как предел ростка аналитической кривой $\varphi\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to T$, координатные торы $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^B$ для остальных подмножеств $B \subset A$ не содержат точек торического многообразия X_A.

Следствие 2. Каждая точка X_A представляется как предел сдвинутой полуоднопараметрической c/t^l, $c \in T$, $l \in L^*$. При этом две сдвинутые полуоднопараметрические c/t^l и $c'/t^{l'}$ стремятся к одной и той же точке тогда и только тогда, когда

$$A^l = A^{l'} \quad \text{и} \quad \frac{c}{c'} \in \ker_{A^l}\,.$$

Это позволяет представлять точки торического многообразия X_A как классы сдвинутых полуоднопараметрических по указанному отношению эквивалентности – аналогично представлению точек проективного пространства связками прямых.

2.3.5. *Разбиение X_A на орбиты.* Орбиты X_A по построению являются пересечениями X_A с орбитами стандартного действия $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^A$ на $\mathbb{CP}^A$, т. е. комплексными торами $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^B$. Однако, согласно приведенным выше следствиям формулы (2.1), такое пересечение $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^B \cap X_A$ не пусто, только если B является *гранью* A, т. е. пересечением A с некоторой гранью своей выпуклой оболочки. Таким образом, многообразие X_A распадается на орбиты $T_B = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^B \cap X_A = j_B(T) \simeq T/\ker_B$ по всем граням $B \subset A$, причем

$\dim T_B = \dim B$. Заметим также, что это соответствие между гранями A и орбитами X_A сохраняет примыкания, а замыкание орбиты T_B в X_A естественно отождествляется с торическим многообразием X_B.

2.3.6. *Покрытие X_A картами.* Обозначим через $M_a \simeq \mathbb{C}^{|A|-1}$ аффинную карту в $\mathbb{CP}^A$, заданную условием $y_a \neq 0$. Многообразие X_A покрывается картами $X_A \cap M_a$, $a \in A$, которые по построению являются аффинными многообразиями и будут обозначаться X_{A_a}.

Карта X_{A_a} покрывает все орбиты T_B, соответствующие граням $B \subset A$, содержащим a. В частности, многообразие X_A полностью покрывается картами X_{A_a}, которые соответствуют вершинам $a \in A$ (т. е. вершинам выпуклой оболочки A).

На карте M_a имеются стандартные координаты $z_b = y_b/y_a$, $b \in A$, $b \neq a$. В них аффинное многообразие X_{A_a} определяется как замыкание образа отображения $j_{A,a}\colon T \to M_a$, переводящего $x \in T$ в точку с координатами $z_b = x^{b-a}$. В частности, ограничения полиномов от переменных z_b на X_{A_a} дают полиномы Лорана вида $\sum\limits_{a' \in A_a} c_{a'} x^{a'}$, где $A_a \in L$ – полугруппа, порожденная разностями $b - a$, $b \in A$. (Здесь и далее мы следуем договоренности, что все полугруппы содержат нуль.)

Иными словами, кольцо регулярных функций на аффинном многообразии X_{A_a} зависит не от всего множества A, а только от полугруппы A_a и является ее полугрупповой алгеброй $\mathbb{C}[A_a]$. Напомним, что аффинное многообразие полностью восстанавливается по кольцу регулярных функций на нем: $X_{A_a} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[A_a]$. В частности, если полугруппы A_a и B_b изоморфны, то аффинные торические многообразия X_{A_a} и X_{B_b} также изоморфны. Это мотивирует обозначение X_{A_a} и следующее определение.

Определение 2.3.4. Аффинное торическое многообразие X_S, соответствующее конечно порожденной полугруппе $S \subset L$ с нулем, – это многообразие $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[S]$ с действием тора $T = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[L]$, индуцированным вложением $\mathbb{C}[S] \subset \mathbb{C}[L]$.

Более элементарно, X_S – это замыкание образа отображения $j_B\colon T \to \mathbb{C}^B$, переводящего $x \in T$ в точку с координатами $z_b = x^b$, $b \in B$, где B – произвольная конечная система образующих полугруппы S. (Независимость от выбора образующих следует из совпадения с первым определением; действие тора на X_S определяется композицией вложения $j_B\colon T \to (\mathbb{C} \setminus \{0\})^B$ и стандартного действия $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^B$ на $\mathbb{C}^B$ покоординатным умножением.)

Замечание 2.3.5. Аналогично замечанию 2.3.3, мы всюду в дальнейшем можем и будем предполагать без ограничения общности, что полугруппа S порождает объемлющую решетку $\mathbb{Z}^n$. Также, говоря о полугруппе, мы всегда будем предполагать, что она конечно порождена и содержит нуль.

В частности, таковы полугруппы A_a для всех $a \in A$ в силу замечания 2.3.3.

Пример 2.3.6. Заметим, что аффинное торическое многообразие X_S изоморфно $\mathbb{C}^n = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ тогда и только тогда, когда полугруппа S свободна, т. е. изоморфна $\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid a_i \geqslant 0\}$.

Для множества $A \subset \mathbb{Z}^n$ и точки $a \in A$ полугруппа A_a свободна тогда и только тогда, когда

1) a является вершиной P – выпуклой оболочки A;

2) ближайшие к a целые точки a_i на примыкающих ребрах P содержатся в A;

3) векторы $a_i - a$ образуют базис решетки.

Замечание 2.3.7. Мерой негладкости алгебраического многообразия в данной точке является его кратность. По формуле Кушниренко кратность аффинного проективного многообразия X_S в точке 0 равна целочисленному объему разности выпуклых оболочек S и $S \setminus \{0\}$.

Пример 2.3.8. Из определений легко заключить, что полугрупповое кольцо $\mathbb{C}[S]$ целозамкнуто тогда и только тогда, когда полугруппа $S \subset \mathbb{Z}^n$ содержит все целые точки своей выпуклой оболочки. Мы называем такую полугруппу целозамкнутой и заключаем, что аффинное торическое многообразие $X_S = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[S]$ нормально тогда и только тогда, когда полугруппа S целозамкнута.

2.3.7. *Гладкость и нормальность проективного торического многообразия* X_A. Согласно предшествующему примеру, если полугруппы A_a для всех вершин $a \in A$ свободны, то многообразие X_A покрывается гладкими картами X_{A_a}. Из этого следует часть "если" следующего утверждения.

Утверждение 2.3.9. *Многообразие X_A гладко, если и только если полугруппы A_a для всех вершин $a \in A$ свободны.*

Часть "только если" не столь нам важна, но также напрямую выводится из определений. Это утверждение мотивирует следующие определения.

Определение 2.3.10. 1) n-мерный многогранник называется простым, если к каждой его вершине примыкают n ребер.

2) Простой целочисленный n-мерный многогранник называется целочисленно простым или (преимущественно в симплектическом контексте) многогранником Дельзанта, если для каждой вершины векторы, исходящие из нее в ближайшие целые точки примыкающих ребер, образуют базис решетки $\mathbb{Z}^n$.

3) Конечное множество $A \subset \mathbb{Z}^n$ называется целочисленно простым, если его выпуклая оболочка целочисленно проста и внутри каждого ее ребра целые точки, ближайшие к концам, содержатся в A.

Замечание 2.3.11. (i) Согласно примеру 2.3.6 предыдущее утверждение можно сформулировать так: многообразие X_A гладко, если и только если множество $A \subset \mathbb{Z}^n$ целочисленно просто.

(ii) Напомним, что согласно замечанию 2.3.3 мы всюду предполагаем, что A не помещается параллельным переносом в собственную подрешетку. В отсутствие этого предположения утверждение п. (i) неверно: например, если A – тетраэдр Рива (см. замечание 2.3.3), то A не целочисленно просто, но X_A гладко (это просто проективное пространство).

Аналогично гладкости, переходом к аффинным картам получается критерий нормальности торического многообразия.

Определение 2.3.12. Назовем множество $A \subset \mathbb{Z}^n$ целозамкнутым, если полугруппы A_a для всех вершин (и, следовательно, всех точек) $a \in A$ целозамкнуты (см. пример 2.3.8). Назовем целозамкнутым целочисленный многогранник, если целозамкнуто множество его целых точек.

Утверждение 2.3.13. *X_A нормально, если и только если A целозамкнуто.*

2.4. Торические многообразия и вееры.

2.4.1. *Изоморфность торических многообразий и вееры.* Покрытие торического многообразия картами показывает, что для изоморфности нормальных многообразий X_A и X_B вовсе не требуется равенство $A = B$. Требуется намного более слабое условие – равенство их двойственных вееров в нижеследующем смысле.

Под *конусом* в $\mathbb{Q}^n$ будем понимать множество линейных комбинаций с положительными коэффициентами данного конечного набора векторов. Заметим, что чаще конус определяют как замкнутое множество (т. е. множество линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами), но в этом пункте нам удобнее называть конусами относительно открытые множества (т. е. открытые в топологии своей линейной оболочки).

Под *гранью* будем понимать пересечение замыкания конуса с границей содержащего его полупространства. Будем называть конус *строго выпуклым* (или *заостренным*), если его минимальная грань – точка (т. е. если конус не содержит прямую). *Веером* называется такой набор строго выпуклых конусов, в котором вместе с каждым конусом содержатся его грани, а пересечение замыканий каждой пары конусов является их общей гранью. Веер называется *полным*, если объемлющее пространство является объединением его конусов.

Определение 2.4.1. Для многогранника или конечного множества A в $\mathbb{Q}$-векторном пространстве V двойственным конусом к данной грани $B \subset A$ называется множество всех внешних нормалей к B, т. е. таких линейных функций $l \in V^*$, ограничение которых на A достигает максимума в точности на точках подмножества B (т. е. таких l, для которых $B = A^l$ – опорная грань). Двойственным веером A называется множество всех конусов, двойственных к граням A.

Если двойственный веер A' является подразбиением двойственного веера A, а торические многообразия $X_{A'}$ и X_A нормальны, то отождествление их плотных орбит, каждая из которых канонически изоморфна тору T, продолжается до отображения $\pi_{A',A}\colon X_{A'} \to X_A$.

Действительно, для каждой грани $B' \subset A'$ существует единственная грань $B \subset A$, двойственный конус которой содержит двойственный конус B'. Нормальность X_A согласно утверждению 2.3.13 дает $\ker_{B'} \subset \ker_B$. Поэтому $\pi_{A',A}$ можно определить на орбите $T_{B'} = T/\ker_{B'}$ как отображение факторизации в $T_B = T/\ker_B$.

Из существования отображений $\pi_{A',A}$ и $\pi_{A,A'}$ следует, что нормальные торические многообразия X_A и $X_{A'}$ изоморфны, если двойственные вееры A и A'

изоморфны (т. е. переводятся друг в друга изоморфизмом объемлющих пространств). Это подразумевает, что торическое многообразие X_A можно восстановить по двойственному вееру Σ_A множества A, даже не зная само это множество.

Наша цель – описать конструкцию такого восстановления. Мы сперва дадим общее определение, а потом расшифруем его на более элементарном и явном координатном языке для наиболее важного случая гладких многообразий.

2.4.2. *Торическое многообразие, соответствующее вееру.*

Определение 2.4.2. Пусть пространство V наделено решеткой L и Σ – веер в V^*. Для каждого конуса $C \in \Sigma$ определим двойственную полугруппу $C^\times$ как пересечение двойственного конуса с L. Примыкание $C' \subset C$ дает вложение групповых алгебр $j_{C',C}\colon \mathbb{Z}[C'] \subset \mathbb{Z}[C]$. Склеив аффинные торические многообразия $X_{C^\times} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[C^\times]$, $C \in \Sigma$, по отображениям, индуцированным вложениями $j_{C',C}$, получим многообразие, которое будем обозначать через X_Σ. Так как отображения склейки согласованы с действиями тора T на аффинных картах, действие тора определено и на всем многообразии X_Σ. Будем называть его торическим многообразием, соответствующим вееру Σ.

Замечание 2.4.3. (i) В случае, когда веер Σ порожден одним полномерным конусом C (т. е. состоит из всех его граней), торическое многообразие X_Σ совпадает с аффинным $X_{C^\times}$.

(ii) В случае, когда максимальные конусы веера порождены базисами решетки (и только в этом случае), многообразие X_Σ получается гладким. В этом случае определение превращается в построение X_Σ склейкой из нескольких карт, изоморфных $\mathbb{C}^n$, посредством мономиальных отображений склейки, закодированных в веере. Ниже (см. п. 2.4.3) мы явно описываем эту конструкцию в координатах.

(iii) В случае двойственного веера $\Sigma = \Sigma_A$ целозамкнутого множества A в решетке характеров тора T мы дословно повторили конструкцию покрытия аффинными картами нормального торического многообразия X_A.

Даже если A не целозамкнуто, вложение тора T в торические многообразия X_A и X_{Σ_A} продолжается до отображения $X_{\Sigma_A} \to X_A$, являющегося нормализацией X_A.

Даже если X_A не нормально, отображение нормализации часто бывает взаимно однозначным. А именно, для этого необходимо и достаточно, чтобы разности точек любой грани $B \subset A$ порождали насыщенную подрешетку в L.

(iv) Для произвольных вееров описанная конструкция устанавливает взаимно однозначное соответствие между нормальными торическими многообразиями (т. е. обладающими действием тора с всюду плотной орбитой) и рациональными веерами. Это соответствие переводит компактные многообразия в полные вееры, проективные многообразия – в выпуклые, или когерентные, вееры (т. е. двойственные многогранникам), а гладкие многообразия – в гладкие, или неособые, вееры (т. е. такие, в которых полномерные конусы порождены базисами решетки). Выпуклые вееры также часто называются нормальными, но мы не будем использовать этот термин: данное свойство веера не связано с нормальностью соответствующего торического многообразия, что может вызвать путаницу в контексте алгебраической геометрии.

(v) Не все вееры выпуклы: простейший пример дается полным веером, в котором двумерные конусы порождены отрезками из множества

$$\{\text{полный граф на вершинах } A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2\} \setminus \{A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2\},$$

где $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ – треугольная призма с центром в $0 \in \mathbb{R}^3$. Но если веер выпуклый, то существуют двойственные ему многогранники, множество целых точек которых целозамкнуто. Например, для любого многогранника P целозамкнуто множество целых точек его гомотетии $\widetilde{P} = (\dim P + 1) \cdot P$. Это, в частности, означает, что нормальное торическое многообразие X_Σ, соответствующее выпуклому вееру Σ, допускает реализацию в виде проективного торического многообразия X_A, соответствующего целозамкнутому множеству целых точек A.

(vi) Для выпуклого веера неособость равносильна тому, что любой (или, эквивалентно, некоторый) двойственный ему многогранник является целочисленно простым. Это, в частности, означает, что гладкое торическое многообразие X_Σ, соответствующее гладкому выпуклому вееру Σ, допускает реализацию в виде проективного торического многообразия X_A, соответствующего множеству целых точек A некоторого целочисленно простого многогранника.

(vii) По построению, орбиты многообразия X_Σ находятся во взаимно однозначном соответствии с конусами Σ. Орбита, соответствующая конусу $C \in \Sigma$, обозначается через T_C и естественно изоморфна фактору $T/\{t^l,\ l \in C\}$.

(viii) Если веер Σ' подразбивает Σ, то существует естественное отображение $\pi_{\Sigma',\Sigma}\colon X_{\Sigma'} \to X_\Sigma$, которое для каждого конуса $C' \in \Sigma'$, содержащегося в конусе $C \in \Sigma$, отображает орбиту $T_{C'} = T/\{t^l,\ l \in C'\}$ в орбиту $T_C = T/\{t^l,\ l \in C\}$ посредством факторизации по $\{t^l,\ l \in C\}$.

2.4.3. *Склейка гладкого торического многообразия по вееру.* В случае, когда каждый максимальный конус C веера Σ порожден некоторым базисом решетки v_C (и только в этом случае), многообразие X_Σ получается гладким. В этом случае его определение превращается в построение X_Σ склейкой из нескольких карт, изоморфных $\mathbb{C}^n$ и занумерованных максимальными конусами C, посредством мономиальных отображений склейки, закодированных в матрицах перехода между базисами v_C. Опишем эту конструкцию явно.

Базисы $v = (v_1, \ldots, v_n)$ решетки однопараметрических подгрупп L^* тора T взаимно однозначно соответствуют мономиальным параметризациям тора $h_v\colon (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \to T$, а именно $h_v(t_1, \ldots, t_n) = t_1^{v_1} \cdots t_n^{v_n}$, где $t = (t_1, \ldots, t_n)$ – стандартные координаты на $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. В частности, если даны два базиса v и $\widetilde{v}$, они отождествляют тор T с двумя копиями стандартного тора $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$, координаты на которых будем обозначать t и $\widetilde{t}$ соответственно.

Выразим координаты $\widetilde{t}$ через t в терминах матрицы перехода, $v^\top = \mathcal{C} \cdot \widetilde{v}^\top$. Выражение будет мономиальным: если c^i и c_i – строки и столбцы матрицы $\mathcal{C}$ соответственно, то в T имеем равенство точек

$$\widetilde{t}_1^{\widetilde{v}_1} \cdots \widetilde{t}_n^{\widetilde{v}_n} = t_1^{v_1} \cdots t_n^{v_n} = t_1^{c^1 \cdot \widetilde{v}^\top} \cdots t_n^{c^n \cdot \widetilde{v}^\top} = (t^{c_1})^{\widetilde{v}_1} \cdots (t^{c_n})^{\widetilde{v}_n},$$

т. е., в координатах,

$$\widetilde{t}_i = t^{c_i}. \tag{2.2}$$

Это отображение $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^n_t \to (\mathbb{C}\setminus\{0\})^n_{\widetilde{t}}$ имеет следующие важные свойства.

(a) *Продолжение*: если первые k векторов базиса v содержатся в конусе, порожденном базисом $\widetilde{v}$, то отображение $g_{v,\widetilde{v}}$, заданное формулой (2.2), корректно определено на множестве $\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}\setminus\{0\})^{n-k}$ (а не только на его подмножестве $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^n$). Это следует из того, что первые k строк матрицы перехода $\mathcal{C}$ состоят из неотрицательных чисел.

(b) *Обратимость*: если, более того, первые k векторов базиса v совпадают с первыми векторами базиса $\widetilde{v}$, то отображение $g_{v,\widetilde{v}}$ определяет взаимно однозначное соответствие $\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}\setminus\{0\})^{n-k} \to \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}\setminus\{0\})^{n-k}$. Действительно, $g_{\widetilde{v},v}$ является корректно определенным обратным отображением.

(c) *Отделимость*: если, более того, конусы, порожденные базисами v и $\widetilde{v}$, пересекаются в точности по общей грани, порожденной $v_1,\ldots,v_k$, то склейка двух экземпляров $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}\setminus\{0\})^{n-k}$ по отображению $g_{v,\widetilde{v}}$ имеет отделимую топологию. Действительно, если бы две точки, не отождествляемые отображением $g_{v,\widetilde{v}}$, не были отделимы, то по валюативному критерию полноты они являлись бы пределами ростка одной и той же кривой $\gamma\colon \mathbb{C} \to T$ (точнее, ее прообразов при параметризациях $h_v, h_{\widetilde{v}}\colon (\mathbb{C}\setminus\{0\})^n \to T$). А значит, однопараметрическая $\deg\gamma$, асимптотически приближающая кривую $\gamma \in L^*$ (см. с. 110), лежала бы в конусах, порожденных обоими базисами, но не в их общей грани. Это противоречит сделанным предположениям.

Свойства отображений $g_{v,\widetilde{v}}$ позволяют склеить по ним из гладких карт торическое многообразие, соответствующее неособому вееру Σ в L^* (т. е. такому, у которого каждый полномерный конус C порожден некоторым базисом решетки v_C). А именно, для каждого конуса C возьмем карту $M_C = \mathbb{C}^n$ и склеим эти карты по отображениям склейки $g_{v_C,v_{\widetilde{C}}}\colon M_C \to M_{\widetilde{C}}$. Действие тора T на каждой из карт продолжается до действия на всем получившемся многообразии X_Σ.

Получившееся действие обладает всюду плотной орбитой, тождественной тору T, и введенные выше параметризации тора $h_{v_C}\colon (\mathbb{C}\setminus\{0\})^n \to T$ продолжаются до отображений карт $M_C \to X_\Sigma$, образующих атлас.

Все гладкие торические многообразия получаются этой конструкцией.

2.5. Торические разрешения и компактификации. Рассмотрим алгебраическое подмножество комплексного тора $V \subset T$, т. е. подмножество, задаваемое полиномиальными уравнениями $\varphi_1 = \cdots = \varphi_k = 0$. Согласно мотивации в п. 2.3.1, мы стремимся найти такое торическое многообразие $X_\Sigma \supset T$, в котором замыкание V будет гладким.

Оказывается, если φ_i в уравнениях нашего множества – полиномы Лорана общего положения в пространствах $\mathbb{C}^{A_i}$, то нам подойдет торическое многообразие X_Σ для любого неособого веера Σ, который является подразбиением двойственных вееров $A_1,\ldots,A_k$. Точнее, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.5.1. 1) *Для любого набора конечных множеств $A_1,\ldots,A_k$ в решетке L существует полный неособый веер, подразбивающий $\Sigma_{A_1},\ldots,\Sigma_{A_k}$*

(т. е. такой, у которого каждый конус порождается частью базиса решетки L^* и содержится в некотором конусе каждого из вееров Σ_{A_i}).

2) *Наборы полиномов Лорана $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, удовлетворяющие условию из теоремы 2.2.4, т. е. такие, что для каждой линейной функции $\gamma\colon L \to \mathbb{Z}$, $\gamma \in |\Sigma|$, нуль является регулярным значением отображения $\varphi^\gamma = (\varphi_1|_{A_1^\gamma}, \dots, \varphi_k|_{A_k^\gamma})\colon T \to \mathbb{C}^k$, образуют открытое по Зарискому множество в пространстве $\mathbb{C}^{A_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{A_k}$.*

3) *Если для данных $A_1, \dots, A_k$ веер Σ удовлетворяет условиям п. 1) (кроме, возможно, полноты), а множество $V = \{\varphi_1 = \dots = \varphi_k = 0\}$ – условию пункта 2), то замыкание V в гладком торическом многообразии X_Σ является гладким подмногообразием, трансверсальным всем орбитам X_Σ.*

4) *В условиях п. 3) пересечение замыкания V с орбитой $T_C = T/\langle t^l,\ l \in C\rangle$, $C \in \Sigma$, совпадает с множеством $\{\varphi^\gamma = 0\}/\langle t^l,\ l \in C\rangle$.*

В этой теореме п. 1) весьма нетривиальный, но чисто комбинаторный (см. [33]). Другие пункты посредством покрытия X_Σ аффинными картами сводятся к случаю аффинного торического многообразия $X_\Sigma = X_Q = \mathbb{C}^n$, где $Q \subset \mathbb{Q}^n$ – положительный квадрант и $0 \in A_i \subset Q$. В этом случае нужные утверждения вытекают из леммы Сарда для отображения $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)\colon (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \to \mathbb{C}^k$. Действительно, это отображение продолжается до $\tilde{\varphi}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$, и замыкание $V \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ в $\mathbb{C}^n$ задается уравнением $\tilde{\varphi} = 0$. Значит, по теореме Сарда общая точка $c \in \mathbb{C}^k$ является регулярным значением ограничений $\tilde{\varphi}$ на все координатные плоскости. Пункты 2)–4) теоремы следуют из того, что

– полином $\widetilde{\psi} := \tilde{\varphi} - c$ также содержится в $\mathbb{C}^A$;

– уравнение $\widetilde{\psi} = 0$ задает гладкое подмногообразие, трансверсально пересекающее каждую координатную плоскость в $\mathbb{C}^n$;

– ограничение $\widetilde{\psi}$ на координатную плоскость равно $\widetilde{\psi}^\gamma$ для ковектора γ из соответствующей координатной плоскости $\mathbb{Z}^n$.

Теорема 2.5.1 позволяет доказать все утверждения о многогранниках Ньютона из п. 2.2 средствами торической геометрии.

Для произвольного алгебраического множества $V \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ гладкая торическая компактификация может не существовать, но всегда существует ее более слабая версия в следующем смысле.

Определение 2.5.2. 1) Укорочением полинома Лорана $f = \sum_{a \in A} c_a x^a$ в направлении $l \in L^*$ называется сумма его старших мономов в смысле градуировки $l\colon L \to \mathbb{Z}$, т. е. $f^l = \sum_{l(a)=l_0} c_a x^a$ для максимального l_0, при котором эта сумма не нулевая.

2) Укорочением идеала $I \subset \mathbb{C}[L]$ в кольце полиномов Лорана называется идеал I^l, порожденный укорочениями f^l, $f \in I$.

3) Укорочением V^l алгебраического многообразия $V \subset T$ в направлении $l \in L^*$ называется многообразие нулей идеала I^l, где I – идеал многообразия V.

Утверждение 2.5.3. 1) *Для каждого подмногообразия V в комплексном торе T существует неособый полный веер Σ в решетке L^* такой, что замыкание V в торическом многообразии X_Σ пересекает каждую орбиту T_C, $C \in \Sigma$, по множеству коразмерности $\operatorname{codim} X_C + \operatorname{codim} V$.*

2) *Для каждого конуса C такого веера Σ укорочения V вдоль всех $l \in C$ совпадают (будем обозначать их V_C), и поэтому V_C инвариантно относительно действия всех однопараметрических подгрупп t^l, $l \in C$.*

3) *Пересечение замыкания V с орбитой $T_C = T/\langle t^l,\ l \in C\rangle$ совпадает с $V_C/\langle t^l,\ l \in C\rangle$.*

Доказательство приведено в разделе 5. Такая пара $(X_\Sigma, \overline{V})$ называется тропической компактификацией V. Гладкое многообразие V вслед за [62] будем называть хорошим (schön), если у него есть тропическая компактификация такая, что $\overline{V}$ гладкое. В частности, мы видели, что многообразия, заданные уравнениями достаточно общего положения, – хорошие.

3. Тропическая геометрия и A-дискриминанты

3.1. Тропическая геометрия. Тропические числа обычно определяются как множество $\mathbb{R}$, дополненное элементом $-\infty$ и структурой полукольца, в которой сумма элементов a и b определяется как $\max(a, b)$, а их произведение – как $a + b$. Мы, однако, последуем идеям работы [66] и определим сложение несколько по-другому.

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R} \sqcup \{-\infty\}$ – тропическое полуполе с операциями

$$a \underset{\mathbb{T}}{\cdot} b = a \underset{\mathbb{R}}{+} b \quad \text{и} \quad a \underset{\mathbb{T}}{+} b = \begin{cases} \max(a, b), & \text{если } a \neq b, \\ [-\infty, a], & \text{если } a = b. \end{cases}$$

Многозначное тропическое сложение, которое мы используем, является чуть более удобным по сравнению с обычным (см., например, определение 3.1.2 ниже), а также и более естественным: тропическое сложение и умножение должны аксиоматизировать поведение степени суммы и произведения двух полиномов, а степень $\deg(f + g)$ при условии $\deg f = \deg g$ может принимать любые значения в интервале $[-\infty, \deg f]$.

Всюду далее $\mathfrak{1} \in \mathbb{T}$ и $\mathfrak{0} \in \mathbb{T}$ обозначают $0 \in \mathbb{R}$ и $-\infty$ соответственно. Более того, ввиду многозначности операции сложения, "$= \mathfrak{0}$" в тропическом смысле означает "$\ni -\infty$".

Замечание 3.1.1. Тропические объекты мы будем обозначать готическими буквами, поскольку рассматриваем тропический тор $\mathbb{T} \setminus \mathfrak{0}$ как вещественную часть алгебры Ли комплексного тора $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Определение 3.1.2. *Тропической гиперповерхностью* называется множество вида $S = \{x \mid f(x) = \mathfrak{0}\}$, где f – тропический полином. В достаточно малой окрестности точки общего положения $x_0 \in S$ полином f может быть представлен в виде $g \cdot h^k$, где $g(x_0) \neq \mathfrak{0}$, а полином h неприводим. Максимально возможное целое число k с таким свойством называется *кратностью* гиперповерхности S в точке x_0.

Более явно, в малой окрестности точки общего положения $x_0 \in S$ множество $S \subset \mathbb{T}^n$ совпадает с гиперплоскостью, и по две стороны этой гиперплоскости полином f равен своим мономам $c_a x^a$ и $c_b x^b$. Тогда вектор $b - a \in \mathbb{Z}^n$ разлагается в произведение $k \cdot v$, где $v \in \mathbb{Z}^n$ – примитивный вектор, а число $k \in \mathbb{N}$

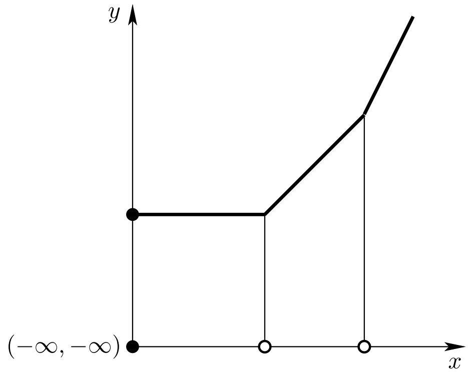

Рис. 1. График тропического полинома

называется кратностью S в точке x_0 (это совпадает с исходным определением, так как полином f в окрестности x_0 как функция равен $c_a x^a((c_b/c_a)x^v + 1)^k$).

Например, на рис. 1 изображен график функции $f(x) = x^3 + x^2 + 6x + 8$, а также (светлыми точками) множество $\{f = \mathtt{o}\} = \{2, 3\}$ с кратностями 1 и 2 соответственно.

Алгебраическая геометрия над тропическими числами полезна тем, что ответы на многие перечислительные задачи оказываются одинаковыми над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{T}$. Приведем, например, тропический аналог теоремы Кушниренко–Бернштейна.

Говорят, что тропические гиперповерхности $H_1, \ldots, H_n$ в тропическом торе $\mathbb{R}^n = (\mathbb{T} \setminus \mathtt{o})^n$ пересекаются *трансверсально*, если они пересекаются в конечном числе точек и в достаточно малой окрестности каждой точки p их пересечения каждая из гиперповерхностей H_i выглядит как гиперплоскость, т. е. задается (с учетом кратностей) тропическим уравнением вида $x^{a_{p,i}} + p^{a_{p,i}} = \mathtt{o}$ для некоторых $a_{p,i} \in \mathbb{Z}^n$. Тогда *индекс пересечения* гиперповерхностей $H_1, \ldots, H_n$ в точке p определяется как $|\det(a_{p,1}, \ldots, a_{p,n})|$.

Теорема 3.1.3 (тропическая теорема Кушниренко–Бернштейна). *Суммарный индекс пересечения трансверсальных гиперповерхностей $H_1, \ldots, H_n$ равен смешанному объему многогранников Ньютона их уравнений.*

Заметим, что для случая, когда уравнения гиперповерхностей имеют вид $x^{a_{p,i}} + p^{a_{p,i}} = \mathtt{o}$, утверждение теоремы совпадает с определением индекса пересечения (т. е. если бы определение индекса пересечения было другим, теорема не могла бы быть верной).

Теорема 3.1.3 допускает нижеследующее обобщение на случай нетрансверсальных гиперповерхностей и в таком виде оказывается некоторым свойством аддитивности смешанных объемов, позволяющим вычислять смешанные объемы сложных многогранников через смешанные объемы их простых частей.

Определение 3.1.4. Локальный многогранник Ньютона тропического полинома φ в точке x_0 – это минимально возможный многогранник Ньютона тропического полинома, совпадающего с φ как функция в окрестности x_0.

Будем обозначать его N_{φ,x_0}. Более конструктивное определение – это выпуклая оболочка всех a, для которых значение монома $c_a x^a$ полинома $\varphi(x) = \sum c_a x^a$ в точке $x = x_0$ равно максимальному значению $\varphi(x_0)$.

Заметим, что у полинома φ конечное число локальных многогранников Ньютона и они образуют разбиение его многогранника Ньютона, называемое *двойственным разбиением* полинома φ и обозначаемое S_φ.

Теорема 3.1.5 (аддитивность смешанного объема относительно разбиений). *Сумма по всем $x \in \mathbb{T}^n$ смешанных объемов локальных многогранников Ньютона $N_{\varphi_1,x}, \dots, N_{\varphi_n,x}$ равна смешанному объему многогранников Ньютона полиномов $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.*

В частности, по соображениям размерности, смешанные объемы локальных многогранников Ньютона равны нулю во всех точках x, кроме конечного числа. Заметим, что в случае трансверсальных гиперповерхностей эта теорема превращается в предыдущую, и поэтому ее естественно переформулировать следующим образом.

Определение 3.1.6. Индексом пересечения произвольных тропических гиперповерхностей $\varphi_i = 0$ в точке x называется смешанный объем локальных многогранников Ньютона $N_{\varphi_1,x}, \dots, N_{\varphi_n,x}$.

Заметим, что при шевелении тропических гиперповерхностей до трансверсальных точка их пересечения x распадается на несколько близких точек трансверсального пересечения x_i, и индекс пересечения в x (в смысле приведенного выше определения) по теореме 3.1.3 равен сумме индексов пересечения в точках x_i (в смысле определения, данного перед теоремой 3.1.3).

В этой терминологии предыдущая теорема выглядит так.

Теорема 3.1.7 (обобщенная тропическая теорема Кушниренко–Бернштейна). *Суммарный индекс пересечения (не обязательно трансверсальных) тропических гиперповерхностей $H_1, \dots, H_n$ равен смешанному объему многогранников Ньютона их уравнений.*

На практике двойственное разбиение многогранника Ньютона N полинома $\varphi(x) = \sum\limits_{a \in N \cap \mathbb{Z}^n} c_a x^a$ удобно строить с помощью его *преобразования Лежандра* $\tilde{\varphi}\colon N \to \mathbb{R}$. Оно, очевидно, равно минимальной выпуклой вверх функции, для которой значение в каждой точке $a \in N \cap \mathbb{Z}^n$ не меньше c_a.

Утверждение 3.1.8. *n-мерные компоненты двойственного разбиения многогранника Ньютона N тропического полинома φ – это в точности максимальные области линейности преобразования Лежандра $\tilde{\varphi}\colon N \to \mathbb{R}$.*

Пример 3.1.9. Двойственное разбиение полинома $5 + 10x + 11y + 6xy$ – это разбиение многогранника Ньютона $[0,1]^2$ на два треугольника диагональю от $(1,0)$ к $(0,1)$. Преобразование Лежандра этого полинома – непрерывная функция на $[0,1]^2$, линейная на двух указанных треугольниках и принимающая в вершинах значения 5, 10, 11, 6.

Полином φ не восстанавливается однозначно по своему преобразованию Лежандра $\tilde{\varphi}$ как полином, но однозначно восстанавливается как функция: $\varphi = \tilde{\tilde{\varphi}}$. В частности, по $\tilde{\varphi}$ однозначно восстанавливается гиперповерхность $\varphi = 0$: например, ее вершины по предыдущему утверждению взаимно однозначно соответствуют областям линейности $\tilde{\varphi}$, причем вершина равна дифференциалу $\tilde{\varphi}$ в соответствующей области линейности.

Пример 3.1.10. Полином $2 + cx + 4x^2 \in \mathbb{T}[x]$ при всех $c \leqslant 3$ определяет одну и ту же функцию $\mathbb{T} \to \mathbb{T}$ и имеет один и тот же нуль и одно и то же преобразование Лежандра. При всех $c \geqslant 3$, напротив, преобразования Лежандра, функции и их нули попарно различны. Однако в обоих случаях нули восстанавливаются по преобразованию Лежандра.

Связь двойственного разбиения с преобразованием Лежандра мотивирует следующее определение.

Определение 3.1.11. Разбиение целочисленного многогранника называется *когерентным*, или выпуклым, или регулярным, если оно двойственно к какому-либо тропическому полиному или, равносильно, является множеством областей линейности выпуклой вверх кусочно линейной функции.

Не все разбиения когерентны.

3.2. Тропическая теорема соответствия. Тропическая теорема Кушниренко–Бернштейна – простейшее проявление следующего принципа *тропического соответствия*, полная общность которого пока представляется довольно загадочной:

> Ответы на многие задачи исчислительной алгебраической
> геометрии одинаковы над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{T}$.

Этот принцип полезен тем, что алгебраическая геометрия над $\mathbb{T}$ – кусочно линейная комбинаторика, поэтому доказательство принципа тропического соответствия для какого-либо класса исчислительных вопросов само по себе является комбинаторным ответом на эти вопросы.

Первый содержательный класс вопросов, для которых был доказан этот принцип, – вычисление инвариантов Громова–Виттена проективной плоскости. Сейчас известно много доказательств этого факта: оригинальное аналитическое доказательство [47] использовало язык амеб, доказательства в работах [53] и [55] ориентируются на теорию деформаций, а в работах [63] и [22] – на теорию пересечений. Также получены многочисленные обобщения, такие как подсчет кривых, имеющих более сложные особенности [54], удовлетворяющих более сложным условиям инцидентности [5] или лежащих в пространствах большей размерности [55].

Определение 3.2.1. Через $N_{d,g}$ будем обозначать число алгебраических кривых степени d и рода g на $\mathbb{CP}^2$, проходящих через данный набор точек общего положения $p_1, \ldots, p_k$.

Это число, очевидно, может быть конечным и ненулевым, только если k равно размерности $3d-1-g$ семейства всех плоских кривых степени d и рода g (так называемого *многообразия Севери*). Поэтому всегда будем считать k равным $3d-1-g$.

В многообразии Севери открытое по Зарискому множество образуют *нодальные* кривые, т. е. такие, которые имеют только простейшие особенности – трансверсальные самопересечения (*ноды*). Поэтому семейство ненодальных кривых степени d и рода g имеет строго меньшую размерность, а значит, при $k=3d-1-g$ все кривые из определения 3.2.1 будут нодальными. Так как род кривой степени d с n нодами равен $(d-1)(d-2)/2-n$, то у каждой кривой в определении 3.2.1 будет $(d-1)(d-2)/2-g$ нодов.

Определение 3.2.2. Пусть полином $\varphi \in \mathbb{T}[x,y]$ имеет многоугольник Ньютона N. Назовем тропическую кривую $\varphi = \mathbb{o}$ нодальной, если выполнены следующие условия:

– каждая ее негладкая точка x в малой окрестности совпадает с объединением трех лучей из x или двух прямых, проходящих через x, т. е. двойственное разбиение многоугольника Ньютона N состоит из треугольников и параллелограммов;

– каждый ее луч имеет кратность 1, т. е. все целые точки на границе многоугольника Ньютона N являются вершинами двойственного подразбиения.

Числом нодов кривой $\varphi = \mathbb{o}$ назовем сумму

(число параллелограммов в двойственном разбиении)
+ (число целых точек в многоугольнике Ньютона N,
не являющихся вершинами двойственного разбиения).

Соответственно *родом* назовем разность

(число вершин двойственного разбиения внутри N)
– (число параллелограммов в двойственном разбиении).

Кратностью кривой $\varphi = \mathbb{o}$ назовем произведение целочисленных площадей треугольников двойственного разбиения многогранника Ньютона φ. Тропическим инвариантом Громова–Виттена $N^{\mathbb{T}}_{d,g}$ назовем суммарную кратность тропических кривых степени d рода g, проходящих через данные $3d-1-g$ точки общего положения.

Теорема 3.2.3 (теорема Михалкина). $N_{d,g} = N^{\mathbb{T}}_{d,g}$.

Ниже мы выведем эту теорему в простейшем случае (для кривых с одним нодом) из описания многогранника Ньютона дискриминанта, которое принадлежит И. М. Гельфанду, А. В. Зелевинскому и М. М. Капранову. Соответственно, начнем с того, что напомним это описание и наметим его более элементарное доказательство, чем в оригинальной работе [21].

3.3. Опорные функции и вторичные многогранники. В этом пункте мы определим комбинаторный объект – *вторичный многогранник* (secondary polytope), который позже окажется многогранником Ньютона дискриминанта, а также его смешанный аналог, который окажется многогранником Ньютона результанта.

Наиболее естественно вторичный многогранник определяется своей опорной функцией. Напомним, что опорной функцией многогранника N в векторном пространстве V называется непрерывная кусочно линейная функция $N(\,\cdot\,)\colon V^* \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $N(\gamma) = \max \gamma|_N$ для каждой линейной функции $\gamma\colon V \to \mathbb{R}$.

Замечание 3.3.1. (i) Многогранник однозначно определяется своей опорной функцией. Более точно, вершины v_i многогранника $N \subset V$ находятся во взаимно однозначном соответствии с областями линейности $L_i \subset V^*$ опорной функции $N(\,\cdot\,)$, и $v_i \in V$ равно линейной функции $N(\,\cdot\,)|_{L_i} \in V^{**} = V$.

(ii) Эти факты являются частным случаем утверждения 3.1.8 и последующего обсуждения, поскольку опорную функцию целочисленного многогранника N можно записать как тропический полином $\varphi_N = \sum\limits_{a \in N \cap \mathbb{Z}^n} x^a$ с многогранником Ньютона N.

В частности, важна тропическая гиперповерхность $\varphi_N = 0$: она состоит из двойственных конусов к ребрам многогранника N (см. определение 2.4.1), причем вес, приписанный каждому конусу, равен целочисленной длине соответствующего ребра.

Определение 3.3.2. Тропическая гиперповерхность $\varphi_N = 0$ называется двойственным тропическим веером многогранника N и обозначается через $[N]$. (Этот объект следует отличать от двойственного веера, см. определение 2.4.1.)

Определение 3.3.3. Вторичным многогранником множества $A \subset \mathbb{Z}^n$ называется многогранник $S_A \subset \mathbb{R}^A$, опорная функция которого на ковекторе $\gamma \in \mathbb{R}^A$ с координатами γ_a, $a \in A$, равна интегралу минимальной выпуклой вверх функции $\widetilde{\gamma}\colon \operatorname{conv} A \to \mathbb{R}$, для которой $\widetilde{\gamma}(a) \geqslant \gamma_a$ при всех $a \in A$.

Пример 3.3.4. Вторичный многогранник множества $\{0,1,2\} \subset \mathbb{Z}^1$ имеет опорную функцию, которая на ковекторе $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^{\{0,1,2\}}$ равна $\gamma_0/2 + \gamma_1 + \gamma_2/2$ при $\gamma_1 \geqslant (\gamma_0 + \gamma_2)/2$ и $\gamma_0 + \gamma_2$ в противном случае. Таким образом, вторичный многогранник является отрезком с концами $(1/2, 1, 1/2)$ и $(1, 0, 1)$.

Чтобы воспользоваться замечанием 3.3.1, (i), для описания вершин вторичного многогранника, нужно описать области линейности его опорной функции. Заметим, что интеграл функции $\widetilde{\gamma}$ при вариации $\gamma_a \rightsquigarrow \gamma_a + \varepsilon$ зависит от ε линейно, если все области линейности S_i функции $\widetilde{\gamma}$, примыкающие к a, являются симплексами и при $a \in S_i$ равенство $\widetilde{\gamma}(b) = \gamma_b$ выполняется только для вершин $b \in S_i$. В этом случае производная $\displaystyle\int_{\operatorname{conv} A} \widetilde{\gamma}(x)\,\mathrm{d}x$ по ε равна $\dfrac{1}{n+1} \sum\limits_i \operatorname{Vol} S_i$. В противном случае интеграл $\displaystyle\int_{\operatorname{conv} A} \widetilde{\gamma}(x)\,\mathrm{d}x$ как функция от ε претерпевает излом при $\varepsilon = 0$ и поэтому не имеет производной. Вывод следующий.

Утверждение 3.3.5. 1) *Опорная функция вторичного многогранника S_A линейна в окрестности точки $\gamma \in \mathbb{R}^A$ тогда и только тогда, когда все области линейности функции $\widetilde{\gamma}\colon \operatorname{conv} A \to \mathbb{R}$ являются симплексами и равенство $\widetilde{\gamma}(a) = \gamma_a$ выполняется, только когда a является вершиной одного из них.*

2) *Вершины* S_A, *области линейности опорной функции* $S_A(\,\cdot\,)$ *и когерентные разбиения* $\operatorname{conv} A$ *на симплексы* (*т. е. триангуляции*) *находятся во взаимно однозначном соответствии.*

При этом соответствии триангуляции $\{T_i\}$ *отвечает вершина в* $\mathbb{R}^A$, *у которой* a*-координата при каждом* $a \in A$ *равна* $\dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{i|a\text{ – вершина } T_i} \operatorname{Vol} T_i$. *Соответствующая им область линейности опорной функции* $S_A(\,\cdot\,)$ *состоит из всех* γ, *для которых функция* $\widetilde{\gamma}$ *линейна на каждом из симплексов* T_i.

Для дальнейшего нам будет важна следующая тропическая интерпретация опорной функции $S_A(\,\cdot\,)$ и участвующей в ее определении функции $\widetilde{\gamma}$. Будем рассматривать объемлющее пространство вторичного многогранника $\mathbb{T}^A \supset S_A$ как пространство тропических полиномов вида $\gamma(x) = \sum\limits_{a \in A} \gamma_a x^a$.

Замечание 3.3.6. Функция $\widetilde{\gamma}$ из определения 3.3.3 является преобразованием Лежандра тропического полинома γ.

Заметим, что гомотетия $(n+1)!\, S_A$ является целочисленным многогранником. Согласно замечанию 3.3.1, (ii), мы можем рассматривать опорную функцию $(n+1)!\, S_A(\,\cdot\,)$ как тропический полином $\mathfrak{S}_A$ с многогранником Ньютона $(n+1)!\, S_A$. Соответствующую гиперповерхность $\mathfrak{S}_A = \mathfrak{o}$ будем называть *вторичным веером* множества A. Это множество состоит из тех $\gamma \in \mathbb{T}^A$, для которых нарушено одно из условий в утверждении 3.3.5, 1). Для $n = 2$ опишем явно все γ, для которых нарушается одно из двух условий.

Пример 3.3.7. При $n = 2$ вторичный веер $\mathfrak{S}_A = \mathfrak{o}$ является объединением замыканий следующих конусов C_T и $C_{T,a}$ коразмерности 1:

1) T – произвольная когерентная триангуляция многоугольника $\operatorname{conv} A$ с вершинами в A, точка $a \in A$ не является ее вершиной, конус $C_{T,a}$ состоит из всех γ, для которых элементы T являются областями линейности функции $\widetilde{\gamma}$, и $\widetilde{\gamma}(a) = \gamma_a$;

2) T – произвольное когерентное разбиение многоугольника $\operatorname{conv} A$ с вершинами в A, у которого один из элементов – четырехугольник, а остальные элементы – треугольники; конус C_T состоит из всех γ, для которых элементы T являются областями линейности функции $\widetilde{\gamma}$.

3.4. Результанты и дискриминанты.

3.4.1. *Результанты.* Для конечного множества $A \subset \mathbb{Z}^n$ через $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^A$ обозначим пространство полиномов Лорана вида $\sum\limits_{a \in A} c_a x^a$, $c_a \neq 0$.

Определение 3.4.1. A*-результантом*

$$R_A \subset \underbrace{(\mathbb{C} \setminus \{0\})^A \times \cdots \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})^A}_{n+1}$$

называется замыкание множества всех наборов полиномов, имеющих общий корень в $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$.

Говоря об A-результанте, мы всегда будем предполагать, что A не содержится ни в какой аффинной гиперплоскости – в этих предположениях результант является неприводимой алгебраической гиперповерхностью, и мы будем обозначать задающее его уравнение также через R_A.

Пример 3.4.2. При $A = \{0, 1, \ldots, d\} \subset \mathbb{Z}^1$ получаем классический результант двух полиномов одной переменной одинаковой степени.

Это определение можно сделать более конструктивным, избавившись от взятия замыкания.

Утверждение 3.4.3. *Набор полиномов* $(f_0, \ldots, f_n)$ *содержится в* R_A *тогда и только тогда, когда существует грань* Γ *выпуклой оболочки* A, *для которой ограничения* $f_0\big|_\Gamma, \ldots, f_n\big|_\Gamma$ *имеют общий корень в* $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$.

Действительно, набор полиномов $f_i = \sum c_{a,i} x^a$ имеет общий корень тогда и только тогда, когда плоскость $\sum c_{a,i} y_a = 0$, $i = 0, \ldots, n$, пересекает образ вложения $j_A\colon (\mathbb{C}\setminus\{0\})^n \to \mathbb{CP}^A$, а значит, набор $f_i = \sum c_{a,i} x^a$ принадлежит R_A тогда и только тогда, когда плоскость $\sum c_{a,i} y_a = 0$, $i = 0, \ldots, n$, пересекает замыкание образа – торическое многообразие $X_A \subset \mathbb{CP}^A$. Но X_A состоит из орбит, являющихся образами отображений $j_\Gamma\colon (\mathbb{C}\setminus\{0\})^n \to \mathbb{CP}^A$ по всем граням $\Gamma \subset A$, и пересечение указанной плоскости с указанной орбитой равносильно наличию общего корня у ограничений $f_0\big|_\Gamma, \ldots, f_n\big|_\Gamma$.

Чтобы описать многогранник Ньютона результанта, будет удобно использовать следующее обозначение. Для ковектора γ в положительном октанте решетки $\mathbb{Z}^A$ определим многогранник $N_\gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ как подграфик неотрицательной функции $\widetilde{\gamma}$ из определения 3.3.3.

Лемма 3.4.4. *Значение опорной функции многогранника Ньютона* R_A *на ковекторе* $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_n)$ *из положительного октанта решетки* $\mathbb{Z}^A \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}^A$ *равно смешанному объему* $(n+1)!\,\mathrm{MV}(N_{\gamma_0}, \ldots, N_{\gamma_n})$.

Для доказательства рассмотрим в пространстве

$$\underbrace{(\mathbb{C} \setminus \{0\})^A \times \cdots \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})^A}_{n+1}$$

кривую

$$F(t) = (F_0(t), \ldots, F_n(t)) = \Big(\sum c_{a,0}(t) x^a, \ldots, \sum c_{a,n}(t) x^a\Big),$$

где $c_{a,i}(t) \in \mathbb{C}[t]$ – полином общего положения степени $\gamma_{i,a}$. С одной стороны, степень полинома $R_A(F(t)) \in \mathbb{C}[t]$ равна значению опорной функции многогранника Ньютона результанта на γ. С другой стороны, корни полинома $R_A(F(t))$ находятся во взаимно однозначном соответствии с корнями общей системы уравнений $F_0(t)(x) = \cdots = F_n(t)(x) = 0$ от $n+1$ переменной, поэтому по теореме Кушниренко–Бернштейна 2.2.1 число таких корней равно смешанному объему многогранников Ньютона $F_i(t)(x)$, т.е. $(n+1)!\,\mathrm{MV}(N_{\gamma_0}, \ldots, N_{\gamma_n})$.

Замечание 3.4.5. Доказанная лемма однозначно определяет многогранник Ньютона результанта R_A: ведь результант однороден, и поэтому значение опорной функции его многогранника Ньютона в любой точке γ равно значению в любой точке вида $\gamma + (d, d, \ldots, d)$, $d \in \mathbb{R}$, а значение в этой точке при достаточно больших d описывается леммой 3.4.4.

3.4.2. *Дискриминанты.*

Определение 3.4.6. Главным A-определителем назовем полином Лорана на пространстве $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^A$, задаваемый равенством

$$E_A(f) = R_A\left(f, x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

A-дискриминантом D_A назовем замыкание множества всех полиномов $f \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^A$, имеющих нуль критическим значением. Если D_A – неприводимая гиперповерхность, то обозначим ее неприводимое уравнение также через D_A (иначе будем обозначать через D_A единичный полином).

Утверждение 3.4.3 переформулируется для главного A-определителя следующим образом: $E_A(f) = 0$ тогда и только тогда, когда для некоторой грани $\Gamma \subset A$ ограничение $f\big|_\Gamma \colon (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \to \mathbb{C}$ имеет нуль критическим значением, т. е. $D_A(f|_\Gamma) = 0$. Поэтому полином $E_A(f)$ равен с точностью до мономиального множителя произведению по всем граням $\Gamma \subset A$ полиномов $D_A\bigl(f\big|_\Gamma\bigr)$ в некоторых степенях $c_A^\Gamma \in \mathbb{N}$. Эти степени вычислены явно в книге [21]. Но если торическое многообразие X_A гладкое в точках своей Γ-орбиты, то, рассуждая аналогично доказательству утверждения 3.4.3, легко убедиться, что $c_A^\Gamma = 1$. В частности, в малых размерностях получаем следующее.

Утверждение 3.4.7. 1) *При $n = 1$ имеем $E_A = D_A$ с точностью до мономиального множителя.*

2) *Пусть $A \subset \mathbb{Z}^2$ – множество целых точек целочисленного многоугольника N. Тогда с точностью до мономиального множителя имеем $E_A(f) = \prod_\Gamma D_{A\cap\Gamma}\bigl(f\big|_\Gamma\bigr)$, где Γ пробегает N и все его стороны.*

Теорема 3.4.8. 1) *Многогранник Ньютона E_A равен S_A. В частности, степень E_A равна $(n+1)!\,\mathrm{Vol}(\mathrm{conv}\,A)$.*

2) *Если $A \subset \mathbb{Z}^2$ – множество целых точек целочисленного многоугольника N, то многогранник Ньютона N_{D_A} дискриминанта D_A с точностью до сдвига однозначно определяется уравнением $S_A = N_{D_A} + \sum_\Gamma S_{A\cap\Gamma}$, где Γ пробегает все стороны N.*

Для доказательства п. 1) заметим, что опорная функция многогранника Ньютона E_A в γ равна $\int \widetilde{\gamma}(x)\,\mathrm{d}x$ по лемме 3.4.4 и замечанию 3.4.5. В частности, степень E_A равна значению опорной функции в точке $(1, \ldots, 1)$.

Пункт 2) следует из п. 1) и утверждения 3.4.7, поскольку многогранник Ньютона произведения равен сумме многогранников Ньютона сомножителей.

Согласно замечанию 3.3.1, (ii), мы можем рассматривать опорную функцию многогранника Ньютона N_{D_A} как тропический полином с многогранником

Ньютона N_{D_A}. Этот полином будем называть *тропическим дискриминантом* и обозначать $\mathfrak{D}_A$. Тогда п. 2) предыдущей теоремы можно переформулировать как равенство для тропических полиномов:

$$\mathfrak{S}_A = \mathfrak{D}_A \cdot \prod_{\Gamma} \mathfrak{S}_{A\cap\Gamma}. \tag{3.1}$$

Из этого равенства следует, что тропическая гиперповерхность $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{o}$ содержится в $\mathfrak{S}_A = \mathfrak{o}$, т.е. в объединении конусов из примера 3.3.7. Однако можно указать один важный класс конусов из этого примера, который не будет содержаться в $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{o}$, а именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 3.4.9. *Пусть $a \in N$ – единственная целая точка, которая не является вершиной триангуляции T многоугольника N, и пусть она лежит внутри некоторой стороны многоугольника Ньютона $\Gamma_0 \subset N$. Тогда внутренность конуса $C_{T,a}$ не пересекается с $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{o}$.*

Действительно, точка a является единственной внутренней целой точкой (а значит, серединой) стороны $I \subset \Gamma_0$ одного из треугольников триангуляции, поэтому в окрестности внутренней точки $\gamma \in C_{T,a}$ полиномы $\mathfrak{D}_A$ и $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}^2\cap\Gamma_0}$ совпадают с полиномом $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}^2\cap I}$ (который описан в примере 3.3.4). Соответственно, равенство (3.1) в окрестности γ превращается в равенство

$$\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}^2\cap I} = \mathfrak{D}_A \cdot \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}^2\cap I} \cdot (\text{тропический моном}),$$

т.е. полином $\mathfrak{D}_A$ в окрестности точки γ совпадает с тропическим мономом (в обычной терминологии – с линейной функцией), а значит, не имеет тропических корней вблизи γ.

3.5. Доказательство теоремы соответствия в простейшем случае. Для множества целых точек A в данном целочисленном многоугольнике $N \subset \mathbb{R}^2$, $0 \in N$, мы хотим вычислить количество полиномов $f \in \mathbb{C}^A$ таких, что кривая $f = 0$ имеет одну особенность и проходит через заданный набор из $q = |A| - 2$ точек общего положения $p_1, \dots, p_q \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$. Иными словами, мы хотим вычислить индекс пересечения I следующих гиперповерхностей в $\mathbb{C}^A$:

– условий инцидентности $H_1, \dots, H_q$, где $H_i = \{f \mid f(p_i) = 0\}$;
– нормализации $H_0 = \{f \mid f(0) = 1\}$;
– A-дискриминанта $D_A = \{f \mid f = 0 \text{ не регулярно}\}$.

Тропикализуем данные объекты: выберем точки $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_q \in (\mathbb{T}\setminus\{0\})^2$ и определим тропические гиперповерхности

$$\mathfrak{H}_i = \{f \mid f(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{o}\} \quad \text{в } \mathbb{T}^A \quad \text{и} \quad \mathfrak{H}_0 = \{f \mid f(\mathfrak{o}) = \mathfrak{1}\}.$$

Если точки $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_q$ в общем положении, то тропические гиперповерхности $\mathfrak{H}_0, \dots, \mathfrak{H}_q$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{o}$ пересекаются трансверсально; обозначим их индекс пересечения через $\mathfrak{I}$. Тогда верно равенство

$$I = \mathfrak{I}, \tag{3.2}$$

ведь обе его части равны смешанному объему многогранников Ньютона гиперповерхностей $H_0, \dots, H_q$ и D_A по формуле Кушниренко–Бернштейна над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{T}$ соответственно (теоремы 2.2.1 и 3.1.7).

Посмотрим, с какими из конусов тропической гиперповерхности $\mathfrak{D} = \mathfrak{o}$ могут пересекаться гиперповерхности инцидентности $\mathfrak{H}_i$ в общем положении.

(a) Пусть конус C_T из примера 3.3.7 соответствует разбиению T многоугольника N, в котором все целые точки являются вершинами. Тогда все треугольники разбиения имеют площадь $1/2$, а единственный четырехугольник – это параллелограмм единичной площади. Поэтому для каждого $\mathfrak{f} \in C_T$ кривая $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ – нодальная с одним нодом.

(b) Пусть конус C_T из примера 3.3.7 соответствует разбиению T многоугольника N, в котором не все целые точки являются вершинами (скажем, есть еще целая точка b). Тогда, хотя размерность конуса равна $|A| - 2$, размерность соответствующего семейства тропических кривых $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{f} \in C_T$, строго меньше, поскольку они не зависят от коэффициента c_b полинома $\mathfrak{f} = \sum\limits_a c_a x^a$. Так как тропическая кривая из семейства с менее чем $|A| - 2$ параметрами не может проходить через $|A| - 2$ точки общего положения, такой конус C_T не пересекается с гиперповерхностями инцидентности $\mathfrak{H}_i$ в общем положении.

(c) Если конус $C_{T,a}$ из примера 3.3.7 соответствует триангуляции T многоугольника N, в которой не все целые точки, кроме a, являются вершинами, то, аналогично предыдущему случаю, этот конус не пересекается с гиперповерхностями инцидентности $\mathfrak{H}_i$.

(d) Если конус $C_{T,a}$ из примера 3.3.7 соответствует триангуляции T многоугольника N, в которой все целые точки, кроме a, являются вершинами, то согласно лемме 3.4.9 возможны два случая:

– точка a лежит внутри одного из треугольников триангуляции, и этот треугольник имеет площадь $3/2$, а остальные треугольники – площадь $1/2$;

– точка a лежит внутри одного из внутренних ребер триангуляции, и прилегающие к нему два треугольника триангуляции имеют площадь 1, а остальные – площадь $1/2$.

В обоих случаях для каждого $\mathfrak{f} \in C_{T,a}$ кривая $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ – нодальная с одним нодом.

Таким образом, мы получили, что пересечение тропических гиперповерхностей $\mathfrak{H}_0, \dots, \mathfrak{H}_q$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{o}$ состоит в точности из таких полиномов $\mathfrak{f}$, что кривая $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ – нодальная с одним нодом и проходит через точки инцидентности $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_q$. Из определений также следует, что кратность пересечения указанных гиперповерхностей в каждой из этих точек $\mathfrak{f}$ равна кратности нодальной кривой $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ в смысле теоремы соответствия (а именно, она равна 3 в случае, если $\mathfrak{f} \in C_{T,a}$ и точка a лежит внутри одного из треугольников триангуляции T; она равна 4, если a лежит на внутреннем ребре триангуляции T; в остальных случаях она равна 1).

Поэтому индекс пересечения тропических гиперповерхностей $\mathfrak{H}_0, \dots, \mathfrak{H}_q$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{o}$, который, напомним, совпадает с искомой величиной (см. тождество (3.2) выше), равен числу нодальных тропических кривых с одним нодом, проходящих через данные точки общего положения, с учетом кратностей.

4. Кольцо условий комплексного тора и тропические вееры

Кольцо условий (см. [11]) – это теория пересечений для алгебраических циклов в сферических однородных пространствах с коэффициентами в коммутативном кольце Λ. В этом разделе мы рассмотрим кольцо условий $\mathscr{R}_n(\Lambda)$ группы $(\mathbb{C}^*)^n$ (которая является сферическим однородным пространством по отношению к действию группы на себе) с коэффициентами в $\Lambda = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. В значительной степени кольцо $\mathscr{R}_n(\Lambda)$ можно описать в терминах колец когомологий гладких проективных торических многообразий [11]. Исторически первой моделью данного кольца стала так называемая алгебра многогранников [46], [8]. Данное кольцо также можно описать, используя тропическую геометрию, – его моделью является кольцо тропических вееров (см. [19], [29], [48], [20], [25], [43]). Мы напомним эти известные результаты.

4.1. Кольцо условий.

4.1.1. *Кольцо условий $\mathscr{R}_n(\Lambda)$ группы $(\mathbb{C}^*)^n$.* Напомним определение кольца условий (см. п. 1.4). Два цикла $X_1, X_2 \subset (\mathbb{C}^*)^n$ размерности k *эквивалентны* ($X_1 \sim X_2$), если для любого цикла $Y \subset (\mathbb{C}^*)^n$ размерности $n-k$ и для почти всех элементов $g \in (\mathbb{C}^*)^n$ выполнено равенство $\langle X_1, gY\rangle = \langle X_2, gY\rangle$, где $\langle A, B\rangle$ – индекс пересечения циклов A и B. Если $X_1 \sim X_2$ и $Y_1 \sim Y_2$, то для почти всех $g_1, g_2 \in (\mathbb{C}^*)^n$ выполнено соотношение $X_1 \cap g_1Y_1 \sim X_2 \cap g_2Y_2$. *Произведение* $X * Y$ классов эквивалентности X и Y – это класс эквивалентности пересечения $X_1 \cap g_1Y_1$, где X_1 и Y_1 – представители X и Y, а g_1 – общий элемент в $(\mathbb{C}^*)^n$. *Кольцо условий* $\mathscr{R}_n(\Lambda)$ – это кольцо классов эквивалентности с умножением $*$ и тавтологическим сложением.

4.1.2. *Конус Бергмана.* Вектор $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ называется *существенным* для многообразия $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$, если существует росток мероморфной функции $f\colon (\mathbb{C}, 0) \to X \subset (\mathbb{C}^*)^n$, где $f(t) = at^k + \cdots$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ и многоточие $\cdots$ обозначает слагаемые a_mt^m высших порядков (для $m = (m_1, \dots, m_n)$, где $m_i \geqslant k_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и $m \neq k$).

Конус Бергмана $B(X) \subset \mathbb{R}^n$ в X – это замыкание множества векторов $\lambda k \in \mathbb{R}^n$, где k – существенный вектор для X и $\lambda \geqslant 0$.

Теорема 4.1.1. *Если каждая неприводимая компонента X имеет комплексную размерность l, то $B(X)$ является конечным объединением выпуклых рациональных конусов $|\sigma_i| \subset \mathbb{R}^n$, где $\dim_{\mathbb{R}} |\sigma_i| = l$. Более того, $B(X)$ можно подразбить до веера некоторого торического многообразия.*

Первая версия этой теоремы появилась в [3]. Развитие этой конструкции в контексте тропической алгебраической геометрии началось, в частности, с работ [60] и [13].

4.1.3. *Хорошая компактификация.* Торическое многообразие $M \supset (\mathbb{C}^*)^n$ будем называть *хорошей компактификацией* для подмногообразия $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ с $\dim X = k$, если замыкание $\overline{X}$ в M полное и не пересекает орбиты в M коразмерности, большей чем k.

Теорема 4.1.2. 1) *Для любого конечного множества $\mathscr{S}$ алгебраических подмногообразий в $(\mathbb{C}^*)^n$ существует торическое многообразие $M \supset (\mathbb{C}^*)^n$, которое дает хорошую компактификацию для каждого подмногообразия из $\mathscr{S}$.*

2) *Торическое многообразие M является хорошей компактификацией k-мерного подмногообразия $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ тогда и только тогда, когда носитель k-мерного остова его веера содержит конус Бергмана $B(X)$.*

Первая часть этой теоремы была установлена в [11]. Она очень важна для теории колец условий и тропической геометрии. Ее прозрачное элементарное доказательство найдено в [39]. Известен также ряд уточнений этой теоремы (например, см. [62]). Наиболее сильное из них анонсировано в [39].

Пусть $\mathscr{S}_r$ – подмножество множества всех подмногообразий в $(\mathbb{C}^*)^n$ такое, что любое X из $\mathscr{S}_r$ можно задать системой полиномов Лорана, многогранники Ньютона которых лежат в шаре радиуса r. Следующая более точная версия п. 1) теоремы 2 легко следует из [32].

Теорема 4.1.3. *Существует многогранник Ньютона Δ_r такой, что проективное торическое многообразие M_{Δ_r}, отвечающее Δ_r, гладкое и дает хорошую компактификацию для любого $X \in \mathscr{S}_r$. Конус Бергмана $B(X)$ для любого $X \in \mathscr{S}_r$ – носитель подвеера двойственного веера многогранника Δ_r.*

4.1.4. *Кольцо $\mathscr{R}_n(\Lambda)$ и кольцо когомологий торического многообразия.* Для полного торического многообразия $M \supset (\mathbb{C}^*)^n$ и для любого цикла $X = \sum k_i X_i$ размерности k можно определить цикл $\overline{X}$ в M как $\sum k_i \overline{X}_i$, где $\overline{X}_i$ – замыкание $X_i \subset (\mathbb{C}^*)^n$ в M. Цикл $\overline{X}$ определяет элемент $\rho(\overline{X})$ в $H^{2(n-k)}(M^n, \Lambda)$, значение которого на замыкании $\overline{O}_i$ любой орбиты O_i размерности $n-k$ в M равно индексу пересечения $\langle \overline{X}, \overline{O}_i \rangle$. Компактификация $M \supset (\mathbb{C}^*)^n$ называется *хорошей* для цикла $X = \sum k_i X^i$ в $(\mathbb{C}^*)^n$, если она является хорошей для каждого X_i.

Теорема 4.1.4 (см. [11]). *Если гладкая торическая компактификация M является хорошей для циклов X, Y и Z, где $Z = X * Y$ (произведение в кольце условий), то произведение $\rho(X)\rho(Y)$ в кольце когомологий $H^*(M, \Lambda)$ элементов $\rho(X)$ и $\rho(Y)$ равно $\rho(Z)$.*

В частности, эта теорема показывает, что вложение

$$H^\bullet(M, \Lambda) \hookrightarrow \mathscr{R}_n(\Lambda), \tag{4.1}$$

которое переводит каждый класс когомологий гладкого торического многообразия в реализующий его цикл, собственно пересекающий все орбиты, является гомоморфизмом колец.

4.1.5. *О кольцах Чжоу алгебраических многообразий.* Кольцо Чжоу алгебраического многообразия является алгебраическим аналогом кольца пересечений компактного ориентируемого многообразия. Любое алгебраическое подмногообразие $N \subset M$ будем называть *основным циклом*. Степенью основного цикла называется $\dim N$. Циклами в группе Чжоу многообразия M являются целочисленные линейные комбинации основных циклов, рассматриваемых с точностью до так называемой рациональной эквивалентности. Умножение основных циклов из группы Чжоу определяется как пересечение циклов, приведенных предварительно в общее положение. Это умножение продолжается по линейности на все циклы из группы Чжоу и наделяет градуированную группу Чжоу структурой коммутативного кольца.

Группа Чжоу. Определим градуированную группу Чжоу и кольцо Чжоу более точно. Начнем с определения тривиальных основных k-циклов в M. Пусть W есть $(k+1)$-мерное алгебраическое подмногообразие M, $\pi\colon \widetilde{W} \to W$ – естественная проекция на многообразие W его нормализации $\widetilde{W}$, f – рациональная функция на $\widetilde{W}$ и (f) – главный дивизор этой функции на $\widetilde{W}$. Образ дивизора (f) при отображении π будем называть тривиальным основным k-циклом в M. Линейная комбинация тривиальных основных k-циклов называется k-циклом, рационально эквивалентным нулю.

Градуированная группа Чжоу $A_*(M)$ n-мерного алгебраического многообразия M – это прямая сумма $A(M) = A_0(M) + A_1(M) + \dots + A_n(M)$ его групп Чжоу $A_k(M)$ размерностей $k = 0, 1, \dots, n$, а группа $A_k(M)$ – это факторгруппа всех k-циклов по k-циклам, рационально эквивалентным нулю. Группа $A_*(M)$ аналогична группе гомологий многообразия M. Можно определить градуированную группу $A^*(M) = A^0(M) + A^1(M) + \dots + A^n(M)$, где $A^k(M) = A_{n-k}(M)$, аналогичную группе когомологий многообразия M.

Для компактного M определено отображение $\rho\colon A_k(M) \to H_{2k}(M, Z)$, переводящее линейную комбинацию k-мерных алгебраических многообразий в соответствующую линейную комбинацию их фундаментальных циклов. Отображение определено корректно, так как циклы, рационально эквивалентные нулю, соответствуют циклам многообразия M, гомологичным нулю. Группа Чжоу $A_k(M)$ может быть значительно больше группы $H_{2k}(M, \mathbb{Z})$.

Пример 4.1.5. Пусть M – связная гладкая алгебраическая кривая рода r. Тогда гомоморфизм $\rho\colon A_0 \to H_0(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ сюръективен, а его ядро изоморфно якобиану кривой M (являющемуся компактным комплексным тором комплексной размерности $2r$).

С другой стороны, группа Чжоу для многообразий со сложной топологией может быть маленькой.

Пример 4.1.6. Пусть X – замкнутое алгебраическое подмногообразие в $\mathbb{C}^n$. Тогда группа Чжоу $A_n(M)$ многообразия $M = \mathbb{C}^n \setminus X$ изоморфна $\mathbb{Z}$ и порождена фундаментальным циклом многообразия. Все остальные группы $A_k(M)$ равны нулю. При этом топология многообразия M зависит от топологии многообразия X и может быть достаточно сложной.

Градуированная группа Чжоу особенно хорошо связана с топологией для класса алгебраических CW-комплексов (см. определение 6.2.5), к которому принадлежат все гладкие проективные торические многообразия.

Пример 4.1.7. Пусть M – гладкое проективное алгебраическое многообразие, имеющее структуру алгебраического CW-комплекса. Тогда его градуированная группа Чжоу изоморфна (с точностью до смены градуировки) его градуированной группе гомологий с целыми коэффициентами.

Кольцо Чжоу. В.-Л. Чжоу показал, что градуированную группу $A^*(M)$ гладкого квазипроективного многообразия M можно наделить структурой коммутативного кольца.

Определение 4.1.8. Два цикла $X \in A^k(M)$ и $Y \in A^m(M)$ алгебраически трансверсальны, если их пересечение $X \cap Y$ или пусто, или имеет коразмерность в многообразии M, равную $k+m$.

Если X и Y алгебраически трансверсальны, то каждой компоненте пересечения $X \cap Y$ приписывается некоторая корректно определенная кратность. Произведением $X \cdot Y$ двух алгебраически трансверсальных циклов X, Y называется формальная сумма компонент пересечения $X \cap Y$, взятых с соответствующими кратностями.

Теорема 4.1.9 (теорема Чжоу). 1) *Для любых циклов $X \in A^k(M)$ и $Y \in A^m(M)$ существуют алгебраически трансверсальные циклы X', Y', рационально эквивалентные соответственно X и Y.*

2) *Если X', Y' и X'', Y'' – алгебраически трансверсальные пары, причем X', X'' и Y', Y'' рационально эквивалентны, то $X' \cdot Y'$ и $X'' \cdot Y''$ тоже рационально эквивалентны.*

Теорема Чжоу позволяет наделить градуированную группу Чжоу $A^*(M)$ гладкого квазипроективного многообразия M структурой кольца с умножением $A^k(M) \times A^m(M) \to A^{k+m}(M)$ таким, что для алгебраически трансверсальных циклов X, Y их произведение равно $X \cdot Y$. Произведение циклов Чжоу согласуется с операцией пересечения соответствующих классов гомологий.

Теорема 4.1.10. *Пусть M – гладкое проективное алгебраическое многообразие, имеющее структуру алгебраического CW-комплекса. Тогда кольцо Чжоу многообразия M, кольцо пересечения классов целочисленных гомологий и кольцо целочисленных когомологий многообразия M изоморфны с точностью до смены градуировки.*

Итак, кольцо Чжоу доставляет чисто алгебраическую версию кольца пересечений (или кольца когомологий) гладких торических многообразий, которая определена не только для комплексных торических многообразий, но и для торических многообразий над любым алгебраически замкнутым полем. С другой стороны, для комплексных торических многообразий пересечение любых (в том числе вещественных) циклов контролируется его кольцом пересечений.

Кольцо Чжоу и кольцо условий группы $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Линейные комбинации алгебраических подмногообразий группы $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ фигурируют как в определении кольца Чжоу, так и в определении кольца условий этой группы. Но эти кольца абсолютно различны. Кольцо Чжоу изоморфно кольцу целых чисел: его образующим является фундаментальный класс группы. Напротив, кольцо условий этой группы очень богато. В частности, в нем выполняется версия теоремы 2.2.1, позволяющей вычислить число точек пересечения n гиперповерхностей, заданных достаточно общими уравнениями с фиксированными многогранниками Ньютона. Из общих результатов К. Де Кончини и К. Прочезе вытекает, что кольцо условий является проективным пределом колец Чжоу (или колец целочисленных когомологий) всевозможных гладких проективных торических компактификаций группы $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Этот результат основан на теореме о существовании хорошей компактификации для любого алгебраического подмногообразия $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$.

Де Кончини и Прочезе [11] определили кольцо условий для любых однородных *сферических* пространств. Кольца условий можно рассматривать как обобщение классического исчисления Шуберта: для многообразий флагов редуктивных групп, являющихся компактными однородными пространствами, кольца условий и исчисление Шуберта совпадают. К сожалению, кольца условий некомпактных сферических пространств трудно описывать. В настоящее время существуют описания таких колец лишь для некоторых пространств. Эти описания найдены с помощью эквивариантных когомологий. Для класса орисферических однородных пространств, содержащего и группу $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^n$, и все многообразия флагов, известно описание кольца условий, близкое к описанию такого кольца для $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^n$, изложенному в настоящем обзоре; см. [24].

4.2. Кольцо тропических вееров.

4.2.1. *Кольцо сбалансированных Λ-взвешенных вееров.* В этом пункте мы построим важную комбинаторную модель кольца условий комплексного тора и колец когомологий гладких торических многообразий.

4.2.1.1. Λ-*взвешенный k-веер* – это веер $\mathscr{F}\subset\mathbb{R}^n$ торического многообразия размерности n, оснащенный *функцией веса* $c\colon \mathscr{F}_k\to\Lambda$, определенной на $\mathscr{F}_k$ – множестве всех конусов размерности k из $\mathscr{F}$. *Носитель* $|\mathscr{F}|$ веера $\mathscr{F}$ – это объединение всех конусов $|\sigma_i|\subset\mathbb{R}^n$, где $\sigma_i\in\mathscr{F}_k$ и $c(\sigma_i)\neq 0$. Два взвешенных k-веера $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ *эквивалентны*, если: 1) $|\mathscr{F}_1|=|\mathscr{F}_2|$; 2) функции веса c_1 и c_2 индуцируют одну и ту же функцию веса на всех конусах общего подразбиения вееров $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$.

4.2.1.2. Пусть $\mathscr{F}$ – взвешенный k-веер. Для конуса $\sigma_i\in\mathscr{F}_k$ обозначим через $L_i^\perp\subset(\mathbb{R}^n)^*$ пространство, двойственное к объемлющему пространству L_i носителя $|\sigma_i|\subset\mathbb{R}^n$. Пусть O – ориентация $|\sigma_i|$. Через $e_i^\perp(O)\in\Lambda^{n-k}L_i^\perp$ обозначим вектор размерности $n-k$ такой, что: 1) целочисленный объем $|e_i^\perp(O)|$ в $L_i^\perp$ равен единице; 2) ориентация $e_i^\perp(O)$ индуцирована ориентацией O конуса $|\sigma_i|$ и стандартной ориентацией $\mathbb{R}^n$. Взвешенный конус k-веера $\mathscr{F}$ удовлетворяет *условию сбалансированности*, если для любой ориентации конуса $|\rho|$ размерности $k-1$, где $\rho\in\mathscr{F}_{k-1}$, выполнено соотношение

$$\sum e_i^\perp(O(\rho))c(\sigma_i)=0, \tag{4.2}$$

где c – функция веса, суммирование происходит по всем $\sigma_i\in\mathscr{F}_k$ таким, что $|\rho|\subset\partial|\sigma_i|$, и $O(\rho)$ – такая ориентация $|\sigma_i|$, что ориентация $\partial|\sigma_i|$ согласована с ориентацией $|\rho|$.

Замечание 4.2.1. Легко проверить, что взвешенный веер коразмерности 1 является сбалансированным тогда и только тогда, когда он является тропической гиперповерхностью в смысле п. 3.1. Это объясняет, почему сбалансированные взвешенные вееры называются также тропическими.

4.2.1.3. Пусть $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ – сбалансированные k- и $(n-k)$-вееры. Конусы $\sigma_i^1\in\mathscr{F}_1$, $\sigma_j^2\in\mathscr{F}_2$ с $\dim\sigma_i^1=k$, $\dim\sigma_j^2=n-k$ назовем *a-допустимыми* для вектора $a\in\mathbb{R}^n$, если $|\sigma_i^1|\cap(|\sigma_j^2|+a)\neq\varnothing$. Пусть $C_{i,j}$ – индекс $\Lambda_i\oplus\Lambda_j$ в $\mathbb{Z}^n$, где $\Lambda_i=L_i^1\cap\mathbb{Z}^n$, $\Lambda_j=L_j^2\cap\mathbb{Z}^n$ и L_i^1, L_j^2 – линейные пространства, порожденные $|\sigma_i^1|$, $|\sigma_j^2|$ соответственно. *Индексом пересечения* $c(0)$ вееров $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ назовем

$$\sum C_{i,j} c_1(\sigma_i^1) c_2(\sigma_j^2), \tag{4.3}$$

где суммирование происходит по всем a-допустимым парам σ_i^1, σ_j^2 для какого-нибудь общего вектора $a \in \mathbb{R}^n$ (можно показать, что если вееры $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ удовлетворяют условию сбалансированности (4.2), то сумма (4.3) не зависит от выбора общего вектора a).

Замечание 4.2.2. (i) Определение индекса пересечения можно понимать неформально следующим образом: сдвинем второй из пересекаемых вееров на вектор a, тогда для a общего положения он трансверсально пересечет первый веер по конечному числу точек, что даст нам возможность приписать каждой такой трансверсальной точке пересечения вес, как в формуле (4.3), и назвать индексом пересечения взвешенное число точек пересечения.

(ii) При таком взгляде становится очевидной аналогия с определением кольца условий, где для определения индекса пересечения одно из пересекаемых подмногообразий также сдвигалось на элемент общего положения. (Мы не будем углубляться в формализацию этой аналогии.) В этом смысле структура кольца, которую мы введем на пространстве тропических вееров в следующем пункте, может рассматриваться как аналог кольца условий в тропической алгебраической геометрии.

4.2.1.4. Рассмотрим k-веер $\mathscr{F}_1$ и m-веер $\mathscr{F}_2$ из множества $T\mathscr{R}_n(\Lambda)$ всех сбалансированных Λ-взвешенных вееров. Пусть d равно $n-(k+m)$. Если $d<0$, то $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2 = 0$. Если $d=0$, то *произведением* $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ называется 0-веер $\mathscr{F} = \{0\}$ с весом $c(0)$, равным индексу пересечения вееров $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ (определен выше).

Определим d-веер $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ для $d>0$. Предположим, что $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ – подвеера полного веера $\mathscr{G}$. Тогда $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ – также подвеер веера $\mathscr{G}$. Вес $c(\delta)$ конуса δ из $\mathscr{G}$ с $\dim\delta = d$ определяется следующим образом. Пусть L – пространство, порожденное $|\delta|$, и пусть $(\mathscr{F}_1)_\delta$ и $(\mathscr{F}_2)_\delta$ будут взвешенными подвеерами вееров $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$, содержащими все конусы этих вееров, которые содержат конус δ. Вес $c(\delta)$ конуса δ в $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ равен индексу пересечения образов при факторизации $(\mathscr{F}_1)_\delta$ и $(\mathscr{F}_2)_\delta$ в факторпространстве $\mathbb{R}^n/L$, оснащенном факторрешеткой $\mathbb{Z}^n/(L\cap\mathbb{Z}^n)$ (заметим, что эти образы имеют в факторпространстве дополнительную размерность и потому их индекс пересечения корректно определен).

Замечание 4.2.3. Это определение, в частности, позволяет определить индекс пересечения нескольких вееров $\mathscr{F}_i$ суммарной коразмерности n как кратность нульмерного веера – их произведения. Из определений легко заметить, что если коразмерности всех вееров равны 1 (так что вееры являются тропическими гиперповерхностями), то этот индекс пересечения совпадает с введенным в п. 3.1.

4.2.2. *Тропикализация кольца* $\mathscr{R}_n(\Lambda)$. Пусть M_Δ – гладкое полное торическое многообразие, построенное по n-мерному многограннику Δ, и $\Delta^\perp$ – его двойственный веер. Рассмотрим $T\mathscr{R}_n(\Lambda, \Delta) \subset T\mathscr{R}_n(\Lambda)$ – кольцо сбалансированных Λ-взвешенных вееров, равных Λ-линейным комбинациям конусов из веера $\Delta^\perp$. Следующие теоремы доказаны в [19].

Теорема 4.2.4 [19]. *Кольцо $T\mathscr{R}_n(\Lambda, \Delta)$ изоморфно кольцу когомологий $H^\bullet(M_\Delta, \Lambda)$. Компонента $T\mathscr{R}_n(\Lambda, \Delta)$, содержащая k-вееры, при этом изоморфизме соответствует $H^{2n-2k}(M_\Delta, \Lambda)$.*

Теорема 4.2.5 [19]. *Кольцо условий $\mathscr{R}_n(\Lambda)$ изоморфно тропическому кольцу $T\mathscr{R}_n(\Lambda)$ всех Λ-взвешенных вееров. (Кольца $\mathscr{R}_n(\mathbb{Z})$, $\mathscr{R}_n(\mathbb{C})$ имеют схожее описание.)*

В частности, так как вложения $T\mathscr{R}_n(\Lambda, \Delta) \subset T\mathscr{R}_n(\Lambda)$ по всем Δ исчерпывают кольцо $T\mathscr{R}_n(\Lambda)$, то упоминавшиеся ранее (см. формулу (4.1)) вложения $H^\bullet(M, \Lambda) \hookrightarrow \mathscr{R}_n(\Lambda)$ по всем гладким полным торическим многообразиям M исчерпывают кольцо условий.

Наша дальнейшая цель – описать явно изоморфизмы из двух предшествующих теорем. Изоморфизм кольца когомологий очевиден: класс $\alpha \in H^{2n-2k}(M, \Lambda)$ переходит в тропический веер, состоящий из k-мерных конусов C веера $\Delta^\perp$, которым приписаны веса $\alpha \cdot T_C$ (напомним, что T_C – орбита торического многообразия, соответствующая конусу C).

Изоморфизм кольца условий с кольцом тропических вееров требует некоторого дополнительного обсуждения, которому посвящены два следующих пункта.

4.2.3. *Теорема Кушниренко–Бернштейна и кольцо* $\mathscr{R}_n(\Lambda)$. Пусть $\{\Gamma_i\}$ – семейство n гиперповерхностей в $(\mathbb{C}^*)^n$, определенное уравнениями $P_i = 0$, где P_i – полиномы Лорана с многогранником Ньютона Δ_i. Теорема Кушниренко–Бернштейна (теорема 2.2.1) может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 4.2.6. *Индекс пересечения гиперповерхностей Γ_i в кольце условий равен целочисленному смешанному объему многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_n$.*

Пусть $\mathscr{F}_i$ – тропический $(n-1)$-веер, двойственный Δ_i (см. определение 3.3.2). Согласно замечанию 4.2.3 тропическая теорема Кушниренко–Бернштейна 3.1.3 означает для этих вееров следующее.

Теорема 4.2.7. *Индекс пересечения гиперповерхностей Γ_i в кольце условий $\mathscr{R}_n$ равен индексу пересечения тропических вееров $\mathscr{F}_i$ в кольце $T\mathscr{R}_n$.*

Таким образом, теорему 4.2.5 можно рассматривать как обобщение теоремы Кушниренко–Бернштейна.

В частности, при отождествлении $\mathscr{R}_n$ с $T\mathscr{R}_n$ каждая гиперповерхность отправляется в двойственный тропический веер многогранника Ньютона ее уравнения. Так как оба кольца порождены своими одномерными компонентами, это замечание уже однозначно определяет их отождествление.

Однако тропический веер, соответствующий циклу произвольной коразмерности, можно указать и более явно. Этому посвящен следующий пункт.

4.2.4. *Тропические вееры подмногообразий тора.* Каждому k-мерному многообразию $V \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ соответствует его класс в кольце условий, который кодируется некоторым тропическим веером $\mathbb{T}V$ – тропикализацией V. Опишем этот веер более явно. Мы уже описали явно тропикализацию нульмерных циклов и гиперповерхностей, теперь сделаем это для произвольного k.

Носитель веера $\mathbb{T}V$ – это k-мерный остов Σ полного веера такого, что соответствующее торическое многообразие X является хорошей компактификацией V, т. е. замыкание $\overline{V}$ пересекает орбиты коразмерности k по изолированным точкам. Благодаря этому для каждой такой орбиты σ корректно определен ее индекс пересечения i_σ с $\overline{V}$. Приписывая в веере Σ вес i_σ конусу, соответствующему орбите σ, мы превращаем Σ в сбалансированный взвешенный веер, который равен тропикализации $\mathbb{T}V$.

Оказывается (см. [62]), что при подходящем выборе веера Σ замыкание $\overline{V}$ будет обладать свойством Коэна–Маколея в каждой точке пересечения с k-мерной орбитой σ торического многообразия X, что упрощает алгебраическое вычисление индекса пересечения i_σ (см., например, явную алгебраическую формулу в [43]).

4.2.5. *Связь с теоремами соответствия.* Пусть $A \ni 0$ – конечное множество мономов двух переменных, обозначим через $\mathbb{C}^A_1$ пространство всех полиномов – линейных комбинаций этих мономов, имеющих свободный член 1. Напомним, что многообразие Севери S_d плоских кривых с d нодами – это замыкание в пространстве $\mathbb{C}^A_1$ множества всех полиномов φ таких, что уравнение $\varphi = 0$ задает в $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ приведенную неприводимую кривую с d простыми самопересечениями и без других особенностей.

Теорему соответствия Михалкина можно следующим образом проинтерпретировать в терминах тропического веера $\mathbb{T}S_d$ многообразия Севери.

Теорема соответствия изучает количество кривых из S_d, проходящих через данный набор q точек плоскости $z_1, \dots, z_q$ общего положения (для того единственного q, при котором указанное количество кривых положительно и конечно).

Обозначив через $H_i \subset \mathbb{C}^A_1$ гиперплоскость инцидентности $\{\varphi \mid \varphi(z_i) = 0\}$, заметим, что искомые кривые соответствуют точкам пересечения многообразия S_d и гиперплоскостей H_i.

Таким образом, искомая величина – индекс пересечения S_d и плоскостей H_i, а он равен индексу пересечения их тропических вееров $\mathbb{T}S_d$ и $\mathbb{T}H_i$. Этот индекс пересечения по определению равен взвешенному числу точек пересечения $\mathbb{T}S_d$ и тропических гиперповерхностей N_i, представляющих собой сдвиги вееров $\mathbb{T}H_i$ на векторы общего положения.

Тропическую гиперповерхность N_i можно интерпретировать как множество инцидентности: объемлющее пространство $\mathbb{T}^A_1$ будем рассматривать как пространство тропических полиномов с носителем $A \ni 0$ и единичным свободным членом, а N_i определим как $\{\varphi \mid \varphi(z_i) = 0\}$, где φ – тропический полином, z_i – точка общего положения тропической плоскости, а равенство нулю понимается так же, как в п. 3.1 (т. е. точка z_i лежит на тропической кривой, задаваемой полиномом φ).

Тогда оказывается, что полиномы φ_j, являющиеся точками пересечения $\mathbb{T}S_d$ и N_j, задают в точности нодальные тропические кривые в смысле теоремы соответствия Михалкина, проходящие через точки общего положения z_i.

Таким образом, если нам известен тропический веер многообразия Севери S_d, мы можем вывести из этого описания тропическую теорему соответствия для кривых с d простыми самопересечениями. (Заметим, однако, что этот тропический веер полностью известен только для малых d.)

Более общим образом, если A – конечное множество мономов от n переменных, а $S \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^A$ – замыкание множества всех полиномов φ таких, что гиперповерхность φ имеет предписанный набор особенностей, то знания тропического веера $\mathbb{T}S$ достаточно, чтобы установить тропическую теорему соответствия для гиперповерхностей с данным носителем уравнения и данным набором особенностей.

В частности, такое знание имеется для множества всех гиперповерхностей с одной нетривиальной особенностью, т. е. для A-дискриминанта Гельфанда–Зелевинского–Капранова [21]. Это позволило в работе [45] получить тропическую теорему соответствия для таких гиперповерхностей. В п. 3.5 набросок этого вывода дан для случая $n = 2$.

В качестве следующего шага в работе [16] описан тропический веер множества гиперповерхностей с двумя нетривиальными особенностями (см. также [12] для случая $n = 1$). Это описание основано на исчислении характеристических классов подмногообразий комплексного тора со значениями в кольце условий. Этому исчислению посвящен следующий пункт.

4.3. Тропические характеристические классы. Обозначим для краткости через C_k компоненту коразмерности k в кольце условий C комплексного тора $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. В работе [16] доказано существование следующего объекта.

Определение 4.3.1. *Тропический характеристический класс* – это отображение, ставящее в соответствие каждому алгебраическому подмножеству $V \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ элемент $\langle V \rangle = \langle V \rangle_0 + \dots + \langle V \rangle_n \in C$, $\langle V \rangle_i \in C_i$, и обладающее следующими свойствами:

1) если подмножество $V \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ имеет коразмерность k, то $\langle V \rangle_i = 0$ для $i < k$, $\langle V \rangle_k$ – класс V в пространстве C_k, а $\langle V \rangle_n \in C_0 = \mathbb{Z}$ совпадает с эйлеровой характеристикой $e(V)$;

2) для произвольных $U, V \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ и общего $g \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ верно равенство $\langle U \cap gV \rangle = \langle U \rangle \langle V \rangle$;

3) для двух комплексных торов X и Y и любых алгебраических подмножеств $U \subset X$ и $V \subset Y$ выполняется равенство $\langle U \times V \rangle = \langle U \rangle \times \langle V \rangle$;

4) отображение, ставящее в соответствие элемент $\langle V \rangle$ характеристической функции V, продолжается по линейности на пространство всех конструктивных функций $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \to \mathbb{Z}$ – в частности, $\langle U \cap V \rangle + \langle U \cup V \rangle = \langle U \rangle + \langle V \rangle$ (напомним, что *конструктивной функцией* называется линейная комбинация характеристических функций алгебраических множеств);

5) для морфизма $p\colon X \to Y$ комплексных торов и алгебраического подмножества $V \subset X$ верно равенство $p_*\langle V \rangle = \langle p_* V \rangle$; здесь $p_* V\colon Y \to \mathbb{Z}$ обозначает *прямой образ в смысле Макферсона* подмножества V, значение которого в каждой точке $y \in Y$ определяется как $e\bigl(p^{-1}(y) \cap V\bigr)$;

6) для гладкой торической компактификации $X \supset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ такой, что аффинный характеристический класс $\langle V \rangle$ содержится в когомологиях $H^\bullet(X) \subset C$, данный класс является двойственным по Пуанкаре к *классу Шварц–Макферсона* множества V в X (см. [44] и [52]).

Заметим, что аффинный характеристический класс однозначно определяется как свойством 6), так и свойствами 1)–5). Также важно подчеркнуть, что в 6) берется характеристический класс незамкнутого в X конструктивного множества V, а не его замыкания.

Вычислим $\langle V \rangle$ в предположении, что V является хорошим многообразием, т. е. существует такой веер Σ, что замыкание V в соответствующей торической компактификации $X_\Sigma \supset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ гладкое и пересекает орбиты X_Σ трансверсально.

Для любого конуса $\Gamma \in \Sigma$ через V_Γ обозначим пересечение замыкания V с Γ-орбитой X_Σ.

Утверждение 4.3.2 ([16], см. также [23]). *Если V – хорошее многообразие, то класс $\langle V \rangle_i \in C_i$ представлен взвешенным веером (P, φ), $P \subset \mathbb{Q}^n$, $\varphi\colon P \to \mathbb{Q}$, где P – объединение всех конусов коразмерности i в Σ, а значение φ на каждом таком конусе Γ равно эйлеровой характеристике $e(V_\Gamma)$.*

Пример 4.3.3. Если V – гиперповерхность общего положения с многогранником Ньютона Δ, то, вычисляя $e(V_\Gamma)$ по формуле Кушниренко, получим $\langle V \rangle = [\Delta]/(1 + [\Delta])$, или $\langle V \rangle_i = -(-[\Delta])^i$, где $[B]$ – двойственный тропический веер многогранника B (см. определение 3.3.2).

Далее, если $V_1, \dots, V_k$ – набор гиперповерхностей общего положения с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, то, ввиду мультипликативности аффинных характеристических классов, имеем

$$\langle V_1 \cap \dots \cap V_k \rangle = \frac{[\Delta_1] \cdots [\Delta_k]}{(1 + [\Delta_1]) \cdots (1 + [\Delta_k])}\,. \tag{4.4}$$

В частности, отсюда следует формула из [35] для эйлеровой характеристики невырожденного полного пересечения, а правая часть равенства (4.4), которая возникала в [35] и последующей литературе на правах формального выражения, обретает геометрический смысл.

5. Хорошие компактификации подмногообразий тора

Мы продемонстрируем, что для всякого m-мерного алгебраического многообразия $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ существует веер W, для соответствующей торической компактификации $M_W \supset (\mathbb{C}^*)^n$ которого верно следующее: *замыкание X не пересекает орбит компактификации M_W коразмерности больше m*. Будут описаны все торические компактификации, обладающие этим свойством. Будет дано качественное описание множества асимптотик мероморфных кривых, лежащих на многообразии X.

Торические многообразия образуют замечательный класс пополнений группы $(\mathbb{C}^*)^n$. Пусть X – алгебраическое подмногообразие в торе $(\mathbb{C}^*)^n$. Как подобрать торическую компактификацию M_W такую, что замыкание $\overline{X} \subset M_W$ многообразия X устроено наиболее просто?

Если X задано достаточно общей системой полиномиальных уравнений с фиксированными многогранниками Ньютона, то можно так выбрать неособую проективную торическую компактификацию M_W, чтобы многообразие $\overline{X} \subset M_W$ было неособым и трансверсальным всем орбитам многообразия M_W (см. [34]). Существует много компактификаций M_W, обладающих этим свойством. Все они могут быть явно описаны в терминах многогранников Ньютона уравнений, определяющих X. Эта конструкция позволяет в терминах многогранников Ньютона явно вычислить основные дискретные инварианты многообразия X. Теория многогранников Ньютона в значительной степени основана на этой конструкции.

Если X – особое многообразие, то для всякой торической компактификации многообразие $\overline{X}$ тоже будет особым (так как $X = \overline{X} \cap (\mathbb{C}^*)^n$). Даже если X неособо, то, вообще говоря, нельзя выбрать компактификацию M_W, для которой $\overline{X}$ трансверсально орбитам многообразия M_W или хотя бы гладко.

Однако для любого многообразия X, все компоненты которого имеют размерность m, можно так выбрать торическую компактификацию M_W, чтобы многообразие $\overline{X}$ не пересекало орбит в M_W, коразмерность которых больше m. Существует много компактификаций M_W, обладающих этим свойством, среди них есть гладкие проективные компактификации. Все они могут быть явно описаны в терминах конуса Бергмана (см. ниже) многообразия X. Этот раздел посвящен доказательству и подробному обсуждению этой теоремы. Мы опираемся на теорему о тропическом базисе (см., например, [32]), но ни в каком виде не используем ее доказательства. Ниже подробно обсуждается формулировка этой теоремы и приводятся необходимые дополнения к ней.

Приведем здесь один из центральных результатов этого раздела, который можно сформулировать, не упоминая о торических многообразиях. Главный член ростка мероморфной кривой $f\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^*)^n$, $f(t) = at^k + \cdots$, равен at^k, где $a \in (\mathbb{C}^*)^n$ и $t^k = (t^{k_1}, \dots, t^{k_n})$. Луч $l = \{\lambda k\}$, $\lambda \geqslant 0$, называется существенным для многообразия $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$, если есть росток кривой $f\colon (\mathbb{C}, 0) \to X$, векторная степень k главного члена которой не равна нулю и лежит в l. Согласно теореме 5.4.6, для многообразия X, все компоненты которого имеют размерность m, существует так называемый конус Бергмана $B(X)$, обладающий следующими свойствами: 1) $B(X) \subset (\mathbb{R}^n)^*$ есть конечное объединение m-мерных замкнутых рациональных конусов[1]; 2) луч l существенен для X тогда и только тогда, когда $l \in B(X)$ и l – рациональный луч.

Заметим также, что этот конус совпадает с носителем тропического веера многообразия X, определенного в разделе 4, – факт этого совпадения известен как теорема Капранова (см., например, [13]).

Первая конструкция, связывающая с m-мерным многообразием $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ некоторый вещественный m-мерный конус $K(X)$ в $(\mathbb{R}^n)^*$, появилась в пионерской статье Дж. Бергмана [3]. Его определение конуса $K(X)$ основано не на алгебре, а на анализе и существенно отличается от определения конуса $B(X)$, тем не менее $K(X) = B(X)$. Определение конуса $K(X)$ и равенство $K(X) = B(X)$ не важны для нашего описания кольца условий, поэтому мы не будем его рассматривать в этой работе.

[1] В этом разделе через $\mathbb{R}^n$ и $(\mathbb{R}^n)^*$ обозначены соответственно пространство характеров и пространство однопараметрических подгрупп тора $(\mathbb{C}^*)^n$.

5.1. Теорема о тропическом базисе. В этом пункте мы напоминаем теорему о существовании тропического базиса в любом идеале кольца полиномов Лорана n переменных [32], играющую ключевую роль в настоящей статье, и доказываем некоторые дополнения к этой теореме.

5.1.1. *Тор, его характеры и полиномы Лорана.* С тором $(\mathbb{C}^*)^n$ связано пространство характеров $\mathbb{R}^n$, содержащее решетку характеров $\mathbb{Z}^n$. Точка $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ этой решетки отождествляется с характером (мономом) $\chi_m = z^m = z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}$.

Полином Лорана $P = \sum c_m z^m$ – это линейная комбинация с комплексными коэффициентами c_m мономов z^m. Полином Лорана – регулярная функция на торе $(\mathbb{C}^*)^n$, и всякая рациональная функция $P\colon (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{C}$, не имеющая полюсов на торе, является полиномом Лорана. *Носитель $S(P)$ полинома Лорана* $P = \sum c_m z^m$ – это множество точек $m \in \mathbb{Z}^n$, для которых $c_m \neq 0$. *Многогранник Ньютона* $\Delta(P)$ полинома Лорана P – это выпуклая оболочка носителя $S(P)$ в пространстве характеров $\mathbb{R}^n$.

С каждой линейной функцией $\xi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ на этом пространстве связано *укорочение $P^{(\xi)}$ по порядку ξ* полинома Лорана $P = \sum c_m z^m$. По определению, $P^{(\xi)} = \sum\limits_{m \in B} c_m z^m$, где B – подмножество в носителе $S(P)$ полинома P, на котором достигает *минимума* линейная функция ξ.

Обозначим через $\mathscr{R}$ кольцо полиномов Лорана на $(\mathbb{C}^*)^n$. С каждым идеалом I в кольце $\mathscr{R}$ и с каждым порядком ξ связан идеал $I^{(\xi)}$, порожденный укорочениями по порядку ξ всех полиномов Лорана из идеала I (при $\xi \equiv 0$ идеалы I и $I^{(\xi)}$ совпадают).

5.1.2. *Тропический базис идеала.* Конечное множество $\{Q_j\} \subset I$ называется *тропическим базисом идеала* I, если для всякого порядка ξ идеал $I^{(\xi)}$ порожден полиномами Лорана $\{Q_j^{(\xi)}\}$. Кольцо $\mathscr{R}$ обладает следующим свойством тропической нётеровости: в каждом идеале I кольца $\mathscr{R}$ существует тропический базис. Наиболее сильная версия этой известной теоремы была найдена относительно недавно [32]. Приведем ее формулировку.

Рассмотрим произвольную ограниченную область U в пространстве характеров $\mathbb{R}^n$. Конечное множество $M \subset I$ назовем U-приближением идеала I, если для каждого $P \in I$, для которого $\Delta(P) \subset U$, существует $Q \in M$ такой, что $\Delta(Q) = \Delta(P)$. Для фиксированной области U во всяком идеале I существует U-приближение, содержащее не более чем $N(U)$ элементов, где $N(U)$ – число различных целочисленных многогранников в U. Зафиксируем стандартную метрику в $\mathbb{R}^n$ и обозначим через B_ρ открытый шар радиуса ρ с центром в начале координат.

Теорема 5.1.1 (теорема о тропическом базисе). *Существует функция $R = R(r, n)$ такая, что если $\Delta(P) \subset B_r$ для всех элементов P из некоторого базиса идеала I, то любое B_R-приближение идеала I является тропическим базисом в I.*

Доказательство этой теоремы использует теорему Зайденберга, уточняющую свойство нётеровости кольца полиномов, и технику базисов Грёбнера.

Функцию $R(r,n)$, фигурирующую в теореме, можно описать явно. Однако теорема не может иметь практических применений, так как функция $R(r,n)$ слишком быстро растет с ростом n.

5.1.3. *Дополнения к теореме о тропическом базисе.* Нам понадобятся небольшие дополнения к теореме о тропическом базисе. Пусть $\bar\xi = (\xi_1,\dots,\xi_k)$ – упорядоченный набор нескольких ковекторов. Такой набор задает отображение $\pi_{\bar\xi}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, определенное формулой $\pi_{\bar\xi}(x) = (\langle\xi_1,x\rangle,\dots,\langle\xi_k,x\rangle) \in \mathbb{R}^k$. Каждому моному $m \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ ставится в соответствие его $\bar\xi$-степень $q = \pi_{\bar\xi}(m) \in \mathbb{R}^k$. Полином Лорана P называется однородным $\bar\xi$-степени q, если все входящие в него мономы имеют $\bar\xi$-степень, равную q. Пространство $\mathbb{R}^k$ мы будем рассматривать с лексикографическим порядком (т. е. $(x_1,\dots,x_k) > (y_1,\dots,y_k)$, если существует $p \leqslant k$ такое, что $x_i = y_i$ при $i < p$ и $x_p > y_p$).

С набором $\bar\xi$ связано укорочение $P^{(\bar\xi)}$ по мультипорядку $\bar\xi$ полинома Лорана $P = \sum c_m z^m$. По определению, $P^{(\bar\xi)} = \sum\limits_{m\in B} c_m z^m$, где B – подмножество в носителе $S(P)$ полинома P, на котором $\bar\xi$-степень $\pi_{\bar\xi}(m)$ принимает *наименьшее* значение.

Лемма 5.1.2. *Пусть $A \subset \mathbb{Z}^n$ – конечное множество и $\bar\xi$ – фиксированный набор ковекторов. Тогда найдется $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$ такой, что для $m_1, m_2 \in A$ неравенства $\pi_{\bar\xi}(m_1) > \pi_{\bar\xi}(m_2)$ и $\langle\xi,m_1\rangle > \langle\xi,m_2\rangle$ эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $M = \max_{\xi_i\in\bar\xi, m\in A} |\langle\xi_i,m\rangle|$, где ξ_i – ковекторы из набора ковекторов $\bar\xi$ и $m \in A$. Легко проверить, что в качестве ξ достаточно взять ковектор $\xi_1 + \varepsilon\xi_2 + \dots + \varepsilon^{k-1}\xi_k$, где $0 < \varepsilon < \max\{1, M/(M+1)\}$. Лемма доказана.

С каждым идеалом I в кольце $\mathscr{R}$ и каждым мультипорядком $\bar\xi$ связан идеал $I^{(\bar\xi)}$, порожденный укорочениями по мультипорядку $\bar\xi$ всех полиномов Лорана из идеала I.

Теорема 5.1.3. *Если $\{Q_j\}$ – тропический базис идеала I, то для всякого мультипорядка $\bar\xi$ укорочения $\{Q_j^{(\bar\xi)}\}$ образуют базис идеала $I^{(\bar\xi)}$.*

Доказательство. Надо показать, что для $P \in I$ укорочение $P^{(\bar\xi)}$ лежит в идеале, порожденном $\{Q_j^{(\bar\xi)}\}$. Пусть A – объединение носителей полиномов Лорана P и $\{Q_j\}$, а ξ – ковектор из предшествующей леммы. Тогда $P^{(\bar\xi)} = P^{(\xi)}$ и $\{Q_j^{(\bar\xi)}\} = \{Q_j^{(\xi)}\}$. Теперь требуемое утверждение вытекает из определения тропического базиса. Теорема доказана.

Каждый полином Лорана P раскладывается в сумму компонент, однородных относительно $\bar\xi$-степени: $P = \sum\limits_{q\in\mathbb{R}^k} P_q$, где P_q – однородный полином Лорана $\bar\xi$-степени q.

Лемма 5.1.4. *В идеале $I^{(\bar\xi)}$ вместе с каждым полиномом Лорана P содержатся все его однородные относительно $\bar\xi$-степени компоненты P_q. При выполнении условий предыдущей теоремы однородная компонента P_q представима в виде $P_q = \sum\limits_j Q_j T_j$, причем суммы $\bar\xi$-степеней полиномов Q_j и T_j равны q.*

Доказательство. По определению идеал $I^{(\bar{\xi})}$ порожден $\bar{\xi}$-однородными полиномами Лорана. Данная лемма доказывается в точности так же, как для идеалов, однородных относительно обычной степени.

5.2. Замыкание многообразия $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ в аффинном торическом многообразии. Пусть $\mathscr{R}$ – кольцо полиномов Лорана, $\Sigma \subset (\mathbb{R}^n)^*$ – веер, состоящий из конуса σ и его граней, M_Σ – соответствующее аффинное торическое многообразие и $\mathscr{R}_\Sigma$ – кольцо регулярных функций на M_Σ. Полином Лорана f принадлежит кольцу $\mathscr{R}_\Sigma$ тогда и только тогда, когда многогранник Ньютона $\Delta(f)$ лежит в двойственном σ конусе $C_\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \sigma \rangle \leqslant 0\}$.

Лемма 5.2.1. *Если $f \in \mathscr{R}$ и $f^k \in \mathscr{R}_\Sigma$ при некотором $k > 0$, то $f \in \mathscr{R}_\Sigma$.*

Доказательство. Пусть $\Delta(f)$ – многогранник Ньютона полинома Лорана f. По условию, $\Delta(f^k) = k\Delta(f) \subset C_\Sigma$. Отсюда получаем, что $\Delta(f) \subset C_\Sigma$, т. е. $f \in \mathscr{R}_\Sigma$. Лемма доказана.

Для идеала I в кольце полиномов Лорана $\mathscr{R}$ обозначим через I_Σ идеал в кольце $\mathscr{R}_\Sigma$, равный $I \cap \mathscr{R}_\Sigma$. Из доказанной леммы вытекает следующий факт.

Следствие 5.2.2. *Если $f \in \mathscr{R}$ и $f^k \in I_\Sigma$, то f лежит в радикале идеала $I_\Sigma \subset \mathscr{R}_\Sigma$. Если $I \subset \mathscr{R}$ – радикальный идеал, то $I_\Sigma \subset \mathscr{R}_\Sigma$ – тоже радикальный идеал.*

Пусть O – орбита наименьшей размерности в M_Σ. Орбиту O можно отождествить с тором, являющимся факторгруппой группы $(\mathbb{C}^*)^n$. Обозначим через L_Σ максимальное линейное подпространство, содержащееся в конусе C_Σ. Характеры тора O можно отождествить с точками решетки $\mathbb{Z}^n \cap L_\Sigma$. Кольцо $\mathscr{R}_{(O)}$ регулярных функций на O можно отождествить с подкольцом в $\mathscr{R}$, состоящим из полиномов Лорана, многогранники Ньютона которых лежат в L_Σ. Для функции $F \in \mathscr{R}_\Sigma$ обозначим через $F|_O$ ограничение F на O. Отображение $F \to F\big|_O$ является гомоморфизмом кольца $\mathscr{R}_\Sigma$ на кольцо $\mathscr{R}_{(O)}$. Целые точки $m \in C_\Sigma$, не лежащие в L_Σ, соответствуют характерам $\chi_m \in \mathscr{R}_\Sigma$, для которых $\chi_m\big|_O \equiv 0$. Сказанное можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 5.2.3. *Если $\Delta(F) \cap L_\Sigma = \varnothing$, то $F\big|_O \equiv 0$.*

Определение 5.2.4. Полином Лорана $F \in \mathscr{R}_\Sigma$ называется Σ-приведенным, если на конусе σ опорная функция многогранника $\Delta(F)$ обращается в нуль.

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 5.2.5. *Полином Лорана $f \in \mathscr{R}_\Sigma$ является Σ-приведенным тогда и только тогда, когда $\Delta(f) \cap L_\Sigma \neq \varnothing$.*

Обозначим через $I_{(O,\Sigma)}$ образ идеала $I_\Sigma \subset \mathscr{R}_\Sigma$ при гомоморфизме, переводящем функцию $F \in \mathscr{R}_\Sigma$ в ее ограничение $F\big|_O$ на орбиту O. Пусть ξ – любой ковектор из внутренности $|\sigma^0|$ носителя конуса σ. Каждый элемент идеала $I_{(O,\Sigma)}$ – это полином Лорана $Q^{(\xi)}$, где Q – это Σ-приведенный полином Лорана из идеала $I \subset \mathscr{R}$, а $Q^{(\xi)}$ – укорочение Q по порядку ξ.

Теорема 5.2.6. *Множество $\overline{X} \cap O$ совпадает с множеством нулей идеала $I_{(O,\Sigma)} \subset \mathscr{R}_{(O)}$. Другими словами, множество $\overline{X} \cap O$ задается в орбите O системой уравнений $\{Q_\alpha^{(\xi)} = 0\}$, в которой Q_α пробегает множество всех Σ-приведенных полиномов Лорана идеала $I \subset \mathscr{R}$.*

Доказательство. Пересечение $\overline{X} \cap O$ задается системой уравнений $F\big|_O = 0$, где $F \in I_\Sigma$.

Замечание 5.2.7. Идеал $I_{(O,\Sigma)} \subset \mathscr{R}_{(O)}$ может не быть радикальным, даже если идеал $I_\Sigma \subset \mathscr{R}_\Sigma$ радикален: многообразие $\overline{X}$ может касаться орбиты O.

Полином Лорана F будем называть Σ-приводимым, если опорная функция $H_{\Delta(F)}$ его многогранника Ньютона линейна на носителе конусе σ, т. е. для любого $\xi \in |\sigma|$ выполнено равенство $H_{\Delta(F)}(\xi) = \langle \xi, m(F) \rangle$. Точка $m(F) \in \mathbb{Z}^n$ определена этим равенством с точностью до прибавления любой точки решетки $L_\Sigma \cap \mathbb{Z}^n$. Полином Лорана $\widetilde{F} = Fx^{-m(F)}$ будем называть Σ-приведением полинома Лорана F (Σ-приведение имеет смысл лишь для Σ-приводимых полиномов Лорана и определено с точностью до умножения на характер χ_k, где $k \in L_\Sigma \cap \mathbb{Z}^n$).

Пусть для некоторого $\xi \in |\sigma^0|$ идеал $I \subset \mathscr{R}$ имеет базис $\{Q_j\}$, каждый элемент Q_j которого является Σ-приводимым полиномом Лорана. Зафиксируем набор $\{\widetilde{Q}_j\}$ некоторых Σ-приведений этих полиномов Лорана.

Следствие 5.2.8. *При перечисленных выше предположениях набор $\{\widetilde{Q}_j^{(\xi)}\}$ образует базис идеала $I_{(O,\Sigma)} \subset \mathscr{R}_{(O)}$.*

5.3. Тропический базис идеала и замыкание многообразия его нулей.

5.3.1. *Тропический базис и аффинные торические многообразия.* Здесь мы продолжаем использовать обозначения из п. 5.2. Предположим, что $\{Q_j\}$ – тропический базис идеала $I \subset \mathscr{R}$. Будем говорить, что веер Σ аффинного торического многообразия удобен для этого базиса, если все $\{Q_j\}$ являются Σ-приводимыми полиномами Лорана. Легко проверить следующее утверждение.

Утверждение 5.3.1. *Веер Σ удобен для $\{Q_j\}$ тогда и только тогда, когда $|\sigma|$ принадлежит одному из конусов веера $\Delta_b^\perp$, двойственного многограннику $\Delta_b = \sum \Delta(Q_j)$.*

Зафиксируем некоторые Σ-приведения $\{\widetilde{Q}_j\}$ всех полиномов Лорана тропического базиса $\{Q_j\}$ идеала $I \subset \mathscr{R}$. Функции $\{\widetilde{Q}_j\}$ регулярны на аффинном торическом многообразии M_Σ.

Теорема 5.3.2. *Замыкание $\overline{X} \subset M_\Sigma$ множества нулей $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ идеала I может быть задано в многообразии M_Σ системой уравнений $\{\widetilde{Q}_j = 0\}$.*

Доказательство. Под действием тора $(\mathbb{C}^*)^n$ многообразие M_Σ распадается на орбиты. Для каждой из орбит докажем, что множество решений системы, принадлежащих этой орбите, совпадает с ее пересечением с $\overline{X}$. Для орбиты $(\mathbb{C}^*)^n$ наибольшей размерности это очевидно, так как множество решений системы в торе равно X. Для орбиты O минимальной размерности это вытекает из следствия 5.2.8, так как по определению тропического базиса полиномы Лорана $\widetilde{Q}_j^{(\xi)}$ порождают идеал $I^{(\xi)}$. Орбита O_1 промежуточной размерности соответствует некоторой грани γ конуса σ. Пусть Γ – веер, состоящий из конуса γ и его граней. Орбита O_1 содержится в аффинном торическом многообразии $M_\Gamma \subset M_\Sigma$ и является орбитой минимальной размерности в этом многообразии. Все полиномы Лорана $\widetilde{Q}_j$ являются Γ-приведенными полиномами: опорные функции их многогранников Ньютона обращаются в нуль на конусе $|\gamma|$, так как $|\gamma| \subset |\sigma|$. Теперь случай орбиты O_1 разбирается так же, как и случай орбиты O. Теорема доказана.

Полиномы Лорана $\widetilde{Q}_j$ являются Σ-приведенными. Поэтому при $\xi \in |\sigma|^0$ функции $\widetilde{Q}_j^{(\xi)}$ естественно отождествляются с полиномами Лорана кольца $\mathscr{R}_{(O)}$, которые мы будем обозначать T_j.

Теорема 5.3.3. *Функции* $\{T_j\} = \{\widetilde{Q}_j^{(\xi)}\}$ *образуют тропический базис идеала* $I_{(O,\Sigma)}$ *кольца* $\mathscr{R}_{(O)}$.

Доказательство. Решетка $\Lambda = L_\Sigma \cap \mathbb{Z}^n$ в пространстве $L_\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, ортогональном конусу $|\sigma|$, естественно отождествляется с решеткой характеров факторгруппы O тора $(\mathbb{C}^*)^n$. Пусть $\alpha \in L_\Sigma^*$ – произвольный ковектор пространства L_Σ и $\widetilde{\alpha} \in (\mathbb{R}^n)^*$ – любой ковектор пространства $\mathbb{R}^n$, обладающий свойством $\pi^*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$, где $\pi\colon L_\Sigma \to \mathbb{R}^n$ – естественное вложение. Рассмотрим набор ковекторов $\bar{\xi} = (\xi, \widetilde{\alpha})$. Согласно теореме 5.1.3 функции $\{\widetilde{Q}_j^{(\bar{\xi})}\}$ образуют базис идеала $I^{(\bar{\xi})}$. Функции $\{\widetilde{Q}_j^{(\bar{\xi})}\}$ естественно отождествляются с полиномами Лорана $\{T_j^{(\alpha)}\}$. Функции $\{T_j^{(\alpha)}\}$ образуют базис идеала $I^{(\bar{\xi})}$ в кольце $\mathscr{R}$, и, следовательно, они образуют базис $I_{(O,\Sigma)}^{(\alpha)}$ в кольце $\mathscr{R}_{(O)}$. Теорема доказана.

Пусть $|\gamma| \subset |\sigma|$ – некоторая грань конуса $|\sigma|$ и O_1 – соответствующая ей орбита многообразия M_Σ. С гранью $|\gamma|$ связаны два аффинных торических многообразия.

Первое из них – это n-мерное торическое многообразие M_Γ, построенное по вееру Γ, содержащему конус γ и его грани. Многообразие M_Γ – открытое по Зарискому подмножество в M_Σ, являющееся дополнением до множества орбит, замыкания которых не содержат O_1 (в частности, $O_1 \subset M_\Gamma$).

Второе из них – это $(n - \dim_{\mathbb{R}} \gamma)$-мерное многообразие $\overline{O}_1$, являющееся замыканием в M_Σ орбиты O_1. Орбита O_1 естественно отождествляется с $(n - \dim_{\mathbb{R}} \gamma)$-мерным тором, являющимся фактором тора $(\mathbb{C}^*)^n$. Многообразие $\overline{O}_1$ является аффинным торическим многообразием относительно действия тора O_1. Обозначим через L_Γ максимальное линейное подпространство, содержащееся в конусе C_Γ. Характеры тора O_1 можно отождествить с точками решетки $\mathbb{Z}^n \cap L_\Gamma$ в пространстве $L_\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, ортогональном конусу $\gamma \subset (\mathbb{R}^n)^*$. Кольцо $\mathscr{R}_{(O_1)}$ регулярных функций на торе O_1 можно отождествить с подкольцом в $\mathscr{R}$, состоящим из полиномов Лорана, многогранники Ньютона которых лежат в L_Γ.

Пусть $I \subset \mathscr{R}$ – идеал в кольце полиномов Лорана $\mathscr{R}$ и $\{Q_j\}$ – его тропический базис. Пусть X – многообразие нулей идеала I в торе $(\mathbb{C}^*)^n$ и $\overline{X}$ – замыкание этого многообразия в M_Σ. Обозначим через $X_0 = \overline{X} \cap O$ и $X_1 = \overline{X} \cap O_1$ пересечения многообразия $\overline{X}$ с орбитами O и O_1.

Теорема 5.3.4. *Если все элементы тропического базиса $\{Q_j\}$ являются Σ-приводимыми полиномами Лорана, то множество предельных точек многообразия X_1 в орбите O совпадает с многообразием X_0.*

Доказательство. Зафиксируем некоторые Σ-приведения $\{\widetilde{Q}_j\}$ элементов тропического базиса $\{Q_j\}$. Многообразие $\overline{X}$ задается в многообразии M_Σ системой уравнений $\widetilde{Q}_j = 0$ (см. теорему 5.3.2). Эти уравнения, ограниченные на орбиты O и O_1, определяют многообразия X_0 и X_1.

Рассмотрим теперь аффинное подмногообразие $M_\Gamma \subset M_\Sigma$, минимальной орбитой в котором является орбита O_1. Пусть $I_{(O_1,\Gamma)}$ – образ идеала $I_\Gamma = I \cap \mathscr{R}_\Gamma$ при ограничении функций кольца $\mathscr{R}_\Gamma$ на орбиту O_1. Пусть $\xi \in |\gamma^0|$ – некоторый ковектор. По теореме 5.3.3 функции $\{T_j\} = \{\widetilde{Q}_j^{(\xi)}\}$ образуют тропический базис идеала $I_{(O_1,\Gamma)}$.

Мы приходим к уже изученной ситуации в меньшей размерности. В торе O_1 имеются многообразие X_1 нулей идеала $I_{(O_1,\Gamma)}$ и полиномы Лорана $\{T_j\}$, образующие тропический базис идеала $I_{(O_1,\Gamma)}$. Замыкание $\overline{O}_1$ в многообразии M_Σ орбиты O_1 является торическим многообразием относительно действия тора O_1. Конус многообразия $\overline{O}_1$ в пространстве характеров равен $C_\Sigma \cap L_\Gamma \supset L_\Sigma$. Многогранники Ньютона полиномов Лорана $\{T_j\}$ имеют непустые пересечения с пространством L_Σ и, следовательно, с пространством L_Γ. Поэтому торическая компактификация $\overline{O}_1$ тора O_1 удобна для тропического базиса $\{T_j\}$. Согласно теореме 5.3.2 пересечение $\overline{X}_1 \cap O$ задается на O системой уравнений $\bigl\{T_j\big|_O = 0\bigr\}$. Согласно той же теореме многообразие $X_0 \subset O$ задается на O системой уравнений $\bigl\{\widetilde{Q}_j\big|_O = 0\bigr\}$. Эти две системы уравнений идентичны. Поэтому $X_0 = \overline{X}_1 \cap O$. Теорема доказана.

5.3.2. *Тропический базис и общие торические многообразия.* Пусть в каждой орбите O_i некоторого торического многообразия M_W фиксировано алгебраическое многообразие $Y_i \subset O_i$.

Определение 5.3.5. Будем говорить, что набор подмногообразий $Y_i \subset O_i$ согласован относительно замыкания, если для каждой пары орбит O_j и O_i такой, что O_j лежит в замыкании O_i, многообразие Y_j совпадает с множеством предельных точек в O_j многообразия Y_i.

Перенесем теорему 5.3.4 на торические многообразия M_W, не являющиеся аффинными. Пусть $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ – многообразие нулей идеала I и $\{Q_j\}$ – некоторый тропический базис в I. Будем говорить, что веер W торического многообразия M_W удобен для этого базиса, если все $\{Q_j\}$ являются Σ-приводимыми полиномами Лорана для каждого аффинного подвеера Σ в веере W.

Пусть $\overline{X}$ – замыкание многообразия X в торическом многообразии M_W. Обозначим через $X_i = O_i \cap \overline{X}$ пересечение многообразия $\overline{X}$ с орбитами O_i многообразия M_W.

Теорема 5.3.6. *Если веер W удобен для некоторого тропического базиса идеала I, то многообразия $X_i \subset O_i$ согласованы относительно замыкания.*

Доказательство. Если O_j лежит в замыкании O_i и σ_j, σ_i – конусы, соответствующие этим орбитам, то конус σ_i является гранью конуса σ_j. Орбиты O_i, O_j лежат в аффинном торическом многообразии M_Σ, веер Σ которого состоит из конуса σ_j и всех его граней. Нужное утверждение сводится теперь к теореме 5.3.4. Теорема доказана.

Теорема 5.3.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.3.6. *Тогда*:

1) *объединение U орбит O многообразия M_W, для которых $\overline{X} \cap O \neq \varnothing$, образует торическое подмногообразие $M_{W(X)}$ в M_W*;

2) *если все компоненты многообразия X имеют размерность m, то для орбиты $O \subset M_{W(X)}$ коразмерности k каждая компонента пересечения $\overline{X} \cap O$ имеет размерность $m - k$.*

Доказательство. 1) Пусть орбита O_j лежит в замыкании орбиты O_i. Тогда по теореме 5.3.6 многообразие $X_j = \overline{X} \cap O_j$ содержится в замыкании многообразия $X_i = \overline{X} \cap O_i$. Следовательно, если $X_i = \varnothing$, то и $X_j = \varnothing$, т. е. множество U открыто по Зарискому и $M_{W(X)}$ является торическим многообразием.

2) Если орбита $O_i \subset M_{W(X)}$ имеет коразмерность 1, то она примыкает к орбите $O_0 = (\mathbb{C}^*)^n$, т. е. орбита O_i является гладкой гиперповерхностью в торическом многообразии $O_i \cup O_0$. Многообразие X_i состоит из предельных точек многообразия X в гиперповерхности. Следовательно, все компоненты многообразия X_i имеют размерность $m - 1$. Пусть теорема доказана для орбит коразмерности $p - 1$. Если орбита $O_j \subset M_{W(X)}$ имеет коразмерность p, то она примыкает к некоторой орбите O_i коразмерности $p - 1$. В этом случае орбита O_j является гладкой гиперповерхностью в торическом многообразии $O_j \cup O_i$. Многообразие X_j состоит из предельных точек многообразия X_i в гиперповерхности. Поэтому все компоненты многообразия X_j имеют размерность $m - (p - 1) - 1 = m - p$.

Теорема доказана.

5.4. Конус Бергмана многообразия $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$.

5.4.1. *Неинвариантное определение конуса Бергмана.* Пусть X – подмногообразие в $(\mathbb{C}^*)^n$, все неприводимые компоненты которого имеют размерность m. В теореме 5.3.7 введено торическое многообразие $M_{W(X)}$. Это многообразие определено неинвариантно. Оно зависит от выбора идеала I, множеством нулей которого является многообразие X (инвариантно определен лишь радикал идеала I), от выбора тропического базиса в идеале I и от выбора веера W, удобного для этого базиса. Определим конус Бергмана многообразия X, используя веер $W(X)$. Ниже мы покажем, что конус Бергмана является инвариантом многообразия X и не зависит от произвола в выборе объектов,, участвующих в его определении.

Определение 5.4.1. Конусом Бергмана $B(X) \subset (\mathbb{R}^n)^*$ многообразия $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ называется носитель $|W(X)| \subset (\mathbb{R}^n)^*$ веера $W(X)$ торического многообразия, введенного в теореме 5.3.7.

Из определения конуса Бергмана автоматически вытекает следующее утверждение.

Утверждение 5.4.2. *Конус Бергмана многообразия, все компоненты которого имеют (комплексную) размерность m, является конечным объединением замкнутых m-мерных рациональных конусов.*

5.4.2. *Асимптотики кривых, лежащих на многообразии.* Рассмотрим росток в точке $0 \in \mathbb{C}$ мероморфного отображения $f\colon (\mathbb{C}, 0) \to X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ комплексной прямой в X. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ – координаты в $(\mathbb{C}^*)^n$ и t – координата в $\mathbb{C}$. Тогда с точностью до слагаемых меньшего порядка функция f записывается в виде $f = (a_1 t^{k_1} + \cdots, \ldots, a_n t^{k_n} + \cdots)$, или $f = at^k + \cdots$, где $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$, $t^k = (t^{k_1}, \ldots, t^{k_n})$. *Какие асимптотики $f(t) = at^k + \cdots$ могут встретиться у кривых $f\colon (\mathbb{C}, 0) \to X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ на многообразии X?*

Несложно доказать следующие два утверждения.

Утверждение 5.4.3. *Для всякой кривой $f\colon (\mathbb{C}, 0) \to X$, имеющей асимптотику $f(t) = at^k + \cdots$, коэффициент $a \in (\mathbb{C}^*)^n$ является нулем идеала $I^{(k)}$.*

Доказательство. Для всякого $P \in I$ выполняется тождество $P(f(t)) \equiv 0$. Но $P(f(t)) = P^{(k)}(a)t^m + \cdots$, где $m = H(\Delta(P))(k)$. Следовательно, $P^{(k)}(a) = 0$. Утверждение доказано.

Утверждение 5.4.4. *Если точка $a \in (\mathbb{C}^*)^n$ есть нуль идеала $I^{(k)}$, то существует кривая $f\colon (\mathbb{C}, 0) \to X$, имеющая асимптотику $f(t) = at^{kq} + \cdots$, где q – некоторое положительное число.*

Доказательство. Для $k = 0$ в качестве кривой f можно взять постоянное отображение $f(t) \equiv a$, где $a \in X$ – нуль идеала I. Для $k \neq 0$ рассмотрим одномерный конус σ в пространстве $(\mathbb{R}^n)^*$, порожденный ковектором k. Пусть M_Σ – торическое многообразие, веер Σ которого содержит конус σ и вершину 0. Всякий полином Лорана является Σ-приводимым для этого веера. Пусть $\widetilde{P}$ – некоторое Σ-приведение полинома Лорана P. Пересечение $\overline{X}$ с $(n-1)$-мерной орбитой $O \subset M_\Sigma$ задается системой уравнений $\widetilde{P}^{(k)} = 0$ для $P \in I$. Сделав, если надо, автоморфизм тора $(\mathbb{C}^*)^n$, можно считать, что конус σ – это луч $(x_1, 0, \ldots, 0)$, где $x_1 \geqslant 0$, а $(n-1)$-мерная орбита O задается в $M_\Sigma = \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^*)^{n-1}$ уравнением $z_1 = 0$, где z_1 – координата в $\mathbb{C}$. В таких координатах Σ-приведение полинома Лорана P – это полином Лорана $\widetilde{P}$, все мономы которого имеют неотрицательные степени по z_1, и $\widetilde{P}^{(k)}$ – это сумма мономов из P, имеющих нулевую степень по z_1 (множество таких мономов в $\widetilde{P}$ должно быть непусто). Пусть $X_0 = \overline{X} \cap O$. Множество нулей идеала $I^{(k)}$ в $(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^*)^{n-1}$ имеет вид $\mathbb{C}^* \times X_0$. Так как X_0 – замыкание X в O, то для каждой точки $b \in X_0$ существует росток кривой $f\colon (\mathbb{C}, 0) \to X$ такой, что $\lim_{t \to 0} f(t) = b$. Старший член асимптотики этой кривой имеет вид ct^m:

$$f = (ct^m + \cdots, b + \cdots), \quad \text{где} \quad m \geqslant 0, \quad c \neq 0.$$

Замена параметра $\tau = dt$ позволяет сделать коэффициент при τ^m любым ненулевым числом w. Итак, мы предъявили кривую в X, векторная степень $(m, 0, \ldots, 0)$ которой пропорциональна k, а коэффициент (w, b) является заданным нулем идеала $I^{(k)}$ в торе $\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^*)^{n-1} = (\mathbb{C}^*)^n$. Утверждение доказано.

Ковектор $k \in (\mathbb{Z}^n)^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$ существенен для многообразия $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$, если существует кривая $f\colon (\mathbb{C}, 0) \to X$ с асимптотикой $f(t) = at^m + \cdots$, векторная степень m которой равна kq, где $q > 0$.

Следствие 5.4.5. *Ковектор $k \in (\mathbb{Z}^n)^*$ является существенным для многообразия $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ нулей идеала $I \subset \mathscr{R}$ тогда и только тогда, когда укорочение $I^{(k)}$ идеала I по ненулевому ковектору k не совпадает с кольцом $\mathscr{R}$.*

Нулевой ковектор является существенным для любого непустого многообразия X. Ковекторы, различающиеся положительным множителем, существенны или несущественны для X одновременно. Напомним, что рациональный луч $l \in (\mathbb{Z}^n)^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$ называется существенным для многообразия $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$, если целочисленные ковекторы, лежащие на l, существенны для X.

5.4.3. *Конус Бергмана и существенные лучи.* Следующая теорема описывает структуру множества существенных лучей многообразия X, все компоненты которого имеют одну и ту же размерность m.

Теорема 5.4.6. *Пусть все компоненты многообразия $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ имеют размерность m. Рациональный луч $l \in (\mathbb{R}^n)^*$ существенен для X тогда и только тогда, когда l принадлежит конусу Бергмана $B(X)$ многообразия X. Конус $B(X)$ равен замыканию объединения всех существенных для X лучей.*

Доказательство. Каждый существенный луч l многообразия X содержится в некотором конусе веера $W(X)$. Действительно, если кривая $f(t) = at^k + \cdots$ при $0 \neq k \in l$ лежит в многообразии X, то $z = \lim_{t\to 0} f(t) \in \overline{x}$ и, следовательно, z лежит в некоторой орбите $O \subset M_{W(X)}$. В этом случае $k \in |\sigma^0|$, где σ – конус из веера $W(X)$, соответствующий орбите O.

Обратно, пусть $0 \neq k \in |\sigma^0|$, где σ – конус из веера $W(X)$. Пусть Σ – веер, состоящий из конуса σ и его граней. Все элементы $\{Q_j\}$ тропического базиса идеала I являются Σ-приводимыми полиномами Лорана. Идеал $I^{(k)}$ порожден полиномами Лорана $\{Q_j^{(k)}\}$, причем полиномы Лорана $\{Q_j^{(k)}\}$ для всех векторов $k \in |\sigma^0|$ совпадают. Идеал $I^{(k)}$ имеет непустое множество нулей, так как многообразие $\overline{X}$ пересекает орбиту O по непустому множеству. Согласно утверждению 5.4.4 на многообразии X есть кривая $f(t) = at^{kq} + \cdots$, где a – нуль идеала $I^{(k)}$ и $q > 0$. Луч λk, где $\lambda \geqslant 0$, является существенным для X. Теорема доказана.

Теорема 5.4.6 показывает, что конус Бергмана определен инвариантно. Она также дает возможность распространить определение конуса Бергмана на подмногообразия $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$, различные компоненты которых могут иметь различные размерности.

Определение 5.4.7. Конусом Бергмана $B(X) \subset (\mathbb{R}^n)^*$ многообразия $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ называется замыкание объединения множества лучей, являющихся существенными для X.

Следствие 5.4.8. 1) $B(X \cup Y) = B(X) \cup (Y)$.

2) $B(X \cap Y) \subset B(X) \cap (Y)$.

3) $B(X)$ – *объединение конечного числа рациональных конусов (разных размерностей).*

4) *Рациональный луч* l *существенен для* X *тогда и только тогда, когда* $l \subset B(X)$.

5) *Для многообразия, все компоненты которого имеют размерность* m, *определения* 5.4.1 *и* 5.4.7 *эквивалентны.*

Доказательство. Пункты 1) и 2) очевидны. Пункты 3) и 4) вытекают из теоремы 5.4.6 и п. 1). Пункт 5) вытекает из теоремы 5.4.6. Следствие доказано.

Пусть $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ – алгебраическое многообразие, $M_W \supset (\mathbb{C}^*)^n$ – торическое многообразие и $\overline{X}$ – замыкание X в M_W.

Теорема 5.4.9. *Многообразие* $\overline{X}$ *является полным тогда и только тогда, когда* $B(X) \subset |W|$.

Мы не будем доказывать эту теорему: она доказывается так же, как теорема 5.4.6. Для формулировки следующей теоремы нам понадобится определение m-мерного остова W_m веера W: W_m – это подвеер в W, содержащий все конусы из W, размерность которых меньше или равна m.

Пусть $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ – алгебраическое многообразие, все компоненты которого имеют размерность m, $M_W \supset (\mathbb{C}^*)^n$ – торическое многообразие и $\overline{X}$ – замыкание X в M_W.

Теорема 5.4.10. *Многообразие* $\overline{X}$ *является полным многообразием, не пересекающим орбит многообразия* M_W, *коразмерность которых больше* m *тогда и только тогда, когда* $B(X) \subset |W_m|$.

Доказательство. Если $\overline{X}$ – полное многообразие, то по теореме 5.4.9 $B(X) \subset W$. Пусть $B(X)$ пересекается с множеством $|\sigma^0|$ некоторого конуса σ из W, для которого $\dim_{\mathbb{R}} \sigma > m$. Тогда $\overline{X}$ пересекает орбиту $O \subset M_W$, соответствующую конусу σ, коразмерность которой больше m. Поэтому если $\overline{X}$ не пересекает орбит коразмерности $> m$, то $B(X) \subset |W_m|$.

Обратно, допустим, что $B(X) \subset |W_m|$. В этом случае $\overline{X} \subset M_{W_m} \subset M_W$. Но многообразие M_{W_m} содержит лишь орбиты, коразмерность которых не превосходит m. Теорема доказана.

6. Кольца с двойственностью Горенштейна

6.1. Двойственность Горенштейна. Пусть A – коммутативная ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbf{k}$. С каждой $\mathbf{k}$-линейной функцией $L\colon A \to \mathbf{k}$ связана билинейная форма B_L на алгебре A, определенная равенством $B_L(a, b) = L(ab)$. Если форма B_L невырождена, то говорят, что она задает *двойственность Горенштейна* на алгебре A. Всякая алгебра определяется заданием образующих и соотношений между ними. Алгебру, на которой функция L задает двойственность Горенштейна, можно однозначно восстановить, если известны значения функции L на каждом полиноме от образующих алгебры. В этом пункте мы обсуждаем свойства алгебр с двойственностью Горенштейна и приводим два способа описания таких алгебр, которые несколько отличаются друг от друга.

Кольца когомологий гладких полных n-мерных торических многообразий и кольцо условий $\mathscr{R}_n$ комплексного тора $(\mathbb{C}^*)^n$ обладают двойственностью Горенштейна. Кроме того, эти кольца порождаются алгебраическими гиперповерхностями в соответствующих многообразиях. Поэтому кольца когомологий торических многообразий и кольцо $\mathscr{R}_n$ восстанавливаются по значениям индексов пересечения всевозможных наборов из n алгебраических гиперповерхностей в соответствующих многообразиях. Благодаря теореме Бернштейна–Кушниренко все такие индексы пересечения вычисляются в терминах объемов многогранников Ньютона уравнений, задающих гиперповерхности. Поэтому эти кольца можно описать в терминах объемов выпуклых целочисленных многогранников в $\mathbb{R}^n$. В конце раздела (см. п. 6.3.2) мы приводим два таких описания, которые несколько отличаются друг от друга.

6.1.1. *Алгебры с двойственностью Горенштейна.* Пусть M_1, M_2 – линейные пространства (возможно, бесконечномерные) над полем $\mathbf{k}$. Билинейная форма B, определенная на $M_1 \times M_2$, называется спариванием этих пространств. Спаривание позволяет поставить в соответствие каждому подпространству $M \subset M_1$ *ортогональное пространство* $M^{\perp} \subset M_2$, состоящее из всех векторов $b \in M_2$ таких, что $B(a,b) = 0$ для любого $a \in M$.

Спаривание называется невырожденным, если форма B невырождена (т. е. если: 1) для любого $a \in M_1 \setminus \{0\}$ найдется $b \in M_2$ такое, что $B(a,b) \neq 0$; 2) для любого $b \in M_2 \setminus \{0\}$ найдется $a \in M_1$ такое, что $B(a,b) \neq 0$).

Невырожденное спаривание задает вложение пространства M_2 в двойственное к M_1 пространство M_1^*, которое элементу $b \in M_2$ ставит в соответствие линейную функцию l_b на M_1 такую, что $l_b(a) = B(a,b)$. Если пространство M_1 конечномерно, то это вложение осуществляет изоморфизм пространств M_2 и M_1^*, в частности, $\dim M_1 = \dim M_2$.

Пусть $\mathscr{A}$ – коммутативная и ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbf{k}$.

Определение 6.1.1. С каждой $\mathbf{k}$-линейной функцией $\mathscr{L}\colon \mathscr{A} \to \mathbf{k}$ связана *симметричная* $\mathbf{k}$*-билинейная форма* $B_{\mathscr{L}}$ на $\mathscr{A}$, определенная равенством

$$B_{\mathscr{L}}(a,b) = \mathscr{L}(ab) \in \mathbf{k}.$$

Линейная функция $\mathscr{L}$ на алгебре $\mathscr{A}$ задает *двойственность Горенштейна*, если форма $B_{\mathscr{L}}$ невырождена.

Пример 6.1.2. Пусть A – некоторое подпространство в $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$, замкнутое относительно операции умножения функций. Пусть L – функционал, ставящий в соответствие функции $f \in A$ интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\phi\, d\mu$, где $\phi \in A$ – весовая функция, для которой мера множества $\phi^{-1}(0)$ равна нулю. Функционал L задает двойственность Горенштейна на A. Действительно, если $f \neq 0$, то $B_L(f, \phi f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f^2\phi^2\, d\mu > 0$.

Пример 6.1.3. Пусть A – $\mathbb{C}$-алгебра комплекснозначных функций на конечном множестве X. Пусть L – функционал, ставящий в соответствие функции $f \in A$ комплексное число $\displaystyle\sum_{x\in X} f(x)\phi(x)$, где $\phi \in A$ – весовая функция, не принимающая значения 0. Функционал L задает двойственность Горенштейна на A (так как если $f \neq 0$, то $B_L(f, \bar{\phi}\bar{f}) = \sum\limits_{x \in X} |f(x)|^2 |\phi(x)|^2 > 0$).

Пример 6.1.4. Пусть M – четномерное компактное ориентируемое вещественное многообразие без края размерности $2n$. Пусть A – коммутативная подалгебра кольца когомологий $H^*(M, \mathbb{R})$, состоящая из линейных комбинаций элементов четной размерности, т. е. $\alpha \in A$, если

$$\alpha = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \alpha_{2k}, \tag{6.1}$$

где $\alpha_{2k} \in H^{2k}(M, \mathbb{R})$. Пусть L – функционал, ставящий в соответствие элементу $\alpha \in A$, заданному соотношением (6.1), значение класса когомологий α_{2n} на фундаментальном цикле многообразия M. Согласно двойственности Пуанкаре форма B_L невырождена и функционал L задает на алгебре A двойственность Горенштейна.

Лемма 6.1.5. *Пусть $B_{\mathscr{L}}$ – (возможно, вырожденная) форма на алгебре $\mathscr{A}$. Тогда*:

1) *пространство $J^{\perp_{\mathscr{L}}} \subset \mathscr{A}$, ортогональное относительно формы $B_{\mathscr{L}}$ идеалу $J \subset \mathscr{A}$, является идеалом в алгебре $\mathscr{A}$*;

2) *ядро $\ker B_{\mathscr{L}}$ формы $B_{\mathscr{L}}$ является идеалом в алгебре $\mathscr{A}$.*

Доказательство. 1) Пусть $b \in J^{\perp_{\mathscr{L}}}$ и $c \in \mathscr{A}$. Тогда для всякого $a \in J$ справедливо равенство $B_{\mathscr{L}}(bc, a) = \mathscr{L}(bca) = 0$, так как $ca \in J$. Следовательно, $J^{\perp_{\mathscr{L}}}$ – идеал в алгебре $\mathscr{A}$.

2) Ядро $\ker B_{\mathscr{L}}$ ортогонально относительно формы $B_{\mathscr{L}}$ алгебре $\mathscr{A}$. Поэтому п. 2) вытекает из п. 1).

Лемма доказана.

Аннулятором J_{an} идеала $J \subset A$ называется идеал, состоящий из всех элементов $a \in A$ таких, что $ab = 0$ для всех элементов $b \in J$.

Лемма 6.1.6. *Если форма B_L невырождена, то для всякого идеала $J \subset A$ справедливо равенство $J^{\perp_L} = J_{\mathrm{an}}$.*

Доказательство. Включение $J_{\mathrm{an}} \subset J^{\perp_L}$ очевидно выполнено, даже если форма B_L вырождена. Обратно, пусть для некоторого $a \in J^{\perp_L}$ найдется элемент $b \in J$ такой, что $ab \neq 0$. Тогда в силу невырожденности формы B_L найдется $c \in A$, для которого $L((ab)c) \neq 0$. Следовательно, $L(a(bc)) \neq 0$ и элемент a не ортогонален элементу $bc \in J$. Противоречие доказывает, что $J_{\mathrm{an}} \supset J^{\perp_L}$ и, следовательно, $J_{\mathrm{an}} = J^{\perp_L}$. Лемма доказана.

Следствие 6.1.7. *Если L задает двойственность Горенштейна на A, то для всякого идеала $J \subset A$ идеал $J^{\perp_L}$ не зависит от выбора функции L.*

Следствие 6.1.8. *Если на A существует двойственность Горенштейна, то*:

1) *для всякого идеала J конечной коразмерности $m = \dim A/J$ идеал J_{an} конечномерен и $\dim J_{\mathrm{an}} = m$; при этом справедливо равенство $(J_{\mathrm{an}})_{\mathrm{an}} = J$;*

2) *для всякого идеала J конечной размерности $m = \dim J$ идеал J_{an} имеет конечную коразмерность и $\dim A/J_{\mathrm{an}} = m$; при этом справедливо равенство $(J_{\mathrm{an}})_{\mathrm{an}} = J$.*

Доказательство. Если форма B_L невырождена, то в условиях п. 1) она индуцирует изоморфизм пространств $(A/J)^*$ и J. В условиях п. 2) она индуцирует изоморфизм пространств J и $(A/J)^*$. Следствие доказано.

Это следствие доставляет необходимые условия для существования двойственности Горенштейна на алгебре A. В следующем пункте показывается, что для локальных алгебр эти условия являются достаточными.

6.1.2. *Локальные алгебры с двойственностью Горенштейна.* В этом пункте мы рассматриваем коммутативные ассоциативные $\mathbf{k}$-алгебры $\mathscr{A}$ с единицей, обладающие следующими свойствами:

(a) $\mathscr{A}$ – локальная алгебра, т. е. $\mathscr{A}$ содержит единственный максимальный идеал $\mathbf{m}$;

(b) поле вычетов $\mathscr{A}/\mathbf{m}$ изоморфно основному полю $\mathbf{k}$;

(c) существует натуральное k такое, что $\mathbf{m}^k = 0$.

Пусть $\mathbf{m}_{\mathrm{an}} \subset \mathscr{A}$ – аннулятор максимального идеала $\mathbf{m}$ алгебры $\mathscr{A}$, обладающей свойствами (a)–(c).

Лемма 6.1.9. 1) *Всякий ненулевой идеал $I \subset A$ содержит некоторый ненулевой элемент m идеала $\mathbf{m}_{\mathrm{an}}$.*

2) *Идеал (m), порожденный любым ненулевым элементом $m \in \mathbf{m}_{\mathrm{an}}$, является одномерным пространством над полем $\mathbf{k}$.*

Доказательство. 1) Пусть l – максимальное целое число такое, что идеал $I \cdot \mathbf{m}^l$ отличен от нуля. Любой ненулевой элемент m множества $I \cdot \mathbf{m}^l$ лежит в $\mathbf{m}_{\mathrm{an}}$, так как $m \cdot \mathbf{m} \subset I \cdot \mathbf{m}^{l+1} = 0$.

2) Так как $m \cdot \mathbf{m} = 0$, то $m \cdot \mathscr{A} = m \cdot (\mathscr{A}/\mathbf{m}) = m \cdot \mathbf{k}$.

Лемма доказана.

Лемма 6.1.10. *Билинейная форма $B_{\mathscr{L}}$ на алгебре $\mathscr{A}$, обладающей свойствами (a)–(c), невырождена тогда и только тогда, когда функция $\mathscr{L}$ не равна нулю ни на каком ненулевом элементе m идеала $\mathbf{m}_{\mathrm{an}}$. На алгебре $\mathscr{A}$ можно задать двойственность Горенштейна тогда и только тогда, когда идеал $\mathbf{m}_{\mathrm{an}}$ является одномерным пространством над полем $\mathbf{k}$.*

Доказательство. Пусть функция $\mathscr{L}$ не равна нулю ни на каком ненулевом элементе идеала $\mathbf{m}_{\mathrm{an}}$. Согласно п. 1) леммы 6.1.9, примененному к главному идеалу $(a) = I$, порожденному ненулевым элементом $a \in \mathscr{A}$, существует элемент $b \in \mathscr{A}$ такой, что элемент ab не равен нулю и $ab \in \mathbf{m}_{\mathrm{an}}$. Следовательно, форма $B_{\mathscr{L}}$ невырождена.

Если функция $\mathscr{L}$ обращается в нуль на ненулевом элементе $a \in \mathbf{m}_{\mathrm{an}}$, то элемент a принадлежит ядру формы $B_{\mathscr{L}}$ и, следовательно, форма $B_{\mathscr{L}}$ вырождена. Если размерность $\mathbf{k}$-линейного пространства $\mathbf{m}_{\mathrm{an}}$ больше единицы, то всякая линейная функция $\mathscr{L}$ обращается в нуль на некотором ненулевом элементе $a \in \mathbf{m}_{\mathrm{an}}$. Следовательно, на алгебре $\mathscr{A}$ все формы $B_{\mathscr{L}}$ вырождены.

Если же пространство $\mathbf{m}_{\mathrm{an}}$ одномерно и $\mathscr{L}$ не равна тождественно нулю на $\mathbf{m}_{\mathrm{an}}$, то форма $B_{\mathscr{L}}$ невырождена. Лемма доказана.

6.1.3. *Факторалгебры с двойственностью Горенштейна.* В этом пункте описываются все факторалгебры коммутативной и ассоциативной алгебры $\mathscr{A}$ с единицей, на которых существует двойственность Горенштейна.

Рассмотрим действие ρ алгебры $\mathscr{A}$ на двойственном пространстве $\mathscr{A}^*$, индуцированное умножением в алгебре $\mathscr{A}$: для линейной функции $\mathscr{L} \in \mathscr{A}^*$ и элемента $w \in \mathscr{A}$ функция $\rho(w)\mathscr{L}$ определяется равенством $\rho(w)\mathscr{L}(v) = \mathscr{L}(wv)$. С каждой линейной функцией $\mathscr{L} \in \mathscr{A}^*$ связано множество $J_{\mathscr{L}} \subset A$, состоящее из всех элементов w, для которых функция $\mathscr{L}_w = \rho(w)\mathscr{L}$ тождественно равна нулю. По определению множество $J_{\mathscr{L}}$ совпадает с ядром формы $B_{\mathscr{L}}$. Согласно лемме 6.1.5 множество $J_{\mathscr{L}} \subset \mathscr{A}$ является идеалом в алгебре $\mathscr{A}$.

ТЕОРЕМА 6.1.11. 1) *На факторалгебре* $\mathscr{A}_{\mathscr{L}} = \mathscr{A}/J_{\mathscr{L}}$ *функция* $L\colon \mathscr{A}_{\mathscr{L}} \to \mathbf{k}$, *индуцированная функцией* $\mathscr{L}$, *задает двойственность Горенштейна.*

2) *Обратно, пусть на факторалгебре* $A = \mathscr{A}/J$ *есть* $\mathbf{k}$-*линейная функция* L, *задающая двойственность Горенштейна. Тогда* $J = J_{\mathscr{L}}$, *где* $\mathscr{L} = \pi^* L$ *и* π – *гомоморфизм факторизации* $\pi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}/J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) На идеале $J_{\mathscr{L}}$ функция $\mathscr{L}$ обращается в нуль, так как если $w \in J_{\mathscr{L}}$, то $\mathscr{L}(w) = \mathscr{L}_w(e) = 0$. Поэтому функция $\mathscr{L}$ индуцирует некоторую функцию L на факторалгебре $\mathscr{A}/J_{\mathscr{L}}$. Ядро формы B_L равно нулю. Действительно, если $x \in \ker B_L$, то $w = \pi^{-1}(x) \in \ker B_{\mathscr{L}}$, где $\pi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}/J$ – гомоморфизм факторизации. Следовательно, $w \in J_{\mathscr{L}}$ и $x = \pi(w) = 0$.

2) Если форма B_L на $\mathscr{A}/J$ невырождена, то ядро формы $B_{\mathscr{L}}$ на $\mathscr{A}$, где $\mathscr{L} = \pi^* L$, совпадает с идеалом $J \subset \mathscr{A}$.

Теорема доказана.

Эта теорема дает возможность определить факторалгебры алгебры $\mathscr{A}$, на которых существует двойственность Горенштейна, при помощи ненулевой линейной функции $\mathscr{L}$ на алгебре $\mathscr{A}$.

ПРИМЕР 6.1.12. Пусть $\mathscr{A} = \mathbb{C}\{\{x_1, \dots, x_n\}\}$ – кольцо ростков аналитических функций в точке $0 \in \mathbb{C}^n$. Пусть $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{A}$ и точка 0 является изолированным корнем системы уравнений

$$f_1 = \dots = f_n = 0. \tag{6.2}$$

На кольце ростков $\mathscr{A} = \mathbb{C}\{\{x_1, \dots, x_n\}\}$ определен линейный функционал $\mathscr{L}$, значение которого на ростке $h \in \mathscr{A}$ задается формулой

$$\mathscr{L}(h) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|f_1| = \dots = |f_n| = \varepsilon} \frac{h(x)\, \mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_n}{f_1 \cdots f_n},$$

в которой ε – достаточно малое положительное число. Функционал $\mathscr{L}$ на алгебре $\mathscr{A}$ определяет факторалгебру $A_{\mathscr{L}}$, обладающую двойственностью Горенштейна. Можно показать, что *факторалгебра* $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ *совпадает с конечномерной локальной* $\mathbb{C}$-*алгеброй*

$$A = \mathscr{A}/(f_1, \dots, f_n),$$

связанной с корнем 0 системы (6.2). Минимальный идеал $\mathbf{m}_{\mathrm{an}}$ алгебры A порожден ростком в точке 0 якобиана

$$J(x) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

системы (6.2). Значение функционала $\mathscr{L}$ на якобиане J равно кратности μ корня 0 системы (6.2). Линейная функция $L\colon A \to \mathbb{C}$ задает невырожденную форму B_L на A тогда и только тогда, когда $L(J) \neq 0$.

Пример 6.1.13. Предыдущий пример имеет вещественную версию. Пусть $\mathscr{A} = \mathbb{R}\{\{x_1, \ldots, x_n\}\}$ – кольцо ростков вещественных аналитических функций в точке $0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{A}$, и пусть локальная $\mathbb{R}$-алгебра

$$A = \mathbb{R}\{\{x_1, \ldots, x_n\}\}/(f_1, \ldots, f_n)$$

конечномерна.

На алгебре A *существует двойственность Горенштейна*: минимальный идеал $\mathbf{m}_{\mathrm{an}}$ алгебры A порожден ростком в точке 0 якобиана J системы $f_1 = \cdots = f_n = 0$. Линейная функция $L\colon A \to \mathbb{R}$ задает невырожденную вещественную форму B_L на A тогда и только тогда, когда $L(J) \neq 0$.

Рассмотрим росток векторного поля $V = (f_1, \ldots, f_n)$ в точке $0 \in \mathbb{R}^n$. Классическая формула Левина–Эйзенбада вычисляет индекс векторного поля V в точке 0: *индекс поля V равен сигнатуре квадратичной формы K на алгебре A, определенной равенством $K(f) = L(f^2)$, где L – любая вещественная $\mathbb{R}$-линейная функция на A такая, что $L(J) > 0$.*

6.1.4. *Симметрическая алгебра линейного пространства.* С $\mathbf{k}$-линейным пространством M связана его *симметрическая алгебра $\mathscr{S}(M)$*, являющаяся свободной ассоциативной коммутативной $\mathbf{k}$-алгеброй с единицей, порожденной векторами пространства M. Элементы алгебры $\mathscr{S}(M)$ можно себе представлять как формальные полиномы с коэффициентами из поля $\mathbf{k}$ от векторов пространства M. Алгебра $\mathscr{S}(M)$ представляет собой градуированную алгебру

$$\mathscr{S}(M) = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1 + \cdots + \mathscr{A}_k + \cdots, \tag{6.3}$$

в которой компонента $\mathscr{A}_0$ совпадает с полем $\mathbf{k}$, а компонента $\mathscr{A}_k$ при $k > 0$ состоит из формальных однородных полиномов степени k от векторов пространства M.

Рассмотрим коммутативную алгебру A с единицей e, которая порождается как алгебра элементами некоторого $\mathbf{k}$-линейного пространства $V \subset A$. Пусть фиксировано $\mathbf{k}$-линейное отображение $\pi\colon M \to V$ пространства M на пространство V. Отображение π продолжается до гомоморфизма $\pi\colon \mathscr{A} \to A$ алгебры $\mathscr{A} = \mathscr{S}(M)$ на алгебру A.

Из теоремы 6.1.11 вытекает следующая теорема.

Теорема 6.1.14. *Если алгебра A обладает двойственностью Горенштейна, то она изоморфна алгебре $\mathscr{S}(M)_{\mathscr{L}}$ для некоторой $\mathbf{k}$-линейной функции $\mathscr{L}$ на симметрической алгебре $\mathscr{S}(M)$ пространства M.*

Итак, описание алгебр с двойственностью Горенштейна сводится к описанию двойственного пространства к алгебре $\mathscr{S}(M)$. Ниже мы приведем два различных описания пространства $\mathscr{S}(M)^*$, которые приводят к двум разным описаниям алгебр с двойственностью Горенштейна.

6.1.5. *Формальные ряды симметричных форм на пространстве M.* Пусть $T[M]$ – пространство формальных рядов

$$B = B_0 + B_1 + \cdots + B_k + \cdots ,$$

в которых k-е слагаемое B_k является $\mathbf{k}$-полилинейной симметричной k-формой на пространстве M. Покажем, что пространство $(\mathscr{S}(M))^*$ можно отождествить с пространством $T[M]$.

Как $\mathbf{k}$-линейное пространство алгебра $\mathscr{S}(M)$ порождена мономами $y_1 \cdots y_k$, где $y_1, \ldots, y_k$ – всевозможные неупорядоченные наборы k элементов из некоторого базиса пространства M. Определим спаривание пространств $T[M]$ и $\mathscr{S}(M)$.

Определение 6.1.15. Спаривание ряда $B \in T[M]$, где $B = B_0 + B_1 + \cdots + B_k + \cdots$, и монома $y_1 \cdots y_k$ определяется как значение $B_k(y_1, \ldots, y_k)$ k-формы B_k на наборе векторов $(y_1, \ldots, y_k)$. Это спаривание продолжается по линейности на все пространство $\mathscr{S}(M)$.

Легко проверить следующее утверждение.

Лемма 6.1.16. *Определенное выше спаривание пространств $T[M]$ и $\mathscr{S}(M)$ задает изоморфизм пространства $T[M]$ с двойственным пространством к алгебре $\mathscr{S}(M)$. Каждая линейная функция на $\mathscr{S}(M)$, равная нулю на всех компонентах $\mathscr{S}(M)_k$ порядка $k > n$, задается спариванием с конечной суммой симметричных форм $B = B_0 + \cdots + B_n$.*

Опишем алгебру $\mathscr{S}(M)_{\mathscr{L}(B)}$, построенную по функции $\mathscr{L}(B)$, соответствующей ряду $B = B_0 + \cdots + B_k + \cdots$, члены B_k которого являются симметричными k-формами на пространстве M. По определению идеал $I_{\mathscr{L}(B)} \subset \mathscr{S}(M)$, построенный по функции $\mathscr{L}(B)$, состоит из элементов $w \in \mathscr{S}(M)$, для которых оператор (w) аннулирует ряд B (т. е. $w \in I_{\mathscr{L}(B)}$ тогда и только тогда, когда все члены формального ряда $\rho(w)(B)$ тождественно равны нулю).

Теорема 6.1.17. *Алгебра $\mathscr{S}(M)_{\mathscr{L}(P)}$ является факторалгеброй алгебры $\mathscr{S}(M)$ по идеалу $I_{\mathscr{L}(B)}$, состоящему из элементов w, для которых ряд $\rho(w)(B)$ тождественно равен нулю.*

Степень $\mathbf{m}^k$ максимального идеала $\mathbf{m} \in \mathscr{S}(M)_{\mathscr{L}(B)}$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда ряд B является конечной суммой $B = B_0 + \cdots + B_{k-1}$.

Для другого описания пространства $(\mathscr{S}(M))^*$ нам потребуются свойства полиномов на (бесконечномерном) пространстве M, которые мы обсуждаем в следующем пункте.

6.1.6. *Полиномы на бесконечномерных пространствах.* Здесь мы напоминаем определение кольца полиномов $\mathbf{k}[M]$ на (бесконечномерном) $\mathbf{k}$-линейном пространстве M. Это кольцо является алгебраическим обобщением колец полиномов на конечномерных пространствах. Если явно не оговорено противное, мы считаем, что $\mathbf{k}$ – это поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, вещественных чисел $\mathbb{R}$ или рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Бесконечномерное пространство M часто рассматривают с некоторой топологией и ограничиваются рассмотрением полиномов, непрерывных в этой топологии. Нужное для наших целей алгебраическое определение соответствует самой слабой разумной топологии: подмножество в M открыто в этой топологии, если открыты его пересечения с каждым конечномерным подпространством (в топологии этого подпространства).

В п. 6.1.7 мы напомним, что рассматриваемая слабая топология пространства M достаточна для применимости к полиномам $P \in \mathbf{k}[M]$ привычного аппарата дифференциального исчисления. Нам пригодится этот аппарат, чтобы интерпретировать алгебру $\mathscr{S}(M)$ как алгебру дифференциальных операторов на кольце полиномов.

Определение 6.1.18. Функция $F\colon M \to \mathbf{k}$ называется:

– *полиномом степени* $\leqslant k$, если ее ограничение на любое конечномерное подпространство является полиномом степени $\leqslant k$;

– *однородным полиномом степени* k, если ее ограничение на любое конечномерное подпространство является однородным полиномом степени k (для каждого k функция, тождественно равная нулю, является однородным полиномом степени k);

– *полиномом*, если для некоторого k она является полиномом степени не выше k.

Полиномы на M образуют кольцо $\mathbf{k}[M]$ относительно естественных операций сложения и умножения. Полиномы степени $\leqslant k$ и однородные полиномы степени k образуют $\mathbf{k}$-линейные пространства.

К полиномам $P \in \mathbf{k}[M]$ применим привычный аппарат дифференциального исчисления.

Определение 6.1.19. *Производной Гато* $F'_v(x)$ функции F в точке $x \in M$ в направлении $v \in M$ называется предел

$$F'_v(x) = \lim_{t\to 0} \frac{F(x+tv)-F(x)}{t}\,,$$

если этот предел существует.

Сформулируем нужные нам свойства полиномов.

У каждого полинома существует производная Гато в каждой точке x в любом направлении v (для доказательства достаточно воспользоваться дифференцируемостью ограничения полинома на плоскость L, порожденную векторами x и v).

Если F – полином степени $\leqslant k$ (или однородный полином степени k), то как функция точки x производная $F'_v(x)$ – полином степени $\leqslant k-1$ (соответственно однородный полином степени $k-1$).

В каждой точке x производная $F'_v(x)$ линейно зависит от направления v.

Линейная функция D_xF, определенная равенством

$$D_xF(v) = F'_v(x),$$

называется дифференциалом функции F в точке x.

Пусть v_1, v_2 – два вектора. В каждой точке x вторая производная $F^{(2)}_{v_1,v_2}(x)$ является симметричной билинейной формой от векторов v_1, v_2. *Второй дифференциал $D^2_x F$ функции F в точке x* – это квадратичная форма, соответствующая билинейной форме $F^{(2)}_{v_1,v_2}(x)$, т. е.

$$D^2_x F(u) = F^{(2)}_{u,u}(x).$$

Прежде чем переходить к дифференциалам высших порядков, напомним определение поляризации однородного полинома.

Определение 6.1.20. Симметричная k-форма B называется *поляризацией* однородного полинома P степени k, если для всякого вектора u выполняется равенство $P(u) = B(u, \ldots, u)$.

Пусть $v_1, \ldots, v_m$ – набор из m векторов. В каждой точке x m-я производная $F^{(m)}_{v_1,\ldots,v_n}(x)$ симметрично и полилинейно зависит от векторов $v_1, \ldots, v_m$.

Определение 6.1.21. Дифференциал $D^m_x F$ в точке x – это однородный полином степени m, поляризацией которого является форма $F^{(m)}_{v_1,\ldots,v_n}(x)$, т. е. $D^m_x F(u) = F^{(m)}_{u,\ldots,u}(x)$.

Теорема 6.1.22 (формула Тейлора для полиномов). *Для всякого полинома $F\colon M \to \mathbf{k}$ степени $\leqslant k$ и всякой пары точек $x, u \in M$ справедливо равенство*

$$F(x+u) = F(x) + D_x F(u) + \frac{1}{2} D^2_x F(u) + \cdots + \frac{1}{k!} D^k_x F(u). \tag{6.4}$$

Доказательство. Формула (6.4) сводится к классической формуле Тейлора для ограничения $F\big|_L$ полинома F на плоскость L, порожденную векторами x, u.

Следствие 6.1.23. *Всякий полином $F\colon M \to \mathbf{k}$ степени $\leqslant k$ единственным образом раскладывается в сумму однородных полиномов степеней от нуля до k. Это разложение задает структуру градуированного кольца на $\mathbf{k}[M]$.*

Доказательство. Существование разложения вытекает из формулы Тейлора, примененной к полиному F в точке $x = 0$. Единственность вытекает из единственности полинома Тейлора для ограничений полинома F на одномерные подпространства. Следствие доказано.

Следствие 6.1.24. *У всякого однородного полинома F степени k существует единственная поляризация B. Эта поляризация задается формулой*

$$B(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} F^{(k)}_{v_1,\ldots,v_k}. \tag{6.5}$$

Доказательство. Согласно формуле Тейлора для однородного полинома F в точке 0 имеем $F(u) = D^k_0 F(u)/k!$. Форма $F^{(k)}_{v_1,\ldots,v_k}$ задает поляризацию дифференциала $D^k_0 F$. Поэтому k-форма B, определенная формулой (6.5), задает поляризацию полинома F. Единственность поляризации легко проверяется индукцией по степени однородного полинома F. Следствие доказано.

Формула (6.5) задает канонический изоморфизм пространства симметричных k-форм с пространством $\mathbf{k}[M]_k$ однородных полиномов степени k. Иногда полезна другая версия формулы (6.5) для поляризации однородного полинома, в которой вместо дифференцирования участвуют конечные разности.

Лемма 6.1.25. *Для произвольной точки $x \in M$ справедлива следующая формула для поляризации B однородного полинома F степени k:*

$$B(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \biggl((-1)^{k-j} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_j \leqslant k} F(x + v_{i_1} + \dots + v_{i_j}) \biggr). \tag{6.6}$$

Пример 6.1.26. Для $k = 2$ формула (6.6) доставляет следующее выражение симметричной билинейной формы B через связанную с ней квадратичную форму F:

$$B(v_1, v_2) = F(x + v_1 + v_2) - F(x + v_1) - F(x + vv_2) + F(x).$$

Наметим доказательство леммы 6.1.25 в случае $\mathbf{k} = \mathbb{R}$. По теореме Лагранжа (примененной к ограничению функции F на пространство, порожденное векторами $x, v_1, \dots, v_k$) найдутся числа $0 < \varepsilon_1 < 1, \dots, 0 < \varepsilon_k < 1$ такие, что

$$F^{(k)}_{v_1, \dots, v_k}(x + \varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_k v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \biggl((-1)^{k-j} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_j \leqslant k} F(x + v_{i_1} + \dots + v_{i_j}) \biggr).$$

Для полинома F степени k частная производная k-го порядка является константой, поэтому

$$F^{(k)}_{v_1, \dots, v_k}(x + \varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_k v_k) = F^{(k)}_{v_1, \dots, v_k}(0).$$

Отсюда вытекает утверждение леммы 6.1.25 для поля $\mathbf{k} = \mathbb{R}$.

6.1.7. *Формальные ряды полиномов и алгебра* $\mathrm{Diff}(M)$. Пусть $\mathbf{k}\{\{M\}\}$ – пространство формальных рядов

$$P = P_0 + P_1 + \dots + P_k + \cdots,$$

в которых k-е слагаемое P_k является однородным полиномом степени k на пространстве M. Определим коммутативную алгебру $\mathrm{Diff}(M)$ линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, действующими на пространстве $\mathbf{k}\{\{M\}\}$.

Определение 6.1.27. Алгебра $\mathrm{Diff}(M)$ – это алгебра операторов на кольце рядов $\mathbf{k}\{\{M\}\}$, порожденная операторами умножения на константы из поля $\mathbf{k}$ и операторами дифференцирования вдоль векторов $v \in M$.

Определим представление $\mathscr{D}\colon \mathscr{S}(M) \to \mathrm{Diff}(M)$ алгебры $\mathscr{S}(M)$ в алгебре $\mathrm{Diff}(M)$.

Определение 6.1.28. 1) Для $w = \lambda \in S^0(M) = \mathbf{k}$ ряд $\mathscr{D}(\lambda)(P)$ равен λP.

2) Для $w = v \in M = S^1(M)$ ряд $\mathscr{D}(v)P$ равен производной P'_v ряда P вдоль вектора v.

Равенства 1), 2) задают представление $\mathscr{D}$, так как алгебра $\mathscr{S}(M)$ порождена компонентами $\mathscr{S}^0(M)$ и $\mathscr{S}^1(M)$.

Легко видеть, что представление $\mathscr{D}$ устанавливает изоморфизм алгебр $\mathscr{S}(M)$ и $\mathrm{Diff}(M)$. Определим спаривание пространств $\mathbf{k}\{\{M\}\}$ и $\mathscr{S}(M)$.

Определение 6.1.29. Спаривание ряда $P \in \mathbf{k}\{\{M\}\}$ и элемента $w \in \mathscr{S}(M)$ определяется как свободный член ряда $\mathscr{D}(w)P$.

Легко проверить следующее утверждение.

Лемма 6.1.30. *Спаривание пространств $\mathbf{k}\{\{M\}\}$ и $\mathscr{S}(M)$ задает изоморфизм пространства $\mathbf{k}\{\{M\}\}$ с двойственным пространством к алгебре $\mathscr{S}(M)$. Каждая линейная функция на $\mathscr{S}(M)$, равная нулю на всех компонентах $\mathscr{S}(M)_k$ порядков, больших n, задается спариванием полиномов степени, не превосходящей n.*

Обозначим через $\Lambda\colon T[M] \to \mathbf{k}\{\{M\}\}$ отображение, переводящее ряд $B = B_0 + B_1 + \dots + B_k + \cdots$ в ряд $P = P_0 + P_1 + \dots + P_k + \cdots$, в котором однородный полином P_k степени k равен деленному на $k!$ ограничению k-формы B_k на диагональ, т. е.

$$P_k(x) = \frac{1}{k!} B_k(x, \dots, x). \tag{6.7}$$

Лемма 6.1.31. *Ряд $B \in T[M]$ и ряд из $\Lambda B \in \mathbf{k}\{\{M\}\}$ при отождествлении пространства $\mathscr{S}(M)^*$ с пространствами $T[M]$ и $\mathbf{k}\{\{M\}\}$ задают равные друг другу линейные функции на алгебре $\mathscr{S}(M)$.*

Доказательство. Согласно следствию 6.1.24 значение линейной функции, соответствующей k-форме B_k, на однородном элементе $w = v_1 \cdots v_k \in \mathscr{S}^k(M)$, равно значению на этом элементе линейной функции, соответствующей полиному $P_k = \Lambda B_k$. По линейности это равенство распространяется на все элементы пространства $T[M]$. Лемма доказана.

Опишем алгебру $\mathscr{S}(M)_{\mathscr{L}(P)}$, построенную по функции $\mathscr{L}(P)$, соответствующей ряду $P = P_0 + P_1 + \dots + P_k + \cdots$. Начнем с описания идеала $I_{\mathscr{L}(P)} \subset \mathscr{S}(M)$, построенного по функции $\mathscr{L}(P)$.

Лемма 6.1.32. *Идеал $I_{\mathscr{L}(P)}$ состоит из элементов $w \in \mathscr{S}(M)$, для которых оператор $\mathscr{D}(w)$ аннулирует ряд P (т. е. $w \in I_{\mathscr{L}(P)}$ тогда и только тогда, когда все члены формального ряда $\rho(w)(P)$ тождественно равны нулю).*

Теорема 6.1.33. *Алгебра $\mathscr{S}(M)_{\mathscr{L}(P)}$ является факторалгеброй алгебры $\mathscr{S}(M)$ по идеалу $I_{\mathscr{L}(P)}$, состоящему из элементов w, для которых ряд $\rho(w)(P)$ тождественно равен нулю.*

Степень $\mathbf{m}^k$ максимального идеала $\mathbf{m} \in \mathscr{S}(M)_{\mathscr{L}(P)}$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда ряд P является полиномом $P = P_0 + \dots + P_k$.

6.2. Гомологии гладких торических многообразий и кольца пересечений.

6.2.1. *Проективные торические многообразия.* Проективные торические многообразия допускают простое явное описание. Веер W такого многообразия двойственен некоторому n-мерному целочисленному многограннику Δ, т. е. $W = \Delta^{\perp}$. Равенство $W = \Delta^{\perp}$ не определяет многогранник Δ однозначно: существует много многогранников с одним и тем же двойственным веером.

С каждым многогранником Δ, для которого $W = \Delta^{\perp}$, связано отображение многообразия M_W в проективное пространство. Определим это отображение. Пусть Δ содержит N целых точек, $N = \#(\Delta \cap \mathbb{Z}^n)$. Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{CP}^{N-1}$ с координатами $x_1 : \dots : x_N$. Занумеруем в произвольном порядке характеры $\chi_1, \dots, \chi_N$, соответствующие целым точкам в многограннике Δ. Определим *отображение Кодаиры* $K_\Delta \colon (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{CP}^{N-1}$ следующей формулой:

$$K_\Delta(x) = \chi_1(x) : \dots : \chi_N(x). \tag{6.8}$$

Отображение K_Δ регулярно продолжается на многообразие M_W и определяет искомое отображение M_W в $\mathbb{CP}^{N-1}$. Отображение K_Δ, вообще говоря, не является вложением.

Для достаточно больших многогранников отображение $K_\Delta \colon M_W \to \mathbb{CP}^{N-1}$ *является вложением.* Будем говорить, что многогранник Δ *достаточно большой*, если для каждой его вершины A выполнено приведенное ниже условие A. Обозначим через $\Delta - A$ многогранник Δ, параллельно сдвинутый на вектор $-A$, и через $\Lambda(\Delta, A) \subset \mathbb{Z}^n$ полугруппу, состоящую из всех целых точек, лежащих в минимальном вещественном конусе, содержащем многогранник $\Delta - A$.

Условие A. *Полугруппа $\Lambda(\Delta, A)$ порождена точками пересечения многогранника $\Delta - A$ с решеткой $\mathbb{Z}^n$.*

Всякий целочисленный многогранник Δ после умножения на достаточно большое целое число становится достаточно большим многогранником (в качестве такого числа можно взять число $n + 1$).

Для достаточно больших многогранников Δ отображение

$$K_\Delta \colon M_W \to \mathbb{CP}^{N-1}$$

является вложением. При этом образ $K_\Delta(M_W)$ совпадает с замыканием образа $(\mathbb{C}^*)^n$ при отображении (6.8). Используя отображение K_Δ, зададим действие ρ группы $(\mathbb{C}^*)^n$ на проективном пространстве:

$$\rho(x) \colon (u_1 : \dots : u_N) \mapsto (\chi_1(x)u_1 : \dots : \chi_N(x)u_N).$$

Замыкание образа $K_\Delta((\mathbb{C}^*)^n)$ тора при отображении Кодаиры, снабженное действием ρ тора, представляет собой проективное торическое многообразие $M_{\Delta^\perp}$, изоморфное исходному многообразию $M_{\Delta^\perp}$.

Ограничение действия ρ на вещественный тор $T^n \subset (\mathbb{C}^*)^n$ сохраняет стандартную кэлерову метрику на проективном пространстве. С этим действием связано *отображение момента* $\Upsilon \colon \mathbb{CP}^{N-1} \to \mathbb{R}^n$, определенное с точностью до прибавления постоянного вектора $a \in \mathbb{R}^n$. (Отображение момента принимает значения в коалгебре Ли группы T^n, которая естественно отождествляется с пространством характеров $\mathbb{R}^n$.)

Особенно интересно ограничение Υ на $M_{\Delta^\perp} \subset \mathbb{CP}^{N-1}$. При подходящем выборе аддитивной постоянной $a \in \mathbb{R}^n$ оно отображает многообразие $M_{\Delta^\perp}$ на многогранник Δ. При этом орбита O_Γ, соответствующая конусу $\sigma^\Gamma \in \Delta^\perp$, двойственному грани $\Gamma \subset \Delta$, отображается во внутренность Γ° грани Γ (относительно топологии аффинного пространства, порожденного гранью Γ). Более того, Υ задает локально тривиальное расслоение орбиты O_Γ над Γ°, слоем которого является вещественный тор T^k, где $k = \dim_\mathbb{C} O_\Gamma$.

6.2.2. *Линейная функция на простом многограннике.* Напомним, что многогранник $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ называется *простым*, если в каждой его вершине сходится ровно n граней старшей размерности. Для каждой вершины A такого многогранника существует аффинное преобразование, переводящее A в нуль и окрестность точки A в Δ в окрестность нуля в положительном октанте $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$.

Линейную функцию $\xi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ будем называть *общей*, если она не постоянна ни на каком ребре многогранника Δ. *Индексом* общей линейной функции ξ в вершине $A \in \Delta$ называется число ребер, выходящих из A, вдоль которых ξ убывает. Грань $\Gamma \subset \Delta$ размерности i будем называть *ξ-выделенной* гранью, если она содержит некоторую вершину A индекса i и выходящие из нее i ребер, вдоль которых функция ξ убывает. В этой вершине A ограничение функции ξ на грань Γ достигает максимума.

С многогранником Δ связаны:

f-вектор $(f_0, f_1, \dots, f_n)$, компонента $f_i = f_i(\Delta)$ которого для $i = 0, 1, \dots, n$ равна числу i-мерных граней в Δ (число f_n полагается равным единице);

F-полином $F(t) = f_0 + f_1 t + \dots + f_n t^n$;

H-полином, определенный формулой $H(t) = F(t-1)$;

h-вектор $(h_0, h_1, \dots, h_n)$, компоненты $h_i = h_i(\Delta)$ которого для $i = 0, 1, \dots, n$ являются коэффициентами H-полинома, т. е. $H(t) = h_0 + h_1 t + \dots + h_n t^n$.

Лемма 6.2.1. *Для любой общей линейной функции ξ на простом многограннике Δ число $h_i(\xi)$ вершин индекса i равно $h_i(\Delta)$. Число ξ-выделенных i-мерных граней в Δ тоже равно $h_i(\Delta)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение φ множества граней многогранника Δ в множество его вершин, ставящее в соответствие грани Γ вершину $A \in \Gamma$, в которой ограничение ξ на Γ достигает максимума. Если индекс $A \in \Delta$ относительно ξ равен i, то множество $\varphi^{-1}(A)$ содержит C_i^k граней размерности k для всякого $k = 0, 1, \dots, n$. Следовательно,

$$f_k = \sum_i C_i^k h_i(\xi).$$

Совокупность этих равенств означает, что $h_k(\xi) = h_k(\Delta)$. Отображение φ задает взаимно однозначное соответствие между i-мерными ξ-выделенными гранями и вершинами индекса i. Лемма доказана.

Следствие 6.2.2 (теорема Дена–Соммервиля). *Для n-мерного простого многогранника Δ его h-вектор обладает следующими свойствами*:

1) $h_i(\Delta) = h_{n-i}(\Delta)$ *для* $0 \leqslant i \leqslant n$;

2) $h_i(\Delta) \geqslant 1$ *для* $0 \leqslant i \leqslant n$;

3) $h_0(\Delta) = h_n(\Delta) = 1$ (*это свойство эквивалентно равенству единице эйлеровой характеристики* $\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant n} (-1)^i f_i(\Delta)$ *простого многогранника* Δ).

Доказательство. 1) Если индекс вершины $A \in \Delta$ относительно общей линейной функции ξ равен i, то ее индекс относительно функции $-\xi$ равен $n-i$. Следовательно, $h_i(\xi) = h_{n-i}(-\xi)$. Теперь свойство 1) вытекает из леммы 6.2.1.

2) Для любого $0 \leqslant i \leqslant n$ и любой вершины A можно выбрать общую линейную функцию ξ так, чтобы индекс A относительно ξ равнялся i. Поэтому $h_i(\xi) \geqslant 1$.

3) Любая общая линейная функция ξ достигает максимума ровно в одной вершине многогранника Δ, поэтому $h_n(\xi) = 1$. Функция ξ достигает минимума ровно в одной вершине многогранника Δ, поэтому $h_0(\xi) = 1$. Согласно лемме 6.2.1 это означает, что $h_0(\Delta) = h_n(\Delta) = 1$. По определению значение H полинома в точке 0 равно $h_0(\Delta)$. Так как $F(-1) = H(0)$, то

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant n} (-1)^i f_i(\Delta) = h_0(\Delta) = 1.$$

Следствие доказано.

Как объяснено в следующем пункте, с целочисленно простым многогранником Δ связано гладкое проективное многообразие, нечетные числа Бетти которого равны нулю, а четные числа Бетти b_{2i} равны h_i. Равенство $h_i = h_{n-i}$ для таких многогранников вытекает из двойственности Пуанкаре для соответствующего торического многообразия. Двойственность Пуанкаре на гладком многообразии можно доказать, используя представление многообразия в виде двух CW-комплексов, один из которых построен по любой функции Морса f, а другой – при помощи функции $-f$. Определение индекса вершины простого многогранника относительно общей линейной функции и приведенное выше доказательство теоремы Дена–Соммервиля было мотивировано теорией Морса и доказательством двойственности Пуанкаре методами этой теории. Развитие этой идеи позволило получить новые результаты о комбинаторике многогранников, которые привели к решению старой проблемы о группах, порожденных отражениями в многомерных пространствах Лобачевского [37].

6.2.3. *Гомотопический тип гладких проективных торических многообразий.* Торическое многообразие M_W является гладким и проективным тогда и только тогда, когда веер W выпуклый и неособый, т. е. имеет вид $\Delta^{\perp}$, где Δ – целочисленно простой многогранник (см. определение 2.3.10). Ниже мы будем рассматривать именно такие многообразия M_W. Зафиксируем некоторый целочисленно простой многогранник Δ, для которого $W = \Delta^{\perp}$. Ниже, говоря о M_W, мы будем часто упоминать многогранник Δ и его грани. Отображение K_Δ вкладывает M_W в проективное пространство. Композиция $\xi \circ \Upsilon$ отображения момента с общей линейной функцией является функцией Морса на $M_{\Delta^\perp} = K_\Delta(M_W)$, критическими точками которой являются нульмерные орбиты на $M_{\Delta^\perp}$. При этом индекс Морса функции $\xi \circ \Upsilon$ на нульмерной орбите $B \in M_{\Delta^\perp}$ равен $2i$, где i – индекс вершины $A = \Upsilon(B) \in \Delta$ для линейной функции ξ.

Теорема 6.2.3. *Многообразие M_W, где $W = \Delta^\perp$ и Δ – целочисленно простой многогранник, имеет гомотопический тип CW-комплекса, содержащего лишь четномерные клетки, причем число $2i$-мерных клеток равно $h_i(\Delta)$. Группы $H_{2i}(M_W, \mathbb{Z})$ не имеют кручения, и числа Бетти $b_{2i}(M_W)$ равны $h_i(\Delta)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть функцию $\xi \circ \Upsilon$ как функцию Морса на M_W и воспользоваться приведенным выше геометрическим описанием ее критических точек и их индексов.

Каждой i-мерной грани Γ_k многогранника Δ соответствует i-мерный комплексный цикл $T(\Gamma_k)$ в M_W, для которого $\dim_\mathbb{R} T(\Gamma_k) = 2i$. Линейные комбинации циклов $T(\Gamma_k)$ порождают всю группу $H_{2i}(M_W, \mathbb{Z})$. Теория Морса также предлагает естественные базисы в группах гомологий.

Теорема 6.2.4. *Группа $H_{2i}(M_W, \mathbb{Z})$ при $W = \Delta^\perp$ порождена i-мерными торическими подмногообразиями $T(\Gamma_k)$ в M_W, которые являются замыканиями орбит O_{Γ_k}, $\dim_\mathbb{C} O_{\Gamma_k} = i$, соответствующих ξ-выделенным граням Γ_k, $\dim_\mathbb{R} \Gamma_k = i$, многогранника Δ.*

Теорема 6.2.4 допускает усиление, которое к тому же имеет более простое доказательство.

Определение 6.2.5. Гладкое компактное комплексное алгебраическое многообразие имеет структуру *алгебраического CW-комплекса*, если оно представлено в виде объединения непересекающихся клеток следующего вида. Каждая клетка является алгебраическим многообразием, изоморфным аффинному пространству $\mathbb{C}^i$, размерность которого зависит от выбора клетки. Замыкание каждой клетки является объединением этой клетки с клетками меньших размерностей.

Все гладкие компактные многообразия имеют гомотопический тип конечного CW-комплекса. Но компактные алгебраические многообразия только в исключительных случаях имеют структуру алгебраического CW-комплекса. Например, среди связных алгебраических кривых такая структура есть лишь у проективной прямой $\mathbb{CP}^1$.

Кольцо Чжоу алгебраического CW-комплекса изоморфно (после смены градуировки) его кольцу когомологий. Для общих алгебраических многообразий это далеко не так. Например, нулевая группа кольца Чжоу связной алгебраической кривой рода g содержит якобиан этой кривой, являющийся g-мерным комплексным абелевым тором.

Теорема 6.2.6. *Пусть ξ – общая линейная функция на целочисленно простом многограннике Δ. Тогда многообразие M_W, где $W = \Delta^\perp$, имеет структуру алгебраического CW-комплекса, клетки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами многогранника Δ. При этом $2i$-мерные клетки соответствуют вершинам, имеющим индекс i относительно* *функции ξ. Эти клетки состоят из орбит, соответствующих граням Γ многогранника Δ, для которых ограничение функции ξ на Γ достигает максимума в вершине A.*

Доказательство. Пусть $\tau \in (\mathbb{R}^n)^*$ – вектор из алгебры Ли группы $(\mathbb{C}^*)^n$, задающий функцию $-\xi$, т. е. $-\xi(x) = \langle \tau, x\rangle$. Не ограничивая общности, можно считать, что вектор τ целочисленный и соответствует алгебраической однопараметрической группе. Ее действие на торическом многообразии аналогично действию градиентного потока функции $-\xi$, но описывается значительно проще (нам не понадобится ни кэлерова метрика, ни отображение момента). Покажем, что под действием однопараметрической группы многообразие распадается на клетки, точки которых стремятся к нульмерным орбитам, различным для различных клеток. При этом клетка, точки которой стремятся к нульмерной орбите, соответствующей вершине A, представляют собой объединение орбит, описанных в условии теоремы.

Действительно, пусть $A_j \in \Delta$ – ближайшая к вершине A целая точка, лежащая на j-м ребре, проходящем через вершину A. Рассмотрим аффинное торическое подмногообразие, содержащее нульмерную орбиту, соответствующую вершине $A \in \Delta$. Это подмногообразие эквивариантно изоморфно стандартному пространству $\mathbb{C}^n$, снабженному индуцированным действием тора $(\mathbb{C}^*)^n$. Характер, соответствующий целой точке $A_j - A$, является j-й координатной функцией на этом пространстве $\mathbb{C}^n$. Однопараметрическая группа задает на $\mathbb{C}^n$ линейное диагональное действие: она умножает j-ю координату пространства на t^{k_j}, где t – параметр группы и $k_j = \langle \tau, A_j - A\rangle$.

Поэтому число k_j положительно тогда и только тогда, когда функция $-\xi$ возрастает при движении от вершины A по j-му ребру многогранника, и, следовательно, функция ξ возрастает. Под действием однопараметрической группы к началу координат будут стремиться те и только те точки, которые лежат в координатном подпространстве, для всех координат которого числа h_j положительны. Что и доказывает теорему.

Лемма 6.2.1 и теорема Дена–Соммервиля автоматически обобщаются для симплициальных вееров, не обязательно двойственных выпуклым простым многогранникам.

Абсолютно аналогично, используя действие достаточно общей однопараметрической группы, можно показать, что грассманианы $G(n, k)$ k-мерных подпространств в $\mathbb{C}^n$ и некоторые другие многообразия этого типа имеют структуру алгебраического CW-комплекса. Таким же образом показывается, что гладкие компактные непроективные торические многообразия имеют структуру алгебраического CW-комплекса.

6.2.4. *Циклы, соответствующие граням многогранника.* Вместо того чтобы выбирать базисные циклы среди циклов $T(\Gamma_k)$, для которых $\dim_{\mathbb{R}} \Gamma_k = i$, можно описать все соотношения между циклами $T(\Gamma_k)$. Они вытекают из описанной ниже конструкции, которая нам понадобится и в дальнейшем.

Будем говорить, что целочисленный *многогранник* Δ *подчинен вееру* W, если его опорная функция H_Δ линейна на каждом конусе $|\sigma|$ веера W. Пусть многогранник Ньютона $\Delta(P)$ полинома Лорана P подчинен вееру W гладкого проективного многообразия M_W. Рассмотрим алгебраическое многообразие $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$, заданное уравнением $P = 0$. Замыкание $\overline{X}$ многообразия X в M_W можно рассматривать как цикл из группы $H_{2n-2}(M_W, \mathbb{Z})$. Для различных полиномов Лорана P с одним и тем же многогранником Ньютона такие циклы гомологичны. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 6.2.7. *Цикл $\overline{X}$ гомологичен циклу $\sum k_i(\Delta(P))T(\Gamma_i)$, где Γ_i – грани размерности $n-1$ и $k_i = -H_{\Delta(P)}(\xi_i)$ (здесь ξ_i – несократимый целочисленный вектор, лежащий в луче $\sigma_{\Gamma_i} \subset W$, двойственном грани Γ_i).*

Доказательство. Полином Лорана P можно рассматривать как рациональную функцию на M_W. Порядок функции P на каждом из дивизоров $T(\Gamma_i)$ равен $k_i(\Delta) = -H_{\Delta(P)}(\xi_i)$. По определению главный дивизор функции P на торе $(\mathbb{C}^*)^n$ равен дивизору X, поэтому главный дивизор функции P на M_W равен $\overline{X} - \sum k_i(\Delta)T(\Gamma_i)$, откуда и вытекает теорема.

Следствие 6.2.8. *Для всякого характера χ тора $(\mathbb{C}^*)^n$ верно равенство*

$$\sum \langle \xi_i, \chi \rangle T(\Gamma_i) = 0. \tag{6.9}$$

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 6.2.7 для $P = \chi$.

Каждая грань Γ многогранника Δ, в свою очередь, является целочисленно простым многогранником $\widetilde{\Delta}$ размерности $k = \dim_{\mathbb{R}} \Gamma$. С многогранником $\widetilde{\Delta} = \Gamma$ связано гладкое торическое многообразие $M(\widetilde{\Delta})$ комплексной размерности k. Каждой $(k-1)$-мерной грани $\widetilde{\Gamma}_i$ в $\widetilde{\Delta}$ соответствует инвариантный цикл $\widetilde{T}(\widetilde{\Gamma}_i) \subset M(\widetilde{\Delta})$. Циклы $\widetilde{T}(\widetilde{\Gamma}_i)$ в многообразии $M(\widetilde{\Delta})$ связаны соотношениями, аналогичными (6.9) для циклов $T(\Gamma_i)$ в M_W. Грани $\widetilde{\Gamma}_i$ многогранника $\widetilde{\Delta} = \Gamma$ являются также гранями исходного многогранника Δ. Соответствующие этим граням циклы $\widetilde{T}(\widetilde{\Gamma}_i)$ в $M_{\mathbb{Z}}$ и $T(\widetilde{\Gamma}_i)$ в M_W изоморфны и связаны теми же соотношениями.

Остановимся на этом подробнее.

С гранью $\Gamma \subset \Delta$, $\dim \Gamma = k$, связано линейное пространство $L_\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ размерности k, параллельное аффинному пространству, порожденному гранью Γ. В L_Γ есть целочисленная решетка $L_\Gamma \cap \mathbb{Z}^n$ ранга k. Пространство L_Γ можно рассматривать как пространство характеров фактортора $(\mathbb{C}^*)^{\dim \Gamma}$ исходного тора $(\mathbb{C}^*)^n$ по связному подтору, алгебра Ли которого – комплексификация минимального подпространства в $(\mathbb{R}^n)^*$, содержащего конус σ^Γ.

Грань $\Gamma = \widetilde{\Delta}$ можно параллельно перенести в пространство L_Γ. Многограннику $\widetilde{\Delta} = \Gamma \subset L_\Gamma$ соответствует гладкое проективное торическое многообразие $M_{\mathbb{Z}}$, веер Z которого равен $\Gamma^\perp \subset L_\Gamma^*$. Каждой $(k-1)$-мерной грани $\widetilde{\Gamma}_i$ в Γ соответствует несократимый целочисленный ковектор $\widetilde{\xi}_i$, лежащий в луче веера Z, двойственном грани $\widetilde{\Gamma}_i$. Пространство L_Γ^* является фактором пространства $(\mathbb{R}^n)^*$ по минимальному линейному подпространству $L_\Gamma^\perp \subset (\mathbb{R}^n)^*$, содержащему конус $\sigma(\Gamma)$. Обозначим через π отображение из $(\mathbb{R}^n)^*$ в L_Γ^*. Пусть $\xi \in (\mathbb{Z}^n)^*$ – любой ковектор такой, что $\pi(\xi) = \widetilde{\xi}$.

Следствие 6.2.9. *Для всякого характера χ тора $(\mathbb{C}^*)^{\dim\Gamma}$ справедливо следующее соотношение между инвариантными $(k-1)$-мерными циклами $T(\widetilde{\Gamma}_i)$, соответствующими граням $\widetilde{\Gamma}_i\subset\Gamma$ размерности $k-1$:*

$$\sum\langle\xi_i,\chi\rangle T(\widetilde{\Gamma}_i)=0.$$

Каждой вершине $A\in\Gamma$ соответствуют нульмерная орбита $O_A\in M_W$ и k инвариантных циклов $T(\widetilde{\Gamma}_i)\subset T(\Gamma)$ размерности $k-1$, содержащих O_A.

Следствие 6.2.10. *Инвариантные $(k-1)$-мерные циклы, содержащие орбиту O_A, являются целочисленными линейными комбинациями инвариантных $(k-1)$-мерных циклов в $M_{\Gamma^\perp}$, не содержащих орбиту O_A.*

Доказательство. Чтобы упростить обозначения, проведем доказательство в случае, когда $\Gamma=\Delta$, $k=n$. Так как многогранник Δ является простым, то существуют векторы $\xi_1,\dots,\xi_n\in(\mathbb{Z}^n)^*$, порождающие группу $(\mathbb{Z}^n)^*$ и одномерные конусы веера W, двойственные $(n-1)$-мерным граням многогранника Δ, содержащим вершину A. Теперь достаточно воспользоваться равенством (6.9) для характеров $\chi_1,\dots,\chi_n$ таких, что $\langle\xi_i,\chi_j\rangle=\delta_i^j$. Следствие доказано.

Теорема 6.2.11. *Группа $H_{2i}(M_{\Delta^\perp},\mathbb{Z})$ изоморфна факторгруппе линейных комбинаций i-мерных торических подмногообразий $T(\Gamma_i)$ в $M_{\Delta^\perp}$, являющихся замыканиями i-мерных орбит O_{Γ_i}, по подгруппе соотношений из следствия* 6.2.9.

Доказательство. Фиксируем общую линейную функцию $\xi\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ относительно многогранника Δ. Назовем высотой грани Γ максимум ограничения ξ на Γ. Пусть i-мерная грань Γ_k не является ξ-выделенной. Тогда цикл $T(\Gamma_k)$ является линейной комбинацией циклов, соответствующих граням, высота которых меньше, чем высота грани Γ. Действительно, пусть максимум ограничения ξ на Γ достигается в вершине A. Так как Γ – не ξ-выделенная грань, то существует ребро l, выходяшее из A и не лежащее в Γ, вдоль которого ξ убывает. Рассмотрим $(k+1)$-мерную грань Ψ многогранника Δ, содержащую грань Γ и ребро l. Применим следствие 6.2.10 для грани Ψ. Согласно этому следствию цикл $T(\Gamma_i)$ является линейной комбинацией циклов, соответствующих i-мерным граням многогранника Ψ, не содержащим вершину A. Все эти грани имеют высоту, меньшую, чем высота грани Γ. Теорема доказана.

6.2.5. *Кольцо пересечений и грани многогранника* Δ. Пусть M – гладкое компактное вещественное ориентированное многообразие размерности n. Двойственность Пуанкаре устанавливает изоморфизм его групп гомологий и когомологий, $H_k(M,\mathbb{Z})$ и $H^{n-k}(M,\mathbb{Z})$, для $0\leqslant k\leqslant n$.

По модулю кручения операция умножения в когомологиях, перенесенная по двойственности Пуанкаре в гомологии, имеет наглядный геометрический смысл. Остановимся на этом подробнее, ограничившись необходимой нам общностью.

Нужные нам многообразия M (гладкие компактные торические многообразия) не имеют кручения, и кольцо пересечений для таких многообразий определено в $H_*(M,\mathbb{Z})$. Кроме того, любой класс каждой группы гомологий $H_m(M,\mathbb{Z})$

в таких многообразиях представим в виде $\Gamma = \sum k_i\gamma_i$, где γ_i являются ориентированными m-мерными многообразиями с особенностями в коразмерности 2. Точнее говоря, каждое γ_i является компактным стратифицированным множеством с конечным числом гладких стратов разных размерностей, достаточно хорошо прилегающих друг к другу. Кроме того, его страты старшей размерности m ориентированы, а остальные страты имеют коразмерность, не меньшую двух.

Всюду в тексте статьи, кроме этого пункта, мы, говоря о циклах, имеем в виду циклы $\Gamma = \sum k_i\gamma_i$, где γ_i являются алгебраическими подмногообразиями. В торических многообразиях все классы гомологий представимы циклами такого вида. Из-за этого кольцо пересечений торического многообразия может быть описано в чисто алгебраических терминах (соответствующий объект называется кольцом Чжоу торического многообразия, см. п. 4.1.5) и имеет смысл не только для комплексных торических многообразий, но и для торических многообразий над любым алгебраически замкнутым полем. С другой стороны, для комплексных торических многообразий пересечения вещественных циклов (а не только комплексно алгебраических циклов) контролируется его кольцом пересечений.

Чтобы пересечь два цикла Γ_1 и Γ_2, их нужно сначала заменить гомологичными циклами $\Gamma_1' = \sum k_i\gamma_i$ и $\Gamma_2' = \sum m_j\delta_j$, у которых для любых i и j все страты компонент γ_i и δ_j трансверсальны друг другу.

После этого можно определить пересечение классов гомологий циклов Γ_1 и Γ_2 как класс гомологий цикла $\sum k_i m_j \gamma_i \cap \delta_j$, где пересечение $\gamma_i \cap \delta_j$ рассматривается как многообразие с особенностями, наделенное индуцированной ориентацией.

Можно показать, что пересечение классов гомологий определено корректно (не зависит от выбора трансверсальных циклов, гомологичных исходным циклам). Более того, операция пересечения в гомологиях двойственна по Пуанкаре операции произведения в когомологиях.

Приведем некоторую информацию о теории пересечений в гомологиях на n-мерных ориентированных многообразиях с особенностями (мы не используем в дальнейшем этот материал). Предполагается, что многообразие с особенностями компактно и имеет конечную стратификацию с гладкими стратами разных размерностей, достаточно хорошо прилегающими друг к другу. Кроме того, его страты старшей размерности n ориентированы, а остальные страты имеют коразмерность, не меньшую двух.

Р. Макферсон и М. Горески определили для таких особых многообразий целый спектр групп гомологий различных типов. Каждый цикл из этих гомологий в основном лежит в неособых n-мерных стратах многообразия: пересечения цикла с остальными стратами являются подмножествами положительных коразмерностей в цикле. Типы групп гомологий различаются тем, насколько большими могут быть эти коразмерности (на коразмерности пересечений цепей накладываются такие же ограничения, как и на коразмерности пересеченй циклов). В точно описанных случаях пересечение циклов из групп гомологий двух (вообще говоря, различных) типов определено корректно и лежит в группе гомологий некоторого третьего типа.

В одном из типов гомологий, который мы будем называть *исключительным*, допускаются циклы, пересекающие каждый особый страт по множеству, коразмерность которого в цикле не меньше коразмерности страта. Операция пересечения циклов исключительного типа определена корректно и не выводит из класса циклов исключительного типа. Таким образом, группа гомологий исключительного типа является кольцом относительно операции пересечения. Кольцо когомологий многообразий с особенностями двойственно по Пуанкаре этому кольцу пересечений.

В другом типе гомологий, который мы будем называть *обычным*, допускаются циклы, пересекающиеся с особыми стратами по множеству, коразмерность которого в цикле не меньше двух. Пересечение цикла обычного типа с циклом исключительного типа определено корректно и является циклом обычного типа. Группа гомологий обычного типа изоморфна группе гомологий многообразия с особенностями. Операция пересечения циклов обычного типа с циклами исключительного типа двойственна по Пуанкаре $\cap$-произведению гомологий и когомологий многообразия с особенностями.

Хотя в определении групп гомологий различных типов участвует стратификация многообразия с особенностями, группы гомологий от выбора этой стратификации не зависят и являются инвариантами многообразия с особенностями. Таким образом, операция пересечения циклов доставляет наглядную интерпретацию умножения в кольце когомологий и умножения элементов из групп гомологий и когомологий.

Вернемся к торическим многообразиям.

Кольцо пересечений для гладкого проективного многообразия M_W, веер которого двойственен целочисленно простому многограннику Δ, $W = \Delta^{\perp}$, можно полностью описать в терминах многогранника Δ. Приведем набросок этого описания.

Каждой i-мерной грани Γ_k многогранника Δ соответствует гладкое алгебраическое подмногообразие $T(\Gamma_k) \subset M_W$ комплексной размерности i. Целочисленные линейные комбинации циклов $T(\Gamma_i)$ порождают группу $H_{2i}(M_W, \mathbb{Z})$. Соответствие между гранями многогранника и циклами сохраняет трансверсальное пересечение. Здесь мы говорим, что *грани* $\Gamma_i, \Gamma_j \subset \Delta$ *пересекаются трансверсально*, если либо их пересечение пусто, либо размерность грани $\Gamma = \Gamma_i \cap \Gamma_j$ равна $\dim \Delta - \dim \Gamma_i - \dim \Gamma_j$.

Теорема 6.2.12. *Если грани Γ_i и Γ_j не пересекаются, то циклы $T(\Gamma_i)$ и $T(\Gamma_j)$ тоже имеют пустое пересечение. Если же они пересекаются трансверсально и $\Gamma = \Gamma_i \cap \Gamma_j$, то циклы $T(\Gamma_i)$ и $T(\Gamma_j)$ тоже пересекаются трансверсально и их пересечение равно $T(\Gamma)$.*

Доказательство. Циклы $T(\Gamma_i)$ и $T(\Gamma_j)$ являются объединениями орбит, соответствующих всем граням, содержащимся в гранях Γ_i и Γ_j. Поэтому если $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$, то $T(\Gamma_i) \cap T(\Gamma_j) = \varnothing$.

Пусть грани Γ_i и Γ_j пересекаются трансверсально и $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \Gamma \neq \varnothing$. Тогда среди орбит, входящих в пересечение циклов $T(\Gamma_i)$ и $T(\Gamma_j)$, лишь одна орбита имеет максимальную размерность. Она соответствует открытой орбите в аффинном торическом многообразии M_σ, где σ – замыкание открытого конуса, двойственного грани Γ. Пересечения M_σ с циклами $T(\Gamma_i)$, $T(\Gamma_j)$ и $T(\Gamma)$ являются открытыми по Зарискому подмножествами в этих циклах. Многообразие M_σ изоморфно аффинному пространству $\mathbb{C}^n$, из которого удалены все координатные подпространства, не содержащие открытую орбиту в M_σ. Пересечения M_σ с циклами $T(\Gamma_i)$, $T(\Gamma_j)$ соответствуют координатным подпространствам, трансверсально пересекающимся по этой орбите. Теорема доказана.

Теорема 6.2.13. *Если грани $\{\Gamma_i\}$ (вообще говоря, различных размерностей) пересекаются трансверсально, то соответствующие им циклы $\{T(\Gamma_i)\}$ также пересекаются трансверсально, при этом грани $\bigcap \Gamma_i$ соответствует цикл $\bigcap\{T(\Gamma_i)\}$.*

Как мы видели в предыдущем пункте, между циклами вида $T(\Gamma_i)$ существует много соотношений. Несложно проверить, что этих соотношений достаточно, чтобы сделать циклы трансверсальными. Конструкции такого рода вместе с теоремой 6.2.13 дают явное описание кольца пересечений.

Пусть грани $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Delta$ размерностей m и k пересекаются по грани Γ размерности l нетрансверсально, т. е. $k+m-l<n$. Покажем, как заменить k-мерную грань Γ_2 на линейную комбинацию k-мерных граней T_i таких, что для каждой грани T_i либо $\dim T_i \cap \Gamma_2 = \varnothing$, либо $\dim T_i \cap \Gamma_1 < l$. Грани T_i, нетрансверсально пересекающие Γ_1, нужно также заменить линейными комбинациями граней, имеющими пересечения с Γ_1 еще меньших размерностей и т. д.

Пусть ξ – общая линейная функция на многограннике Δ. Пусть $A \in \Delta$ – вершина грани Γ, в которой достигается максимум функции ξ на этой грани. Среди ребер, выходящих из A, m ребер лежат в грани Γ_1, k ребер лежат в грани Γ_2 и l ребер лежат в грани Γ (эти ребра также лежат в Γ_1 и в Γ_2). Так как $n > m+k-l$, то существует ребро E, выходящее из A, которое не лежит ни в грани Γ_1, ни в грани Γ_2. Обозначим через Γ_3 единственную $(k+1)$-мерную грань в Δ, содержащую грань Γ_2 и ребро E. По построению имеем $\Gamma_2 \subset \Gamma_3$ и $\Gamma_1 \cap \Gamma_3 = \Gamma$. Согласно следствию 6.2.10 цикл, соответствующий грани Γ_2, можно представить как линейную комбинацию циклов, соответствующих всем k-мерным граням T_i многогранника Γ_3 размерности $k+1$, кроме самой грани Γ_2. Для каждой такой грани T_i либо пересечение $T_i \cap \Gamma_1$ пусто, либо $T_i \cap \Gamma_1$ является собственной гранью многогранника Γ и, следовательно, $\dim T_i \cap \Gamma_1 < l$.

6.2.6. *Кольцо пересечений многообразия M_W и W-циклы в $(\mathbb{C}^*)^n$.* В этом пункте мы опишем кольцо пересечений в M_W, используя алгебраические циклы в $(\mathbb{C}^*)^n$ и информацию об их замыканиях в M_W. Мы предполагаем, что веер W в $(\mathbb{R}^n)^*$ двойственен целочисленно простому многограннику $\Delta \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 6.2.14. Алгебраическое многообразие $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$, все неприводимые компоненты которого имеют размерность k, называется *W-многообразием*, если его замыкание $\overline{X}$ в M_W не пересекает орбит $O \subset M_W$ таких, что $\dim_{\mathbb{C}} O < n-k$.

Лемма 6.2.15. *Замыкание k-мерного W-многообразия X и $(n-k)$-мерная орбита O либо не пересекаются, либо пересекаются по конечному множеству.*

Доказательство. Если множество $O \cap \overline{X}$ бесконечно, то оно некомпактно, так как аффинное многообразие O не может содержать компактное алгебраическое многообразие положительной размерности. Поэтому $\overline{X}$ пересекает некоторые примыкающие к O орбиты размерности $< n-k$, что по условию невозможно. Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 6.2.16. *Замыкание k-мерного W-многообразия X пересекает все орбиты O в $M_{\Delta^\perp}$ по подмногообразиям "правильных" размерностей, т. е. либо $\overline{X} \cap O = \varnothing$, либо $\overline{X} \cap O = n-(k+m)$, где $k = \dim X$ и $m = \dim O$.*

Стратификаций алгебраического многообразия X называется представление X в виде объединения $X = \bigcup X_i$ непересекающихся неособых алгебраических многообразий X_i, называемых *стратами*. Будем говорить, что многообразия X и Y *пересекаются трансверсально*, если существуют их стратификации $X = \bigcup X_i$, $Y = \bigcup Y_j$, любые два страта которых пересекаются трансверсально.

Пусть X и Y – два трансверсально пересекающихся подмногообразия в n-мерном многообразии M.

Лемма 6.2.17. *Пусть каждая неприводимая компонента в X и Y имеет соответственно размерность k и m. Тогда если $X \cap Y \neq \varnothing$, то $k+m \geqslant n$ и каждая неприводимая компонента многообразия $X \cap Y$ имеет размерность $n-k-m$.*

Доказательство. Коразмерность пересечения двух гладких подмногообразий равна сумме их коразмерностей. Нам надо доказать, что $X \cap Y$ является замыканием многообразия $X_k \cap Y_m$, где X_k – объединение всех k-мерных стратов в X, а Y_m – объединение всех m-мерных стратов в Y. Действительно, в каждой точке $a \in X \cap Y$ росток многообразия $X \cap Y$ имеет размерность $\geqslant n-k-m$. Поэтому любая окрестность точки a пересекает множество $X_k \cap Y_m$ (пересечение любых других стратов в X и Y имеет размерность $\leqslant n-k-m$). Лемма доказана.

Теорема 6.2.18. *Для W-многообразий X и Y существует открытое по Зарискому множество $U \subset (\mathbb{C}^*)^n$ такое, что для всех $g \in U$ многообразия X и gY пересекаются трансверсально в торе $(\mathbb{C}^*)^n$ и для каждой орбиты $O \subset M_W$ многообразия $O \cap \overline{X}$ и $O \cap g\overline{Y}$ пересекаются трансверсально в O.*

Доказательство. Рассмотрим следующие стратификации многообразий $\overline{X}$ и $\overline{Y}$: сначала представим $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ в виде $\overline{X} = \bigcup (O \cap \overline{X})$ и $\overline{Y} = \bigcup (O \cap \overline{Y})$. Для почти всех $g \in (\mathbb{C}^*)^n$ циклы X и gY пересекаются трансверсально в $(\mathbb{C}^*)^n$. Согласно лемме 6.2.16 циклы $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ в многообразии M_W пересекают все орбиты O по подмногообразиям $\overline{X} \cap O$ и $\overline{Y} \cap O$ "правильных" размерностей. Для почти всех $g \in (\mathbb{C}^*)^n$ циклы $\overline{X} \cap O$ и $g(\overline{Y} \cap O)$ пересекаются трансверсально в орбите O (это общее утверждение теории колец условий, которое мы использовали выше) и размерность их пересечения меньше, чем $n-(k+m)$. Поэтому каждая неприводимая компонента пересечения $Z \subset \overline{X} \cap g\overline{Y}$ имеет размерность $n-(k+m)$ и существует открытое по Зарискому множество $U \subset (\mathbb{C}^*)^n$, пересекающее Z, такое, что $\overline{X} \cap U$ и $\overline{Y} \cap U$ – гладкие многообразия, трансверсально пересекающие друг друга по гладкому многообразию $Z \cap U$. Поэтому образы циклов $\overline{X} \cap g\overline{Y}$ и $\overline{X} \cap \overline{Y}$ в кольце пересечения многообразия M_W совпадают. Теорема доказана.

Следствие 6.2.19. *Для X, Y и g из теоремы 6.2.18 верно равенство*

$$\overline{X \cap gY} = \overline{X} \cap \overline{gY}.$$

Целочисленная линейная комбинация k-мерных W-многообразий называется *k-мерным W-циклом.* Легко проверяется следующее утверждение.

Лемма 6.2.20. *Лемма 6.2.17 и теорема 6.2.18 справедливы не только для W-многообразий, но и для W-циклов.*

6.2.7. *Кольцо пересечений и многогранники Ньютона.* Пусть P – некоторый полином Лорана с многогранником Ньютона Δ_1, подчиненным многограннику Δ (это означает, что опорная функция H_{Δ_1} линейна на каждом конусе веера $\Delta^\perp$), и $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ задано уравнением $P = 0$. Замыкание $\overline{X}(\Delta_1)$ многообразия X в $M_{\Delta^\perp}$ можно рассматривать как цикл из группы $H_{2n-2}(\Delta^\perp, \mathbb{Z})$. Согласно теореме 6.2.7 выполнено равенство $\overline{X} = \sum k_i(\Delta)T(\Gamma_i)$, где Γ_i – грани в Δ размерности $n-1$ и $k_i = H_\Delta(\xi_i)$, а ξ_i – несократимый целочисленный вектор, лежащий в луче $\sigma_{\Gamma_i} \subset \Delta^\perp$, двойственном грани Γ_i.

С каждым набором целочисленных многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-k}$, подчиненных многограннику Δ, мы связываем многообразие X, заданное достаточно общими системами уравнений $P_1 = \cdots = P_{n-k} = 0$ с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-k}$. Многообразие X мы будем называть *невырожденным полным пересечением, подчиненным* Δ.

Следствие 6.2.21. *Замыкание $\overline{X}$ в $M_{\Delta^\perp}$ невырожденного полного пересечения X, подчиненного Δ, является циклом в $H_{2k}(M_{\Delta^\perp}, \mathbb{Z})$, равным пересечению циклов $\overline{X}(\Delta_1), \ldots, \overline{X}(\Delta_{n-k})$.*

Теорема 6.2.22. *Индекс пересечения n циклов $\overline{X}(\Delta_1), \ldots, \overline{X}(\Delta_n)$ равен умноженному на $n!$ смешанному объему многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$.*

Доказательство. Утверждение является торической версией теоремы Бернштейна–Кушниренко.

Теорема 6.2.23. *Любой цикл $\gamma \in H_{2n-2}(M_{\Delta^\perp}, \mathbb{Z})$ представим в виде*

$$\gamma = \overline{X}_1(\Delta_1) - N\overline{X}_2(\Delta),$$

где N – достаточно большое целое число.

Доказательство. Пусть $\gamma = m_i T(\Gamma_i)$. Определим функцию H_γ на $(\mathbb{R}^n)^*$ следующим образом: функция H_γ линейна на каждом (симплициальном) конусе веера $\Delta^\perp$ и $H_\gamma(\xi_i) = m_i$ для несократимых целочисленных векторов ξ_i, лежащих на лучах одномерного остова веера $\Delta^\perp$, двойственных граням Γ_i. Функция $H_\gamma + NH_\Delta$ при достаточно большом целом N выпукла и, следовательно, является опорной функцией некоторого целочисленного выпуклого многогранника Δ_1, подчиненного многограннику Δ. Справедливо равенство $\gamma + N\overline{X}_2(\Delta) = \overline{X}_1(\Delta_1)$, что и доказывает теорему.

Теорема 6.2.24. *Каждый цикл в $H_{2n-2k}(M_{\Delta^\perp}, \mathbb{Z})$ представим в виде целочисленной линейной комбинации замыканий $(n-k)$-мерных невырожденных полных пересечений, подчиненных Δ.*

Доказательство. Теорема 6.2.23 доказывает нужный факт для $(2n-2)$-мерных гомологий. В частности, она дает требуемое представление для циклов $T(\Gamma_i)$, соответствующих граням $\Gamma_i \subset \Delta$ старшей размерности. Каждая грань Γ размерности $n-m$ является пересечением m граней $\Gamma_{i_1}, \ldots, \Gamma_{i_m}$ старшей размерности. Соответствующий ей цикл $T(\Gamma)$ является пересечением циклов $T(\Gamma_{i_1}), \ldots, T(\Gamma_{i_m})$ и, следовательно, тоже представим в указанном виде. Так как каждый цикл в $H_{2n-2m}(M_{\Delta^\perp}, \mathbb{Z})$ является линейной комбинацией циклов, соответствующих $(n-m)$-мерным граням, теорема доказана.

6.3. Кольца условий и пересечений как алгебры с двойственностью Горенштейна. Гладкое проективное торическое многообразие $M_{\Delta^\perp}$ является ориентированным четномерным вещественным многообразием, гомотопически эквивалентным клеточному комплексу, содержащему только четномерные клетки. Кольцо когомологий $H^*(M_{\Delta^\perp}, \mathbb{R})$ такого многообразия обладает двойственностью Горенштейна (см. пример 6.1.4). Как и любая алгебра с двойственностью Горенштейна, такое кольцо может быть описано двумя немного различающимися способами. Кольцо когомологий многообразия $M_{\Delta^\perp}$ с целыми коэффициентами не имеет кручения и восстанавливается по алгебре $H^*(M, \mathbb{R})$. Описания колец $H^*(M_{\Delta^\perp}, \mathbb{R})$ и $H^*(M_{\Delta^\perp}, \mathbb{Z})$ приведены в п. 6.3.1.

Напомним, что кольцо условий $\mathscr{R}_n$ комплексного тора $(\mathbb{C}^*)^n$ – это бесконечномерная градуированная коммутативная алгебра, элементами m-й компоненты которой являются *алгебраические циклы* коразмерности m, т. е. линейные комбинации алгебраических подмногообразий в $(\mathbb{C}^*)^n$ размерности $n-m$, определенные с точностью до *численной эквивалентности*.

6.3.1. *Кольца пересечений торических многообразий.* Обозначим через $\mathscr{G}_\Delta$ группу Гротендика полугруппы целочисленных многогранников, подчиненных вееру $\Delta^\perp$ для фиксированного простого целочисленного многогранника $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathscr{L}_\Delta$ конечномерное $\mathbb{R}$-линейное пространство, порожденное виртуальными многогранниками из группы $\mathscr{G}_\Delta$, т. е. $\mathscr{L}_\Delta = \mathscr{G}_\Delta \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Пространство $\mathbb{R}$-линейных комбинаций наборов из k многогранников из пространства $\mathscr{L}_\Delta$ естественно отождествляется с компонентой $\mathscr{S}_k(\mathscr{L}_\Delta)$ симметрической алгебры пространства $\mathscr{L}_\Delta$.

Нам будет удобно иметь дело с кольцом пересечений $H_*(M_{\Delta^\perp}, \mathbb{R})$, двойственным кольцу когомологий $H^*(M_{\Delta^\perp}, \mathbb{R})$. Изменим градуировку в кольце $H_*(M_{\Delta^\perp}, \mathbb{R})$, приписав группе $H_{n-2k}(M_{\Delta^\perp}, \mathbb{R})$ градуировку k. Обозначим через $H_{*'}(M_{\Delta^\perp}, \mathbb{R})$ кольцо гомологий $H_*(M_{\Delta^\perp}, \mathbb{R})$ с измененной градуировкой.

Приведем первое описание кольца $H_{*'}(M_{\Delta^\perp},\mathbb{R})$ как алгебры с двойственностью Горенштейна. Рассмотрим n-форму B на пространстве $\mathscr{L}_\Delta$, которая набору из n виртуальных многогранников $\Delta_1,\dots,\Delta_n \in \mathscr{L}_\Delta$ ставит в соответствие их смешанный объем $\mathrm{MV}(\Delta_1,\dots,\Delta_n)$, умноженный на $n!$. Форме B соответствует линейная функция $\mathscr{L}(B)$ на симметрической алгебре $\mathscr{S}(\mathscr{L}_\Delta)$ и однородный идеал $I_{\mathscr{L}(B)} \subset \mathscr{S}(\mathscr{L}_\Delta)$.

Однородная компонента степени k идеала $I_{\mathscr{L}(B)}$ состоит из линейных комбинаций $\sum \lambda_i(\Delta_1^i,\dots,\Delta_k^i)$ наборов $(\Delta_1^i,\dots,\Delta_k^i)$ из k виртуальных многогранников из пространства $\mathscr{L}_\Delta$ таких, что для любого многогранника $\widetilde{\Delta} \in \mathscr{L}_\Delta$ обращается в нуль линейная комбинация

$$\sum \lambda_i n!\, \mathrm{MV}(\Delta_1^i,\dots,\Delta_k^i,\Delta_{k+1},\dots,\Delta_n)$$

смешанных объемов наборов многогранников $(\Delta_1^i,\dots,\Delta_k^i,\Delta_{k+1},\dots,\Delta_n)$, в которых $\Delta_{k+1}=\dots=\Delta_n=\widetilde{\Delta}$.

Теорема 6.3.1. *Кольцо $H_{*'}(M_{\Delta^\perp},\mathbb{R})$ изоморфно факторалгебре*

$$\mathscr{S}(\mathscr{L}_\Delta)_{\mathscr{L}(B)} = \mathscr{S}(\mathscr{L}_\Delta)/I_{\mathscr{L}(B)}$$

симметрической алгебры $\mathscr{S}(\mathscr{L}_\Delta)$ пространства $\mathscr{L}_\Delta$ по идеалу $I_{\mathscr{L}(B)}$.

Следствие 6.3.2. *Кольцо $H_{*'}(M_{\Delta^\perp},\mathbb{Z})$ изоморфно подкольцу в $\mathscr{S}(\mathscr{L}_\Delta)_{\mathscr{L}(B)}$, порожденному образами при гомоморфизме факторизации подкольца $\mathbb{Z}$ и подгруппы $\mathscr{G}_\Delta$ в алгебре $\mathscr{S}(\mathscr{L}_\Delta)$.*

Приведем второе описание (называемое описанием Пухликова–Хованского) кольца $H_{*'}(M_{\Delta^\perp},\mathbb{R})$ как алгебры с двойственностью Горенштейна. Рассмотрим однородный полином P степени n на пространстве $\mathscr{L}_\Delta$, ставящий в соответствие виртуальному многограннику из пространства $\mathscr{L}_\Delta$ его объем. Полиному P соответствует идеал $I_{\mathscr{L}(P)}$ в алгебре $\mathrm{Diff}(\mathscr{L}_\Delta)$ линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на пространстве $\mathscr{L}_\Delta$, изоморфной алгебре $\mathscr{S}(\mathscr{L}_\Delta)$: идеал $I_{\mathscr{L}(P)}$ состоит из всех операторов, аннулирующих полином P.

Теорема 6.3.3. *Кольцо $H_{*'}(M_{\Delta^\perp},\mathbb{R})$ изоморфно факторалгебре*

$$\mathrm{Diff}(\mathscr{L}_\Delta)_{\mathscr{L}(P)} = \mathrm{Diff}(\mathscr{L}_\Delta)/I_{\mathscr{L}(P)}$$

алгебры $\mathrm{Diff}(\mathscr{L}_\Delta)$.

Следствие 6.3.4. *Кольцо $H_{*'}(M_{\Delta^\perp},\mathbb{Z})$ изоморфно подкольцу в алгебре $\mathrm{Diff}(\mathscr{L}_\Delta)_{\mathscr{L}(P)}$, порожденному образами при гомоморфизме факторизации операторов умножения на целые числа и операторов дифференцирования вдоль векторов из группы $\mathscr{G}_\Delta$.*

6.3.2. *Кольцо условий тора* $(\mathbb{C}^*)^n$. Обозначим через $\mathscr{G}$ группу Гротендика полугруппы целочисленных многогранников в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathscr{L}$ конечномерное $\mathbb{R}$-линейное пространство, порожденное виртуальными многогранниками из группы $\mathscr{G}$, т. е. $\mathscr{L} = \mathscr{G} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Пространство $\mathbb{R}$-линейных комбинаций наборов из k многогранников из пространства $\mathscr{L}$ естественно отождествляется с компонентой $\mathscr{S}_k$ симметрической алгебры пространства $\mathscr{L}$.

Приведем первое описание кольца условий $\mathscr{R}_n$. Рассмотрим n-форму B на $\mathscr{L}$, которая набору из n виртуальных многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_n \in \mathscr{L}$ ставит в соответствие их смешанный объем $\mathrm{MV}(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$, умноженный на $n!$. Форме B соответствуют линейная функция $\mathscr{L}(B)$ на симметрической алгебре $\mathscr{S}(\mathscr{L})$ и однородный идеал $I_{\mathscr{L}(B)} \subset \mathscr{S}(\mathscr{L})$.

Однородная компонента степени k идеала $I_{\mathscr{L}(B)}$ состоит из линейных комбинаций $\sum \lambda_i(\Delta_1^i, \dots, \Delta_k^i)$ наборов $(\Delta_1^i, \dots, \Delta_k^i)$ из k виртуальных многогранников из пространства $\mathscr{L}$ таких, что для любого многогранника $\widetilde{\Delta} \in \mathscr{L}$ обращается в нуль линейная комбинация

$$\sum \lambda_i n!\, \mathrm{MV}(\Delta_1^i, \dots, \Delta_k^i, \Delta_{k+1}, \dots, \Delta_n)$$

смешанных объемов наборов многогранников $(\Delta_1^i, \dots, \Delta_k^i, \Delta_{k+1}, \dots, \Delta_n)$, в которых $\Delta_{k+1} = \dots = \Delta_n = \widetilde{\Delta}$.

Теорема 6.3.5. *Кольцо $\mathscr{R}_n$ изоморфно подкольцу в алгебре $\mathscr{S}(\mathscr{L})/I_{\mathscr{L}(B)}$, порожденному образами при гомоморфизме факторизации подкольца $\mathbb{Z}$ и подгруппы $\mathscr{G}$ в алгебре $\mathscr{S}(\mathscr{L})$.*

Приведем второе описание кольца условий $\mathscr{R}_n$. Рассмотрим однородный полином P степени n на пространстве $\mathscr{L}$, который виртуальному многограннику из пространства $\mathscr{L}$ ставит в соответствие его объем. Полиному P соответствует идеал $I_{\mathscr{L}(P)}$ в алгебре $\mathrm{Diff}(\mathscr{L})$ линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на пространстве $\mathscr{L}$ (изоморфной алгебре $\mathscr{S}(\mathscr{L})$): идеал $I_{\mathscr{L}(P)}$ состоит из всех операторов, аннулирующих полином P.

Теорема 6.3.6. *Кольцо $\mathscr{R}_n$ изоморфно подкольцу в алгебре $\mathrm{Diff}(\mathscr{L})/I_{\mathscr{L}(P)}$, порожденному образами при гомоморфизме факторизации операторов умножения на целые числа и операторов дифференцирования вдоль векторов из группы $\mathscr{G}$.*

7. Кольцо условий пространства $\mathbb{C}^n$

7.1. Введение. Алгоритм построения кольца условий однородного аффинного алгебраического многообразия X заканчивается успешно, если кольцо полиномов на X “хорошо устроено” в смысле теории групп; см. [11], [10]. Обычно предполагается, что 1) действующая группа H редуктивна и 2) представление группы H в кольце полиномов на X не содержит кратных неприводимых компонент. Например, если $H = X = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$, то условия 1) и 2), очевидно, выполнены, так как в этом случае кольцо полиномов состоит из линейных комбинаций характеров тора $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$.

Кольцо экспоненциальных сумм состоит из линейных комбинаций характеров аддитивной группы $\mathbb{C}^n_+$ пространства $\mathbb{C}^n$. Напомним, что *экспоненциальная сумма* – это функция в $\mathbb{C}^n$ вида

$$f(z) = \sum_{\lambda\in\Lambda\subset(\mathbb{C}^n)^*,\ c_\lambda\in\mathbb{C}} c_\lambda \mathrm{e}^{\langle z,\lambda\rangle},$$

где Λ – конечное подмножество двойственного пространству $\mathbb{C}^n$ пространства $(\mathbb{C}^n)^*$, называемое *носителем* экспоненциальной суммы. Экспоненциальная сумма, носитель которой принадлежит подпространству $\operatorname{Re}(\mathbb{C}^n)^* \subset (\mathbb{C}^n)^*$, называется *квазиалгебраической.* Выпуклая оболочка носителя экспоненциальной суммы называется ее *многогранником Ньютона.*

Мы рассматриваем кольцо экспоненциальных сумм как аналог кольца полиномов Лорана на комплексном торе и, ориентируясь на эту аналогию, строим кольцо условий соответствующей теории пересечений. Точнее говоря, мы рассматриваем *экспоненциальные аналитические множества* (далее ЕА-множества), т. е. многообразия совместных нулей конечных систем экспоненциальных сумм, и строим *кольцо условий* теории пересечений ЕА-множеств. С ЕА-множеством мы связываем алгебраическое подмногообразие многомерного комплексного тора, которое называется *моделью* ЕА-множества; см. определение 7.2.2. При этом если ограничиться случаем квазиалгебраических экспоненциальных сумм, то построение кольца условий целиком основано на применении метода тропической алгебраической геометрии к моделям ЕА-множеств. В случае произвольных экспоненциальных сумм геометрия ЕА-множеств усложняется. В частности, в общем случае кроме стандартной тропической геометрии применяется некоторое комплексное расширение тропических понятий (см. [31]). По этой причине в рамках настоящего обзора *мы рассматриваем только квазиалгебраические* экспоненциальные суммы и ЕА-множества. Мы приводим формулировки основных утверждений и точные описания необходимых конструкций. Доказательства утверждений, за несколькими исключениями, опущены.

Пусть $G \subset \operatorname{Re}(\mathbb{C}^n)^*_+$ – подгруппа с конечным числом образующих. Предположим, что G содержит некоторый базис пространства $(\mathbb{C}^n)^*$. Обозначим через E_G кольцо экспоненциальных сумм с носителями в G. Далее мы строим теорию пересечений для ЕА-множеств с уравнениями из E_G. Для этого мы определяем соответствующее кольцо условий $\mathscr{E}_G$. Кольцо всех экспоненциальных сумм является прямым пределом колец E_G по всем подгруппам $G \subset \operatorname{Re}(\mathbb{C}^n)^*_+$. Соответственно, кольцо условий всех ЕА-множеств $\mathscr{E}$ является прямым пределом коммутативных градуированных $\mathbb{Z}$-алгебр $\mathscr{E}_G$. При этом на кольце $\mathscr{E}$ определена структура градуированной алгебры над полем $\mathbb{R}$.

В определении кольца условий используется индекс пересечения $I(X,Y)$ ЕА-множеств X, Y суммарной размерности n. Для построения $I(X,Y)$ мы определяем понятия алгебраической коразмерности $\operatorname{codim_a} X$ и равноразмерности ЕА-множества X; см. определение 7.2.3. Алгебраическая коразмерность, как правило (см. пример 7.2.4), совпадает с коразмерностью X как аналитического подмножества $\mathbb{C}^n$. Равноразмерность является заменой понятия неприводимости: любое ЕА-множество единственным образом представляется в виде конечного объединения равноразмерных ЕА-множеств разных алгебраических коразмерностей.

Далее введено понятие *слабой плотности* $d_{\mathrm{w}}(X)$ равноразмерного ЕА-множества X алгебраической коразмерности n; см. определение 7.2.12. Множество X (например, в случае $n=1$, нулевое множество функции e^z-1) бесконечно. Слабая плотность X является аналогом числа точек нульмерного алгебраического многообразия. Оказывается, что для X, Y со свойством $\operatorname{codim}_{\mathrm{a}} X + \operatorname{codim}_{\mathrm{a}} Y = n$ существует *область относительно полной меры* $U \subset \operatorname{Re}\mathbb{C}^n$ (см. определение 7.2.7) такая, что при $\operatorname{Re} z \in U$ слабая плотность $d_{\mathrm{w}}(X \cap (z+Y))$ постоянна. Положим

$$I(X,Y) = d_{\mathrm{w}}(X \cap (z+Y))$$

и назовем $I(X,Y)$ индексом пересечения ЕА-множеств X, Y. Индекс I симметричен и инвариантен при действии $z\colon X \mapsto z+X$ аддитивной группы $\mathbb{C}^n_+$ пространства $\mathbb{C}^n$. В определении слабой плотности и индекса пересечения используется группа G такая, что уравнения ЕА-множеств X, Y принадлежат кольцу E_G. Значения $d_{\mathrm{w}}(X)$, $I(X,Y)$ принадлежат некоторой подгруппе $\mathbb{R}_+$. Объединение этих подгрупп по всем подгруппам $G \subset \operatorname{Re}(\mathbb{C}^n)^*_+$ совпадает с $\mathbb{R}$. При этом значения $d_{\mathrm{w}}(X)$ и $I(X,Y)$ для фиксированных X, Y не зависят от выбора группы G.

Определение кольца условий построено по образцу [11], [10]. Равноразмерные ЕА-множества X, Y алгебраической коразмерности $k \leqslant n$ назовем эквивалентными, если $I(X,Z) = I(Y,Z)$ для любого равноразмерного ЕА-множества Z алгебраической коразмерности $n-k$. Все ЕА-множества алгебраической коразмерности $> n$ также считаются эквивалентными. Множества классов эквивалентности алгебраической коразмерности k образуют однородную компоненту коммутативного градуированного полукольца с операциями, определенными следующим образом.

Зафиксируем классы эквивалентности, содержащие равноразмерные ЕА-множества X, Y. Тогда существует зависящая от X, Y область $U \subset \operatorname{Re}\mathbb{C}^n$ относительно полной меры такая, что при $z \in U + \operatorname{Im}\mathbb{C}^n$ выполнены следующие условия:

1) ЕА-множества $X \cap (z+Y)$ равноразмерны;

2) их классы эквивалентности одинаковы и не зависят от выбора X, Y;

3) если $\operatorname{codim}_{\mathrm{a}} X = \operatorname{codim}_{\mathrm{a}} Y$, то классы эквивалентности ЕА-множеств $X \cup (z+Y)$ одинаковы.

Обозначим через $\iota(Z)$ класс эквивалентности ЕА-множества Z. Выбирая произвольное $z \in U + \operatorname{Im}\mathbb{C}^n$, положим

$$\iota(X) + \iota(Y) = \iota(X \cup (z+Y)) \quad \text{и} \quad \iota(X)\cdot\iota(Y) = \iota(X \cap (z+Y)).$$

Проверка корректности определения операций сложения и умножения основана на тропической технологии; см. п. 7.3. Пусть a, b, c – классы эквивалентности одинаковой коразмерности. Тогда по определению из $a+c=b+c$ вытекает $a=b$. Рассмотрим группу Гротендика $\mathscr{E}_{G,k}$ полугруппы классов эквивалентности коразмерности k и обозначим через $\mathscr{E}_G = \mathscr{E}_{G,0} + \mathscr{E}_{G,1} + \dots + \mathscr{E}_{G,n}$ соответствующую коммутативную градуированную $\mathbb{Z}$-алгебру. ЕА-множества с одинаковыми образами в кольце условий будем называть *численно эквивалентными*. Ниже перечислены основные свойства кольца условий $\mathscr{E}_G = \mathscr{E}_{G,0} + \dots + \mathscr{E}_{G,n}$:

(R1) $\mathscr{E}_{G,0} = \mathbb{Z}$;

(R2) слабая плотность ЕА-множества постоянна на классах численной эквивалентности; отображение $d_{\mathrm{w}}\colon \mathscr{E}_{G,n} \to \varpi(G)\mathbb{Z}$ является изоморфизмом групп;

(R3) при $p + q = n$ операция умножения задает невырожденное спаривание $\mathscr{E}_{G,p} \times \mathscr{E}_{G,q} \to \mathscr{E}_{G,n} \xrightarrow{d_{\mathrm{w}}} \varpi(G)\mathbb{Z}$;

(R4) алгебра $\mathscr{E}_G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ порождена элементами $\mathscr{E}_{G,1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (отсюда вытекает, что кольцо условий $\mathscr{E}$ порождено образами экспоненциальных гиперповерхностей);

(R5) при $G = \mathbb{Z}^n$ кольцо $\mathscr{E}_G$ совпадает с кольцом условий комплексного тора $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$.

Структура кольца условий комплексного тора может быть разными способами описана на языке геометрии многогранников с вершинами в точках целочисленной решетки (многогранников Ньютона); см. пп. 4.2.1, 6.3.1 настоящего обзора, а также [7], [32], [31]. При переходе к кольцу условий $\mathscr{E}$ эти описания остаются верными, если отказаться от условия целочисленности многогранников. Одно из таких описаний приведено в п. 7.3 (теорема 7.3.13).

Для ЕА-множеств $X_1, \dots, X_k$ суммарной алгебраической коразмерности n индекс их пересечения по определению равен $d_{\mathrm{w}}(\overline{X}_1 \cdots \overline{X}_k)$, где $\overline{X}_i$ – образ ЕА-множества X_i в кольце условий (ср. определение 7.2.15). Пусть при $k = n$ ЕА-множество X_i является гиперповерхностью с уравнением $f_i = 0$. Тогда в квазиалгебраическом случае индекс пересечения дивизоров $X_1, \dots, X_n$ равен смешанному объему многогранников Ньютона ЕА-множества f_i. Это утверждение можно рассматривать как аналог формулы Кушниренко–Бернштейна (называемой также формулой BKK или формулой Бернштейна–Кушниренко–Хованского) для числа решений полиномиальной системы уравнений, см. теорему 2.2.1. Оно является уточнением известных ранее результатов [27], [38].

7.2. Плотности и пересечения ЕА-множеств.

7.2.1. *Модели и обмотки.* Для определения слабой плотности ЕА-множества (см. определение 7.2.12) мы рассматриваем его как пересечение алгебраического многообразия, называемого *моделью* ЕА-множества с многомерной обмоткой комплексного тора; см. определения 7.2.1, 7.2.2.

Пусть $G \subset \operatorname{Re}(\mathbb{C}^n)^*_+$ – подгруппа с конечным числом образующих. Предположим, что G содержит некоторый базис пространства $\operatorname{Re}(\mathbb{C}^n)^*$. Обозначим через E_G кольцо экспоненциальных сумм с носителями в G. При $z \in \mathbb{C}^n$ определим характер $\omega(z)$ группы G как $\omega(z)\colon g \mapsto \mathrm{e}^{\langle z,g\rangle}$. Обозначим через $\mathbb{T}$ тор характеров группы G. Таким образом, определено вложение групп $\omega\colon \mathbb{C}^n_+ \to \mathbb{T}$.

Определение 7.2.1. Назовем образ $\omega(\mathbb{C}^n)$ отображения ω стандартной обмоткой тора $\mathbb{T}$, а само отображение $\omega\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{T}$ отображением стандартной обмотки.

Стандартная обмотка тора всюду плотна в топологии Зариского. Следовательно, отображение $\omega^*\colon \mathbb{C}[\mathbb{T}] \to E_G$ является изоморфизмом колец.[2]

---

[2]Способ рассматривать экспоненциальные суммы как ограничения полиномов Лорана на всюду плотную обмотку тора восходит к знаменитой публикации Г. Вейля [67].

Определение 7.2.2. Пусть I – идеал кольца E_G, порожденный уравнениями EA-множества X. Обозначим через $\kappa(X) \subset \mathbb{T}$ нулевое многообразие идеала $(\omega^*)^{-1}I \subset \mathbb{C}[\mathbb{T}]$. Назовем многообразие $\kappa(X)$ моделью EA-множества X.

EA-множество X совпадает с $\omega^{-1}\kappa(X)$. Наоборот, любому алгебраическому многообразию $M \subset \mathbb{T}$ соответствует EA-множество $\omega^{-1}M$. При этом $M = \kappa(\omega^{-1}M)$, т. е. M является моделью EA-множества $\omega^{-1}M$. Вычисление кольца $\mathscr{E}_G$ основано на том, что отображение $M \mapsto \omega^{-1}M$ продолжается до гомоморфизма кольца условий тора $\mathbb{T}$ на кольцо $\mathscr{E}_G$; см. п. 7.3.

Определение 7.2.3. Положим $\operatorname{codim}_{\mathrm{a}} X = \operatorname{codim} \kappa(X)$ и назовем $\operatorname{codim}_{\mathrm{a}} X$ алгебраической коразмерностью EA-множества X. Если многообразие $\kappa(X)$ равноразмерно (т. е. составлено из неприводимых компонент одинаковой размерности), то X также называется равноразмерным.

При увеличении группы G коразмерность и свойство равноразмерности модели $\kappa(X)$ при фиксированном EA-множестве X (в отличие от размерности и свойства неприводимости) сохраняются. Любое EA-множество представляется как объединение конечного числа равноразмерных EA-множеств, имеющих разные алгебраические коразмерности. Далее мы по умолчанию предполагаем, что любое рассматриваемое EA-множество является равноразмерным.

Пример 7.2.4 (см. [28], [68], [6]). Пусть EA-множество X задано уравнениями $f = g = 0$. Тогда если f, g не имеют общего делителя в кольце E_G, то $\operatorname{codim}_{\mathrm{a}} X = 2$, в противном случае $\operatorname{codim}_{\mathrm{a}} X = 1$. В частности, алгебраическая коразмерность точки $0 \in \mathbb{C}$, рассматриваемой как EA-множество с уравнениями $\mathrm{e}^z - 1 = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,z} - 1 = 0$, равна 2. Таким образом, коразмерность аналитического множества X может быть меньше $\operatorname{codim}_{\mathrm{a}} X$. Пусть (X, z) – неприводимый росток EA-множества X в точке $z \in X$. Если коразмерность (X, z) меньше $\operatorname{codim}_{\mathrm{a}} X$, то росток называется *нетипичным*. Известно, что любой нетипичный росток EA-множества принадлежит некоторому собственному аффинному подпространству $\mathbb{C}^n$. В частности, любая нетипичная компонента EA-множества алгебраической коразмерности 2 в $\mathbb{C}^2$ является аффинной прямой. Кроме того, известно, что множество минимальных аффинных подпространств, содержащих нетипичные компоненты, в некотором смысле мало.

Пусть EA-множество X задано уравнениями из кольца E_G, $\mathbb{T}$ – тор характеров группы G и $\kappa(X) \subset \mathbb{T}$ – модель EA-множества X. При $t \in \mathbb{T}$ используем обозначение $X_t = \omega^{-1}(t\kappa(X))$. Многообразие $t\kappa(X) \subset \mathbb{T}$ является моделью EA-множества X_t. Таким образом, мы получаем действие тора $\mathbb{T}$ на EA-множествах, заданных как нулевые многообразия систем экспоненциальных сумм из кольца E_G. Опишем это действие подробнее.

Зафиксируем базис $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ группы G. Тогда любая экспоненциальная сумма $f \in E_G$ однозначно записывается в виде полинома Лорана

$$f(z) = P(\mathrm{e}^{\alpha_1(z)}, \dots, \mathrm{e}^{\alpha_N(z)})$$

от переменных $\mathrm{e}^{\alpha_1(z)}, \dots, \mathrm{e}^{\alpha_N(z)}$. При $t = (c_1, \dots, c_N) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^N$ (отождествляя $\mathbb{T}$ с $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^N$) положим

$$f(z) \xrightarrow{t} tf(z) = P(c_1\mathrm{e}^{\alpha_1(z)}, \dots, c_N\mathrm{e}^{\alpha_N(z)}).$$

Если ЕА-множество задано уравнениями $f_1 = \dots = f_k = 0$, то под действием t оно переходит в ЕА-множество, заданное уравнениями $tf_1 = \dots = tf_k = 0$. Описанное действие тора $\mathbb{T}$ является продолжением сдвигового действия $\mathbb{C}^n$ на экспоненциальных суммах и на ЕА-множествах. Именно использование такого действия тора $\mathbb{T}$ позволяет корректно определить слабую плотность ЕА-множества коразмерности n и затем индекс пересечения $I(X, Y)$ ЕА-множеств X, Y дополнительных коразмерностей; см. ниже теорему 7.2.11 и определение 7.2.15. Определения слабой плотности и индекса пересечения используют выбранную группу G. Однако из теорем 7.2.14, 7.3.1 вытекает, что их значения от этого выбора не зависят. В дальнейшем предполагается, что группа $G \subset \mathrm{Re}(\mathbb{C}^n)^*$ фиксирована.

Далее используется *следующее соглашение о кратностях точек* ЕА-множеств. Пусть $M = \bigcup\limits_i m_i M_i$, где M_i – неприводимые компоненты модели M ЕА-множества X алгебраической коразмерности n, и $z \in X$. Назовем z *нормальной точкой* ЕА-множества X, если существует k такое, что

(i) $\omega(z) \subset M_k \setminus \bigcup\limits_{i \neq k} M_i$;

(ii) точка $\omega(z) \in M_k$ неособа;

(iii) пересечение стандартной обмотки с многообразием M_k в точке $\omega(z)$ трансверсально.

Припишем нормальной точке z кратность m_k. Свойство точки $x \in X$ быть нормальной, а также значение ее кратности не зависят от выбора модели M ЕА-множества X. Если приписать всем изолированным точкам X, не являющимся нормальными, фиксированную кратность K, то определенные ниже слабые плотности и индексы пересечения ЕА-множества от выбора K не зависят. Для большей определенности припишем всем изолированным точкам ЕА-множества, не являющимся нормальными, нулевую кратность.

7.2.2. *Плотность и индекс пересечения ЕА-множеств.* Ниже нам понадобятся следующие определения.

Определение 7.2.5. Пусть B_r – шар радиуса r в конечномерном евклидовом пространстве E с центром в нуле, σ_n – объем n-мерного шара радиуса 1 и $Y \subset E$ – дискретное множество точек с неотрицательными кратностями. Пусть $N(Y, r)$ – количество точек множества $Y \cap B_r$. Если предел

$$\lim_{r \to \infty} \frac{N(Y, r)}{\sigma_n r^n}$$

существует, назовем его n-плотностью множества Y и обозначим через $d_n(Y)$.

Отметим, что n-плотность множества зависит от выбора метрики в пространстве E.

Пример 7.2.6. Если ЕА-множество $X \subset \mathbb{C}$ задано уравнением $f(z) = 0$, то 1-плотность $d_1(X)$ существует и равна $p/(2\pi)$, где p – периметр отрезка Ньютона экспоненциальной суммы f.

Определение 7.2.7. Пусть $\mathfrak{I} = \{I\}$ – конечное множество собственных подпространств вещественного векторного пространства E. Положим

$$B_{\mathfrak{I}} = E \setminus \bigcup_{I \in \mathfrak{I}} I$$

и обозначим через $B_{\mathfrak{I},1}, B_{\mathfrak{I},2}, \ldots$ компоненты связности области $B_{\mathfrak{I}}$. При $0 < R \in \mathbb{R}$ обозначим через $B_{\mathfrak{I}}^R$ подмножество E, состоящее из точек, расположенных на расстоянии $\geqslant R$ от $\bigcup\limits_{I \in \mathfrak{I}} I$. Любую область $U \subset E$, содержащую подобласть вида $B_{\mathfrak{I}}^R$, будем называть областью относительно полной меры (далее RFD) с базой $\bigcup\limits_{I \in \mathfrak{I}} I$.

Приведем некоторые следствия определения 7.2.7.

Следствие 7.2.8. 1) *Объединение и пересечение RFD являются RFD.*

2) *Свойство области быть RFD не зависит от выбора метрики в пространстве E.*

3) *Если подпространство $L \subset E$ не принадлежит базе RFD U, то $U \cap L$ является RFD в пространстве L.*

Определение 7.2.9. 1) Пусть $\mathscr{Z} \subset E$ – решетка в пространстве E, снабженная целой положительной кратностью $m(\mathscr{Z})$, и $X \subset E$ – множество снабженных кратностями точек. Множество $X \subset E$ назовем ε-возмущением сдвинутой решетки $z + \mathscr{Z}$, если (a) X принадлежит ε-окрестности $(z + \mathscr{Z})_\varepsilon$ сдвинутой решетки и (b) в ε-окрестности любой точки $x \in z + \mathscr{Z}$ содержится ровно $m(\mathscr{Z})$ точек X.

2) Если множества $X_1, \ldots, X_m$ являются ε-возмущениями сдвинутых решеток $z_j + \mathscr{Z}_j$, то множество

$$\bigcup_{1 \leqslant j \leqslant m} X_j$$

назовем ε-возмущением объединения сдвинутых решеток $\bigcup\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} (z_j + \mathscr{Z}_j)$.

Следствие 7.2.10. *Пусть X является ε-возмущением множества сдвинутых решеток $\{z_j + \mathscr{Z}_j\}$. Тогда если $\operatorname{rk} \mathscr{Z}_j = n$ для любого j, то n-плотность $d_n(X)$ существует и равна $\sum\limits_j d_n(\mathscr{Z}_j)$.*

Ниже утверждается, что

(i) (теорема 7.2.11) для “почти всех достаточно больших” $t \in \mathbb{T}$ сдвиги tX квазиалгебраического EA-множества X алгебраической коразмерности n можно аппроксимировать объединениями сдвигов решеток из фиксированного конечного множества подрешеток пространства $\operatorname{Im} \mathbb{C}^n$; n-плотности EA-множеств tX существуют и одинаковы;

(ii) (теорема 7.2.14) если X, Y – квазиалгебраические EA-множества суммарной алгебраической коразмерности n, то для “почти всех достаточно больших” $z \in \mathbb{C}^n$ EA-множества $(z + X) \cap Y$ равноразмерны; их алгебраические коразмерности равны n, а слабые плотности одинаковы.

Далее будем использовать следующие обозначения: $\mathfrak{T}$ – алгебра Ли тора $\mathbb{T}$; $\operatorname{Re}\mathfrak{T}$ и $\operatorname{Im}\mathfrak{T}$ – вещественное и мнимое подпространства $\mathfrak{T}$; $\exp\colon \mathfrak{T} \to \mathbb{T}$ – экспоненциальное отображение.

Теорема 7.2.11. *Пусть* $\operatorname{codim}_{\mathrm{a}} X = n$. *Тогда существуют множество подпространств* $\mathfrak{I} = \{I \subset \operatorname{Re}\mathfrak{T}\}$ *и соответствующие компонентам связности* $B_{\mathfrak{I},i}$ (*см. определение* 7.2.7) *конечные наборы* n*-мерных решеток* $\{\mathscr{L}_{i,j} \subset \operatorname{Im}\mathbb{C}^n \mid j = 1, 2, \ldots\}$ *со следующими свойствами*:

1) *для любого* ε *существует* $R > 0$ *такое, что если* $t \in \exp(B^R_{\mathfrak{I},i} + \operatorname{Im}\mathfrak{T})$, *то* EA*-множество* X_t *является* ε*-возмущением объединения сдвинутых решеток* $z_1(t) + \mathscr{L}_{i,1}, z_2(t) + \mathscr{L}_{i,2}, \ldots$, *где функции* $z_j(t)$ *непрерывны*;

2) n*-плотность* $d_n(X_t)$ *не зависит от выбора содержащей* $\operatorname{Re}\log t$ *компоненты связности* $B_{\mathfrak{I},i}$.

Определение 7.2.12. При $t \in \exp(B^R_{\mathfrak{I},i} + \operatorname{Im}\mathfrak{T})$ положим $d_{\mathrm{w}}(X) = d_n(X_t)$ и назовем $d_{\mathrm{w}}(X)$ слабой плотностью X. Если $d_n(X)$ существует и равно $d_{\mathrm{w}}(X)$, то назовем $d_n(X)$ плотностью EA-множества X.

Следствие 7.2.13. *Плотность и слабая плотность* EA*-множества сохраняются при сдвиговом действии* $\mathbb{C}^n$, *т. е.* $d_{\mathrm{w}}(X) = d_{\mathrm{w}}(z + X)$.

Теорема 7.2.14. *Пусть* $\operatorname{codim}_{\mathrm{a}} X + \operatorname{codim}_{\mathrm{a}} Y = n$. *Тогда существует* $\mathfrak{I} = \{I \subset \operatorname{Re}\mathbb{C}^n\}$ *такое, что если* R *достаточно велико, то при всех* $z \in B^R_{\mathfrak{I}} + \operatorname{Im}\mathbb{C}^n$ *верно следующее*:

(i) EA*-множества* $(z + X) \cap Y$ *равноразмерны*;

(ii) $\operatorname{codim}_{\mathrm{a}}((z + X) \cap Y) = n$;

(iii) *слабые плотности* $d_{\mathrm{w}}((z + X) \cap Y)$ *одинаковы*.

Определение 7.2.15 (индекс пересечения EA-множеств). Предположим, что $B^R_{\mathfrak{I}} \subset \operatorname{Re}\mathbb{C}^n$ – RFD из теоремы 7.2.14. Тогда полагаем

$$I(X, Y) = d_{\mathrm{w}}\bigl((z + X) \cap Y\bigr) \quad \text{при} \quad z \in B^R_{\mathfrak{I}} + \operatorname{Im}\mathbb{C}^n.$$

Следствие 7.2.16. *Для любых* $z, w \in \mathbb{C}^n$ *имеет место равенство*

$$I(z + X, w + Y) = I(X, Y).$$

Напомним, что индекс пересечения $I(X_1, \ldots, X_n)$ экспоненциальных гиперповерхностей $X_1, \ldots, X_n$ по определению равен $d_{\mathrm{w}}(\overline{X}_1 \cdots \overline{X}_n)$, где $\overline{X}_i$ – образ EA-множества X_i в кольце условий (ср. определение 7.2.15).

Теорема 7.2.17. *Пусть* $X_i = \{z \in \mathbb{C}^n \colon f_i(z) = 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ *– экспоненциальные гиперповерхности. Тогда*

$$I(X_1, \ldots, X_n) = \frac{n!}{(2\pi)^n}\,\mathrm{MV}(\Delta_1, \ldots, \Delta_n),$$

где $\mathrm{MV}(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ *– смешанный объем многогранников Ньютона экспоненциальных сумм* f_i.

7.3. ЕА-множества и тропическая алгебраическая геометрия. В настоящем пункте объясняется связь понятий слабой плотности и индекса пересечения ЕА-множеств с тропической алгебраической геометрией. Оказывается, что они зависят только от тропикализаций моделей ЕА-множеств. Построено сюръективное отображение кольца условий комплексного тора на квазиалгебраическое кольцо условий $\mathscr{E}_G$ и установлена связь кольца $\mathscr{E}_G$ с кольцом выпуклых многогранников. Все необходимые тропические определения приведены в п. 4.2.

Пусть H есть n-мерное подпространство $\operatorname{Re}\mathfrak{T}$. Зафиксируем в H евклидову метрику. Ниже мы построим линейный функционал $\mathscr{Y}$ на пространстве тропических вееров коразмерности n в пространстве $\operatorname{Re}\mathfrak{T}$. Значение функционала на тропическом веере $\mathscr{K}$ можно рассматривать как некоторый “индекс пересечения” веера с подпространством H. Определение функционала $\mathscr{Y}$ приведено непосредственно после формулировки следующих утверждений.

Теорема 7.3.1. *Пусть ЕА-множество X задано уравнениями из кольца E_G, $\operatorname{codim}_{\mathrm{a}} X = n$, $\mathbb{T}$ – тор характеров группы G, $\operatorname{trop}(X) \subset \operatorname{Re}\mathfrak{T}$ – тропикализация модели ЕА-множества X. Положим $H = d\omega(\operatorname{Re}\mathbb{C}^n) \subset \operatorname{Re}\mathfrak{T}$, где ω – отображение стандартной обмотки (см. определение 7.2.1). Зафиксируем в H евклидову метрику, взятую с пространства $\operatorname{Re}\mathbb{C}^n$. Тогда*

$$d_{\mathrm{w}}(X) = \mathscr{Y}(\operatorname{trop}(X)).$$

Следствие 7.3.2. *Если тропикализации моделей ЕА-множеств X, Y совпадают, то $d_{\mathrm{w}}(X) = d_{\mathrm{w}}(Y)$.*

Теорема 7.3.3. *Пусть $\operatorname{codim}_{\mathrm{a}} X + \operatorname{codim}_{\mathrm{a}} Y = n$. Тогда*

$$I(X,Y) = \mathscr{Y}(\operatorname{trop}(X)\cdot\operatorname{trop}(Y)),$$

где $\operatorname{trop}(X)\cdot\operatorname{trop}(Y)$ – произведение тропических вееров (определенное в п. 4.2.1).

Следствие 7.3.4. *Если тропикализации моделей ЕА-множеств X, Y совпадают, то для любого ЕА-множества Z справедливо равенство $I(X,Z) = I(Y,Z)$.*

Переходим к определению функционала $\mathscr{Y}$.

Пусть $S \subset \operatorname{Re}\mathfrak{T}$ – рациональное (т. е. порожденное точками целочисленной решетки) подпространство коразмерности n. Рассмотрим образ $\pi(C)$ единичного куба C пространства H при отображении проекции $\pi\colon H \to \operatorname{Re}\mathfrak{T}/S$ и положим $\eta(H,S) = \operatorname{Vol}(\pi(C))$, где форма объема в пространстве $\operatorname{Re}\mathfrak{T}/S$ выбрана так, что объем фундаментального куба целочисленной факторрешетки равен 1.

Пусть $\mathscr{K}$ – тропический веер коразмерности n в пространстве $\operatorname{Re}\mathfrak{T}$, $\operatorname{supp}\mathscr{K} = \bigcup_{K\in\mathscr{K}} K$. Если при $K \in \mathscr{K}$ минимальное подпространство $\operatorname{Re}\mathfrak{T}$, содержащее H и K, является собственным, то обозначим его через $I_{H,K}$. Множество подпространств вида $I_{H,K}$ обозначим через $\mathfrak{I} = \{I\}$. Пусть $u \in B_{\mathfrak{I}}$ (см. определение 7.2.7). Тогда множество $H \cap (u + \operatorname{supp}\mathscr{K})$ конечно и состоит из точек вида $H \cap (u+K)$, где $K \in \mathscr{K}$ – конус коразмерности n. При $u \in B_{\mathfrak{I}}$ положим

$$\mathscr{Y}_u(\mathscr{K}) = \sum_{K\in\mathscr{K},\, H\cap(u+K)\neq\varnothing} \eta(H,\mathfrak{T}_K)w(K),$$

где $\mathfrak{T}_K$ – порожденное конусом K подпространство $\operatorname{Re}\mathfrak{T}$, а $w(K)$ – вес конуса K в тропическом веере $\mathscr{K}$. Значение функционала $\mathscr{Y}_u(\mathscr{K})$ не зависит от выбора $u \in B_{\mathfrak{J}}$. Таким образом, функционал $\mathscr{Y}$ корректно определен.

Упомянутая независимость объясняется следующим образом. Выберем рациональное подпространство пространства $\operatorname{Re}\mathfrak{T}$, близкое к H, и снабдим его евклидовой метрикой, близкой к метрике H. Теперь утверждение сведено к случаю рационального подпространства, так как значение $\mathscr{Y}_u(\mathscr{K})$ непрерывно зависит от евклидова подпространства H. Пусть подпространство H рационально. Рассмотрим его как тропический веер с весом 1. Тогда $\mathscr{Y}_u(\mathscr{K})$ отличается от индекса пересечения тропических многообразий $\mathscr{K}$ и H на постоянный множитель (см. замечание 4.2.2 в п. 4.2.1) и, следовательно, не зависит от сдвига u.

Далее мы приведем несколько известных фактов о кольце условий комплексного тора и о тропикализациях алгебраических многообразий. Для этого используются следующие обозначения:

- $\mathscr{R}_{\mathbb{T}}$ – кольцо условий тора $\mathbb{T}$;
- $\mathbf{r}(M)$ – класс численной эквивалентности многообразия M;
- $\operatorname{Trop}_{\mathbb{T}}$ – кольцо тропических вееров в пространстве $\operatorname{Re}\mathfrak{T}$;
- $\mathbf{trop}(M)$ – тропикализация многообразия M.

Утверждение 7.3.5. *Для любой пары многообразий $M, N \subset \mathbb{T}$ существует алгебраическая гиперповерхность $D \subset \mathbb{T}$ такая, что при $t \notin D$*

(i) $\mathbf{r}\big(M \cap (tN)\big) = \mathbf{r}(M) \cdot \mathbf{r}(N)$,

(ii) $\mathbf{trop}\big(M \cap (tN)\big) = \mathbf{trop}(M) \cdot \mathbf{trop}(N)$.

Утверждение 7.3.6. *Отображение* $\mathbf{trop}$ *постоянно на классах численной эквивалентности и является изоморфизмом колец* $\iota\colon \mathscr{R}_{\mathbb{T}} \to \operatorname{Trop}_{\mathbb{T}}$.

Напомним, что амебой алгебраического многообразия M называется образ M при отображении $\operatorname{Re}\log\colon \mathbb{T} \to \operatorname{Re}\mathfrak{T}$.

Утверждение 7.3.7 (см., например, [30]). *Амеба алгебраического многообразия M расположена на конечном расстоянии от конуса Бергмана* $\operatorname{supp}\mathbf{trop}(M)$ *многообразия M.*

Содержательной частью проверки корректности определения кольца условий $\mathscr{E}_G$ является доказательство корректности умножения классов численной эквивалентности. Нужное утверждение состоит в следующем.

Лемма 7.3.8. *Пусть X и Y – равноразмерные* EA*-множества. Тогда существует* RFD $U \subset \operatorname{Re}\mathbb{C}^n$ *такая, что для любого* EA*-множества Z алгебраической коразмерности $n - \operatorname{codim_a} X - \operatorname{codim_a} Y$ индексы пересечения $I(X \cap (z+Y), Z)$ одинаковы при $z \in U + \operatorname{Im}\mathbb{C}^n$.*

Доказательство. Пусть $\omega\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{T}$ – отображение стандартной обмотки (см. определение 7.2.1) и M, N, P – модели EA-множеств X, Y, Z соответственно. Тогда многообразие $M \cap (\omega(z)N)$ является моделью EA-множества $X \cap (z+Y)$. Применяя теорему 7.3.3, получим, что

$$I\big(X \cap (z+Y), Z\big) = \mathscr{Y}\big(\mathbf{trop}\big(M \cap (\omega(z)N)\big) \cdot \mathbf{trop}(P)\big).$$

Рассмотрим гиперповерхность D из утверждения 7.3.5 и обозначим через $\mathscr{I} = \{I \subset \operatorname{Re}\mathfrak{T}\}$ множество рациональных подпространств, объединение которых содержит носитель тропического веера гиперповерхности D. Так как обмотка ω плотна, то $d\omega(\operatorname{Re}\mathbb{C}^n) \not\subset \bigcup_{I\in\mathscr{I}} I$. Поэтому $U = (d\omega)^{-1}(B^R_{\mathscr{I}})$ является RFD; см. определение 7.2.7 и следствие 7.2.8, 3). Если R достаточно велико, то, согласно утверждению 7.3.7, $D \cap B^R_{\mathscr{I}} = \varnothing$. Поэтому $\omega(z) \notin D$ при любом $z \in U + \operatorname{Im}\mathbb{C}^n$. Пусть $z \in U + \operatorname{Im}\mathbb{C}^n$. Тогда из утверждения 7.3.5, (ii), вытекает, что

$$\mathbf{trop}\bigl(M \cap (\omega(z)N)\bigr) = \mathbf{trop}(M)\cdot\mathbf{trop}(N).$$

Отсюда получаем

$$I\bigl(X \cap (z+Y), Z\bigr) = \mathscr{Y}\bigl(\mathbf{trop}(M)\cdot\mathbf{trop}(N)\cdot\mathbf{trop}(P)\bigr), \tag{7.1}$$

т. е. $I\bigl(X \cap (z+Y), Z\bigr)$ не зависит от $z \in U + \operatorname{Im}\mathbb{C}^n$. Лемма доказана.

Для модели M EA-множества X обозначим через M^{eas} образ X в кольце $\mathscr{E}_G$.

Теорема 7.3.9. *Существует такой сюръективный гомоморфизм колец $s\colon \operatorname{Trop}_{\mathbb{T}} \to \mathscr{E}_{\mathrm{G}}$, что*

$$M^{\mathrm{eas}} = s(\mathbf{trop}(M)) \quad \text{\textit{для всех} } M \subset \mathbb{T}.$$

Доказательство. Теорема 7.3.3 утверждает, что

$$I(M^{\mathrm{eas}}, P^{\mathrm{eas}}) = \mathscr{Y}\bigl(\mathbf{trop}(M), \mathbf{trop}(P)\bigr),$$
$$I(N^{\mathrm{eas}}, P^{\mathrm{eas}}) = \mathscr{Y}\bigl(\mathbf{trop}(N), \mathbf{trop}(P)\bigr).$$

Отсюда вытекает, что если $\mathbf{trop}(M) = \mathbf{trop}(N)$, то EA-множества M^{eas} и N^{eas} являются численно эквивалентными. Таким образом, нужное отображение множеств $s\colon \operatorname{Trop}_{\mathbb{T}} \to \mathscr{E}_{\mathrm{G}}$ существует. Свойство отображения s быть гомоморфизмом колец вытекает из (7.1). Теорема доказана.

Следствие 7.3.10. *Кольцо условий $\mathscr{E}_G$ порождено образами экспоненциальных гиперповерхностей.*

Доказательство. Известно, что кольцо условий тора порождено классами численной эквивалентности алгебраических гиперповерхностей. Из утверждения 7.3.6 и из теоремы 7.3.9 вытекает, что $\mathscr{E}_G$ является факторкольцом кольца условий $\mathscr{R}_{\mathbb{T}}$. Свойство градуированного кольца быть порожденным элементами степени 1 наследуется его факторкольцами. Следствие доказано.

Далее в этом пункте мы опираемся на результаты из раздела 6. Впрочем, формулировки следующих ниже утверждений полностью замкнуты.

Продолжим функционал $\mathscr{Y}$ на пространство всех тропических вееров, положив его равным нулю на любом однородном веере коразмерности, отличной от n. (Веер конусов размерности k называется однородным, если любой из его конусов является гранью конуса размерности k.) Рассмотрим на пространстве тропических вееров симметричную билинейную форму

$$B_{\mathscr{Y}}(\mathscr{K}, \mathscr{L}) = \mathscr{Y}(\mathscr{K}\cdot\mathscr{L}).$$

Ядро $J_{\mathscr{Y}}$ билинейной формы $B_{\mathscr{Y}}$ является идеалом кольца $\operatorname{Trop}_{\mathbb{T}}$.

Следствие 7.3.11. *Кольцо условий $\mathscr{E}_G$ изоморфно факторкольцу $\mathrm{Trop}_{\mathbb{T}}/J_{\mathscr{Y}}$. Другими словами, гомоморфизм s из теоремы 7.3.9 можно описать как отображение факторизации $\mathrm{Trop}_{\mathbb{T}} \to \mathrm{Trop}_{\mathbb{T}}/J_{\mathscr{Y}}$.*

Следствие 7.3.12. *Операция произведения в кольце $\mathscr{E}_G$ определяет невырожденное спаривание $\mathscr{E}_{G,p} \times \mathscr{E}_{G,n-p} \to \mathbb{R}$.*

В заключение приведем одно из геометрических описаний кольца $\mathscr{E}_G$. Рассмотрим многогранники Ньютона экспоненциальных сумм из кольца E_G, т. е. выпуклые многогранники в пространстве $\mathrm{Re}(\mathbb{C}^n)^*$ с вершинами в точках группы G. Обозначим через $\mathscr{H}$ порожденное ими векторное пространство виртуальных выпуклых многогранников. Пусть $S(\mathscr{H}) = \sum\limits_{m\geqslant 0} S_m$ – симметрическая алгебра векторного пространства $\mathscr{H}$. Обозначим через I линейный функционал на пространстве $S_n(\mathscr{H})$, который на произведении многогранников $\Lambda_1\cdots\Lambda_n$ равен смешанному объему многогранников Λ_i. Свяжем с функционалом I однородный идеал $J \subset S(\mathscr{H})$, порожденный следующими множествами образующих: 1) $\ker I$, 2) $\sum\limits_{m>n} S_m$ и 3) $\{s \in S_k \mid s\cdot S_{n-k} \subset \ker I,\ k = 1,\ldots,n-1\}$.

Теорема 7.3.13. *Для экспоненциальной суммы $f \in E_G$ обозначим через Δ_f ее многогранник Ньютона, а через X_f – экспоненциальную гиперповерхность с уравнением $f = 0$. Тогда соответствие $X_f \to \Delta_f$ продолжается до изоморфизма колец $\mathscr{E}_G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to S(\mathscr{H})/J$.*

7.4. Экспоненциальная теорема BKK. Следующую ниже теорему 7.4.1 можно рассматривать как тропический вариант теоремы BKK (см. теорему 3.1.3), возникающий в контексте квазиалгебраических экспоненциальных сумм. Она используется для вывода экспоненциальной формулы BKK (теорема 7.2.17). Доказательство теоремы 7.4.1 состоит в применении тропической теоремы BKK и утверждения 2.1.7. Детали доказательства мы опускаем.

Рассмотрим двойственное H пространство H^*, снабженное двойственной евклидовой метрикой, и отождествим его с пространством $(\mathrm{Re}\,\mathfrak{T})^*/H^{\perp}$, где $(\mathrm{Re}\,\mathfrak{T})^*$ – пространство линейных функционалов в $\mathrm{Re}\,\mathfrak{T}$, а $H^{\perp}$ – ортогональное дополнение к H. Для подмножества $A \subset (\mathrm{Re}\,\mathfrak{T})^*$ обозначим через A^H его проекцию на факторпространство $(\mathrm{Re}\,\mathfrak{T})^*/H^{\perp}$.

Теорема 7.4.1. *Пусть $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ – выпуклые многогранники в $(\mathrm{Re}\,\mathfrak{T})^*$ с вершинами в точках целочисленной решетки, а $\mathscr{K}_1,\ldots,\mathscr{K}_n \subset \mathrm{Re}\,\mathfrak{T}$ – двойственные тропические вееры многогранников Δ_i (см. определение 3.3.2). Тогда*

$$\mathscr{Y}(\mathscr{K}_1\cdots\mathscr{K}_n) = c(H)\,\mathrm{MV}(\Delta_1^H,\ldots,\Delta_n^H),$$

где MV – смешанный объем в пространстве H^*, а $c(H)$ – константа, зависящая от евклидова пространства H.

Из теоремы 7.4.1 вытекает формула Кушниренко–Бернштейна для квазиалгебраических экспоненциальных сумм (теорема 7.2.17). Действительно, пусть $X_1,\dots,X_n$ – квазиалгебраические экспоненциальные гиперповерхности, заданные уравнениями $f_i=0$, и M_i – модели ЕА-множеств X_i. Эти модели являются алгебраическими гиперповерхностями. Пусть $\mathscr{K}_i$ – тропикализации этих гиперповерхностей. Из предыдущего вытекает, что

$$I(X_1,\dots,X_n)=\mathscr{Y}(\mathscr{K}_1\cdots\mathscr{K}_n).$$

Применяя теорему 7.4.1, получаем, что

$$I(X_1,\dots,X_n)=c(n)\,\mathrm{MV}(\Delta_1,\dots,\Delta_n),$$

где Δ_i – многогранники Ньютона экспоненциальных сумм f_i. Значение $n!/(2\pi)^n$ множителя $c(n)$ легко установить, рассматривая простейший случай $f_i=\mathrm{e}^{z_i}-1$.

Список литературы

[1] Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков, *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе*, Наука, Новосибирск, 1979, 367 с.; англ. пер.: I. A. Aĭzenberg, A. P. Yuzhakov, *Integral representations and residues in multidimensional complex analysis*, Transl. Math. Monogr., **58**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, x+283 pp.

[2] А. Д. Александров, *Геометрия и приложения*, Избранные труды, **1**, Наука, Новосибирск, 2006, lii+748 с.

[3] G. M. Bergman, “The logarithmic limit-set of an algebraic variety”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **157** (1971), 459–469.

[4] Д. Н. Бернштейн, “Число корней системы уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:3 (1975), 1–4; англ. пер.: D. N. Bernstein, “The number of roots of a system of equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **9**:3 (1975), 183–185.

[5] B. Bertrand, E. Brugallé, G. Mikhalkin, “Genus 0 characteristic numbers of the tropical projective plane”, *Compos. Math.*, **150**:1 (2014), 46–104; 2013 (v1 – 2011), 55 pp., arXiv: 1105.2004.

[6] E. Bombieri, D. Masser, U. Zannier, “Anomalous subvarieties – structure theorems and applications”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2007**:19 (2007), rnm057, 33 pp.

[7] M. Brion, “Piecewise polynomial functions, convex polytopes and enumerative geometry”, *Parameter spaces* (Warsaw, 1994), Banach Center Publ., **36**, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 1996, 25–44.

[8] M. Brion, “The structure of the polytope algebra”, *Tohoku Math. J.* (2), **49**:1 (1997), 1–32.

[9] E. Brugallé, I. Itenberg, G. Mikhalkin, K. Shaw, “Brief introduction to tropical geometry”, *Proceedings of Gökova geometry-topology conference* 2014, Gökova Geometry/Topology Conferences (GGT), Gökova; International Press, Somerville, MA, 2015, 1–75.

[10] C. De Concini, “Equivariant embeddings of homogeneous spaces”, *Proceedings of the International congress of mathematicians*, v. 1 (Berkeley, CA, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 369–377.

[11] C. De Concini, C. Procesi, “Complete symmetric varieties. II. Intersection theory”, *Algebraic groups and related topics* (Kyoto/Nagoya, 1983), Adv. Stud. Pure Math., **6**, North-Holland, Amsterdam, 1985, 481–513.

[12] A. Dickenstein, M. I. Herrero, L. F. Tabera, “Arithmetics and combinatorics of tropical Severi varieties of univariate polynomials”, *Israel J. Math.*, **221**:2 (2017), 741–777; 2016, 24 pp., arXiv: 1601.05479.

[13] M. Einsiedler, M. Kapranov, D. Lind, “Non-archimedean amoebas and tropical varieties”, *J. Reine Angew. Math.*, **2006**:601 (2006), 139–157.

[14] А. И. Эстеров, “Индексы 1-форм, результанты и многогранники Ньютона”, *УМН*, **60**:2(362) (2005), 181–182; англ. пер.: A. I. Esterov, “Indices of 1-forms, resultants and Newton polyhedra”, *Russian Math. Surveys*, **60**:2 (2005), 352–353.

[15] А. И. Эстеров, “Индексы 1-форм, индексы пересечения и многогранники Ньютона”, *Матем. сб.*, **197**:7 (2006), 137–160; англ. пер.: A. I. Èsterov, “Indices of 1-forms, intersection indices, and Newton polyhedra”, *Sb. Math.*, **197**:7 (2006), 1085–1108; входит в: 2010 (v1 – 2009), 35 pp., arXiv: 0906.5097.

[16] A. Esterov, “Characteristic classes of affine varieties and Plücker formulas for affine morphisms”, *J. Eur. Math. Soc.* (*JEMS*), **20**:1 (2018), 15–59; 2016 (v1 – 2013), 44 pp., arXiv: 1305.3234.

[17] G. Ewald, *Combinatorial convexity and algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **168**, Springer-Verlag, New York, 1996, xiv+372 pp.

[18] F. Fillastre, “Fuchsian convex bodies: basics of Brunn–Minkowski theory”, *Geom. Funct. Anal.*, **23**:1 (2013), 295–333; 2012 (v1 – 2011), 30 pp., arXiv: 1112.5353.

[19] W. Fulton, B. Sturmfels, “Intersection theory on toric varieties”, *Topology*, **36**:2 (1997), 335–353; 1994, 24 pp., arXiv: alg-geom/9403002.

[20] A. Gathmann, M. Kerber, H. Markwig, “Tropical fans and the moduli spaces of tropical curves”, *Compos. Math.*, **145**:1 (2009), 173–195; 2009 (v1 – 2007), 23 pp., arXiv: 0708.2268.

[21] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Math. Theory Appl., Boston, MA, 1994, x+523 pp.

[22] A. Gross, “Correspondence theorems via tropicalizations of moduli spaces”, *Commun. Contemp. Math.*, **18**:3 (2016), 1550043, 36 pp.; 2016 (v1 – 2014), 32 pp., arXiv: 1406.1999.

[23] A. Gross, *Refined tropicalizations for schön subvarieties of tori*, 2017, 18 pp., arXiv: 1705.05719.

[24] J. Hofscheier, A. Khovanskii, L. Monin, *Cohomology rings of toric bundles and the ring of conditions*, 2020, 22 pp., arXiv: 2006.12043.

[25] I. Itenberg, G. Mikhalkin, E. Shustin, *Tropical algebraic geometry*, 2nd ed., Oberwolfach Semin., **35**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, x+104 pp.

[26] I. Itenberg, E. Shustin, “Singular points and limit cycles of planar polynomial vector fields”, *Duke Math. J.*, **102**:1 (2000), 1–37.

[27] Б. Я. Казарновский, “О нулях экспоненциальных сумм”, *Докл. АН СССР*, **257**:4 (1981), 804–808; англ. пер.: B. Ya. Kazarnovskii, “On the zeros of exponential sums”, *Soviet Math. Dokl.*, **23** (1981), 347–351.

[28] Б. Я. Казарновский, “Экспоненциальные аналитические множества”, *Функц. анализ и его прил.*, **31**:2 (1997), 15–26; англ. пер.: B. Ya. Kazarnovskii, “Exponential analytic sets”, *Funct. Anal. Appl.*, **31**:2 (1997), 86–94.

[29] Б. Я. Казарновский, “Укорочения систем уравнений, идеалов и многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:3 (1999), 119–132; англ. пер.: B. Ya. Kazarnovskii, “Truncation of systems of polynomial equations, ideals and varieties”, *Izv. Math.*, **63**:3 (1999), 535–547.

[30] Б. Я. Казарновский, "c-вееры и многогранники Ньютона алгебраических многообразий", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 23–44; англ. пер.: B. Ya. Kazarnovskii, "c-fans and Newton polyhedra of algebraic varieties", *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 439–460.

[31] Б. Я. Казарновский, "О действии комплексного оператора Монжа–Ампера на кусочно линейных функциях", *Функц. анализ и его прил.*, **48**:1 (2014), 19–29; англ. пер.: B. Ya. Kazarnovskii, "On the action of the complex Monge–Ampère operator on piecewise linear functions", *Funct. Anal. Appl.*, **48**:1 (2014), 15–23.

[32] Б. Я. Казарновский, А. Г. Хованский, "Тропическая нетеровость и базисы Грёбнера", *Алгебра и анализ*, **26**:5 (2014), 142–163; англ. пер.: B. Ya. Kazarnovskiĭ, A. G. Khovanskiĭ, "Tropical noetherity and Gröbner bases", *St. Petersburg Math. J.*, **26**:5 (2015), 797–811.

[33] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings. I*, Lecture Notes in Math., **339**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973, viii+209 pp.

[34] А. Г. Хованский, "Многогранники Ньютона и торические многообразия", *Функц. анализ и его прил.*, **11**:4 (1977), 56–64; англ. пер.: A. G. Khovanskii, "Newton polyhedra and toroidal varieties", *Funct. Anal. Appl.*, **11**:4 (1977), 289–296.

[35] А. Г. Хованский, "Многогранники Ньютона и род полных пересечений", *Функц. анализ и его прил.*, **12**:1 (1978), 51–61; англ. пер.: A. G. Khovanskii, "Newton polyhedra and the genus of complete intersections", *Funct. Anal. Appl.*, **12**:1 (1978), 38–46.

[36] А. Г. Хованский, "Геометрия выпуклых многогранников и алгебраическая геометрия", В ст.: "Совместные заседания семинара имени И. Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики и Московского математического общества (вторая сессия, 18–20 января 1979 г.)", *УМН*, **34**:4(208) (1979), 160–161.

[37] А. Г. Хованский, "Гиперплоские сечения многогранников, торические многообразия и дискретные группы в пространстве Лобачевского", *Функц. анализ и его прил.*, **20**:1 (1980), 50–61; англ. пер.: A. G. Khovanskii, "Hyperplane sections of polyhedra, toroidal manifolds, and discrete groups in Lobachevskii space", *Funct. Anal. Appl.*, **20**:1 (1986), 41–50.

[38] А. Г. Хованский, *Малочлены*, Библиотека математика, **2**, Фазис, М., 1997, xii+217 с.; англ. пер.: A. G. Khovanskiĭ, *Fewnomials*, Transl. Math. Monogr., **88**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, viii+139 pp.

[39] A. Khovanskii, "Newton polyhedra and good compactification theorem", *Arnold Math. J.*, Publ. online: 2020, 23 pp.; 2020, 19 pp., arXiv: 2002.02069.

[40] А. Г. Хованский, "Многогранники Ньютона и неприводимые компоненты полных пересечений", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **80**:1 (2016), 281–304; англ. пер.: A. G. Khovanskii, "Newton polytopes and irreducible components of complete intersections", *Izv. Math.*, **80**:1 (2016), 263–284.

[41] A. Khovanskiĭ, V. Timorin, "On the theory of coconvex bodies", *Discrete Comput. Geom.*, **52**:4 (2014), 806–823; 2013, 17 pp., arXiv: 1308.1781.

[42] A. G. Kouchnirenko, "Polyèdres de Newton et nombres de Milnor", *Invent. Math.*, **32**:1 (1976), 1–31.

[43] D. Maclagan, B. Sturmfels, *Introduction to tropical geometry*, Grad. Stud. Math., **161**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, xii+363 pp.

[44] R. D. MacPherson, "Chern classes for singular algebraic varieties", *Ann. of Math.* (2), **100** (1974), 423–432.

[45] H. Markwig, T. Markwig, E. Shustin, "Enumeration of complex and real surfaces via tropical geometry", *Adv. Geom.*, **18**:1 (2018), 69–100; 2018 (v1 – 2015), 30 pp., arXiv: 1503.08593.

[46] P. McMullen, "The polytope algebra", *Adv. Math.*, **78**:1 (1989), 76–130.

[47] G. Mikhalkin, "Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$", *J. Amer. Math. Soc.*, **18**:2 (2005), 313–377; 2004 (v1 – 2003), 83 pp., arXiv: math/0312530.

[48] G. Mikhalkin, "Tropical geometry and its applications", *Proceedings of the International congress of mathematicians*, v. II (Madrid, 2006), Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, 827–852; 2006, 22 pp., arXiv: math/0601041.

[49] H. Minkowski, "Theorie der konvexen Körpern, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs", *Gesammelte Abhandlungen*, v. 2, B. G. Teubner, Leipzig, 1911, 131–229.

[50] M. Oka, "Principal zeta-function of non-degenerate complete intersection singularity", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **37**:1 (1990), 11–32.

[51] R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn–Minkowski theory*, 2nd ed., Encyclopedia Math. Appl., **151**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014, xxii+736 pp.

[52] M. H. Schwartz, "Classes et caractères de Chern–Mather des espaces linéaires", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **295**:5 (1982), 399–402.

[53] E. Shustin, "A tropical approach to enumerative geometry", *Алгебра и анализ*, **17**:2 (2005), 170–214; *St. Petersburg Math. J.*, **17**:2 (2006), 343–375.

[54] E. Shustin, "Tropical and algebraic curves with multiple points", *Perspectives in analysis, geometry, and topology*, Progr. Math., **296**, Birkhäuser/Springer, New York, 2012, 431–464; 2009, 35 pp., arXiv: 0904.2834.

[55] T. Nishinou, B. Siebert, "Toric degenerations of toric varieties and tropical curves", *Duke Math. J.*, **135**:1 (2006), 1–51; 2006 (v1 – 2004), 41 pp., arXiv: math/0409060.

[56] D. Speyer, "Horn's problem, Vinnikov curves, and the hive cone", *Duke Math. J.*, **127**:3 (2005), 395–427.

[57] R. P. Stanley, "The number of faces of a simplicial convex polytope", *Adv. Math.*, **35**:3 (1980), 236–238.

[58] R. Stanley, "Generalized H-vectors, intersection cohomology of toric varieties, and related results", *Commutative algebra and combinatorics* (Kyoto, 1985), Adv. Stud. Pure Math., **11**, North-Holland, Amsterdam, 1987, 187–213.

[59] B. Sturmfels, "On the Newton polytope of the resultant", *J. Algebraic Combin.*, **3**:2 (1994), 207–236.

[60] B. Sturmfels, *Solving systems of polynomial equations*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., **97**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, viii+152 pp.

[61] B. Teissier, "Du théorème de l'index de Hodge aux inégalités isopérimétriques", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **288**:4 (1979), A287–A289.

[62] J. Tevelev, "Compactifications of subvarieties of tori", *Amer. J. Math.*, **129**:4 (2007), 1087–1104; 2005 (v1 – 2004), 14 pp., arXiv: math/0412329.

[63] I. Tyomkin, "Tropical geometry and correspondence theorems via toric stacks", *Math. Ann.*, **353**:3 (2012), 945–995; 2011 (v1 – 2010), 49 pp., arXiv: 1001.1554.

[64] A. N. Varchenko, "Zeta-function of monodromy and Newton's diagram", *Invent. Math.*, **37**:3 (1976), 253–262.

[65] O. Y. Viro, "Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degrees 6 and 7", *Topology* (Leningrad, 1982), Lecture Notes in Math., **1060**, Springer, Berlin, 1984, 187–200.

[66] O. Viro, *Hyperfields for tropical geometry I. Hyperfields and dequantization*, 2010, 47 pp., arXiv: 1006.3034v2.

[67] H. Weyl, "Mean motion", *Amer. J. Math.*, **60**:4 (1938), 889–896.

[68] B. Zilber, "Exponential sums equations and the Schanuel conjecture", *J. London Math. Soc.* (2), **65**:1 (2002), 27–44.

Борис Яковлевич Казарновский
(Boris Ya. Kazarnovskii)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук
E-mail: kazbori@gmail.com

Поступила в редакцию
25.11.2019

Аскольд Георгиевич Хованский
(Askold G. Khovanskii)
Независимый Московский университет;
University of Toronto, Toronto, Canada
E-mail: askold@math.toronto.edu

Александр Исаакович Эстеров
(Alexander I. Èsterov)
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
E-mail: aesterov@hse.ru