Многогранники и алгебра

А. Г. Хованский

Теория многогранников Ньютона связывает геометрию многогранников с алгебраической геометрией. Я начал работать в этой области с момента ее возникновения в середине 1970-х годов, незадолго до перехода в наш институт, который в то время только что открылся. Ниже я рассказываю о некоторых результатах этой теории и об истории их возникновения. При этом я ограничиваюсь лишь событиями, в которых принимал непосредственное участие.

Многогранники Ньютона

Полиномом Лорана от переменных $x_1, \dots, x_n$ называется сумма $\sum c_k x^k$, где $k = k_1, \dots, k_n$, $x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ и k_i — целые числа (не обязательно положительные). Полином Лорана является регулярной функцией на пространстве $(\mathbb{C}^*)^n$ $(x \in \mathbb{C}^*)$, если $x_1 \neq 0, \dots, x_n \neq 0)$. Пространство $(\mathbb{C}^*)^n$ является группой относительно покоординатного умножения. Степени k мономов x^k можно рассматривать как целые точки, лежащие в решетке $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ характеров группы $(\mathbb{C}^*)^n$. *Многогранник Ньютона* полинома Лорана P — это выпуклая оболочка степеней k, для которых коэффициент c_k не равен нулю. Например, многогранник Ньютона полинома

$$y^2 + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

при $a_0 \neq 0$ и $a_3 \neq 0$ — это треугольник с вершинами $(0,0)$, $(3,0)$ и $(0,2)$.

Сформулируем теперь основную задачу теории многогранников Ньютона. Рассмотрим алгебраическое многообразие X, определенное в $(\mathbb{C}^*)^n$ системой уравнений

$$P_1 = \ldots = P_k = 0,$$

в которой P_i — полином Лорана с многогранником Ньютона Δ_i. Предположим, что многогранники Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ фиксированы, а полиномы Лорана $P_1, \ldots, P_k$ достаточно общи для этих фиксированных многогранников. Основная задача теории многогранников Ньютона заключается в вычислении дискретных инвариантов многообразия X в терминах многогранников Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$.

Пример 1. Пусть число уравнений k равно числу неизвестных n. В этом случае многообразие X состоит из отдельных точек, и задача заключается в определении их числа. Предположим дополнительно, что многогранники Ньютона всех уравнений совпадают между собой. Тогда, согласно теореме Кушниренко, искомое число точек равно умноженному на $n!$ объему многогранника Δ.

Пример 2. Пусть число уравнений k равно единице, а искомый инвариант — эйлерова характеристика гиперповерхности X. В этом примере искомый инвариант равен умноженному на $(-1)^{n-1}n!$ объему многогранника Ньютона уравнения гиперповерхности X.

Пример 3. Пусть число уравнений k равно единице, а искомый инвариант — геометрический род гиперповерхности X. В этом примере искомый инвариант равен числу целых точек, лежащих строго внутри многогранника Ньютона уравнения гиперповерхности X. В частности, род кривой, определенной уравнением

$$y^2 + a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$$

с достаточно общими коэффициентами, равен единице, так как треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(3, 0)$ и $(0, 2)$ имеет ровно одну внутреннюю целую точку $(1, 1)$.

Теория многогранников Ньютона имеет и различные варианты. Например, в локальном варианте вычисляются дискретные инварианты критической точки функции по ее диаграмме Ньютона. Многогранники Ньютона применяются, например, в вещественной алгебраической геометрии, в теории обобщенных гипергеометрических функций.

От теоремы Кушниренко к теореме Бернштейна

А. Г. Кушниренко нашел первый многомерный результат в теории многогранников Ньютона (см. пример 1 выше), решая задачу В. И. Арнольда о вычислении числа Милнора изолированной критической точки функции по ее диаграмме Ньютона. Теорема Кушниренко производила сильное впечатление как своей красотой, так и сложностью доказательства. Вскоре после ее появления образовался маленький неформальный семинар, участниками которого были Д. Н. Бернштейн, Б. Я. Казарновский и я. Целью семинара было осмысление этого результата. Мы сформулировали приведенную выше основную задачу теории многогранников

Ньютона. Первый вопрос, над которым мы начали думать, был следующим. Рассмотрим систему уравнений

$$P_1 = \ldots = P_n = 0$$

в $(\mathbb{C}^*)^n$, где P_i — достаточно общие полиномы Лорана с фиксированными многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Чему равно число корней у такой системы? (Результат Кушниренко соответствует частному случаю $\Delta_1 = \ldots = \Delta_n$.) Первый решительный шаг сделал Бернштейн. Экспериментируя с простыми системами, он нашел следующую эмпирическую формулу для числа решений N:

$$N(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} (-1)^{n-k} V(\Delta_{i_1} + \ldots + \Delta_{i_k}) \right),$$

где $\Delta_{i_1} + \ldots + \Delta_{i_k}$ — сумма Минковского многогранников Ньютона $\Delta_{i_1}, \ldots, \Delta_{i_k}$, V — объем многогранника.

Дальше дело пошло быстрее. Рассматривая эмпирическую формулу, я увидел, что она связана с поляризацией объема на пространстве выпуклых тел. Действительно, если $V(y)$ — любой однородный полином степени n, то формула

$$V(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{n!} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} (-1)^{n-k} V(y_{i_1} + \ldots + y_{i_k}) \right)$$

определяет его поляризацию, т. е. единственную симметричную полилинейную функцию от n векторов $y_1, \ldots, y_n$, которая на диагонали совпадает с исходным полиномом, т. е. $V(y, \ldots, y) = V(y)$. Значение поляризации объема на n выпуклых телах называется *смешанным объемом* Минковского (основательно забытое к этому времени понятие, которое я переоткрыл). В этих терминах число N равно умноженному на $n!$ смешанному объему $V(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$.

Теперь эмпирическая формула Бернштейна естественно согласовывалась с теоремой Кушниренко (здесь надо иметь в виду, что при перемножении полиномов Лорана их многогранники Ньютона складываются).

Мы все еще не имели простого доказательства теоремы Кушниренко. Затем, читая очень интересный обзор Н. Г. Чеботарева [1], я наткнулся на теорему Миндинга, который в первой половине 19 века построил алгоритм вычисления числа корней системы двух полиномиальных уравнений с двумя неизвестными, использующий многоугольники Ньютона. Применяя этот алгоритм, я доказал как теорему Кушниренко, так и эмпирическую формулу Бернштейна для двух переменных методами математики прошлого века. После этого Бернштейн [2] простым и остроумным приемом обобщил рассуждения Миндинга и доказал свою формулу для любого n.

От теоремы Кушниренко—Бернштейна к торическим многообразиям

Число корней вырожденных систем всегда меньше, чем число Кушниренко—Бернштейна. Этот эффект связан с некомпактностью пространства $(\mathbb{C}^*)^n$. Может быть, можно так компактифицировать $(\mathbb{C}^*)^n$, чтобы задача переносилась на полученное компактное многообразие и для невырожденных систем уравнений имела бы то же число решений? На искомом компактном многообразии, как минимум, должны иметь смысл полиномы Лорана и многогранники Ньютона. Означает это следующее. С любым многообразием связан атлас карт, его покрывающих. Пусть в одной из карт атласа фиксирован полином Лорана с некоторым многогранником Ньютона Δ. При переходе к другой карте многогранник Ньютона полинома Лорана не должен разрушаться, а должен преобразовываться разумным образом — иначе на многообразии просто нельзя говорить о многогранниках Ньютона. Вообще говоря, при замене координат многогранник Ньютона полностью разрушается. Но, к счастью, существует очень специальный класс замен координат, при которых многогранник Ньютона меняется разумным образом. Именно, заменам координат

$$y_1 = x_1^{a_{11}} \dots x_n^{a_{1n}}, \dots, y_n = x_1^{a_{n1}} \dots x_n^{a_{nn}}, \tag{1}$$

для которых матрица $A = (a_{ij})$ целочисленна и имеет определитель, равный единице, соответствует линейное преобразование многогранников Ньютона с матрицей A^*. Действительно, моном y^k при такой замене координат переходит в моном x^m, где $m = A^* k$. Заменами координат (1) и раньше пользовались при работе с многогранниками Ньютона (библиографию по этому вопросу можно найти, например, в книге А. Д. Брюно *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях.* Москва, Наука, Физматлит, 1998).

Именно поэтому я заинтересовался следующим вопросом: какие гладкие компактные многообразия имеют атласы карт, для которых переход от одной карты к другой задается преобразованиями вида (1). Для таких компактных многообразий, в частности, можно формулировать задачу Кушниренко—Бернштейна и можно ожидать, что она будет иметь несложное решение. Мне повезло: оказалось, что многообразия, которые я искал, известны и изучены. Это *торические многообразия*, которые раньше рассматривались в связи с вопросом классификации алгебраических многообразий, на которые действует группа $(\mathbb{C}^*)^n$.

В статье [3] по многогранникам Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ я построил неособую торическую компактификацию M_Δ пространства $(\mathbb{C}^*)^n$. Замыкание $\overline{X}$ в M_Δ многообразия X, определенного в $(\mathbb{C}^*)^n$ общей системой $P_1 = \ldots = P_k = 0$, оказывается неособым многообразием, трансверсальным всем орбитам действия группы $(\mathbb{C}^*)^n$ на M_Δ. Эта конструкция связала теорию многогранников Ньютона с теорией торических многообразий, а элементарную геометрию многогранников (их целочисленную и комбинаторную структуру, теорию объемов) она связала с алгебраической геометрией. Техника торических многообразий лежит в основе теории многогранников Ньютона. «Элементарных» вычислений, не использующих открытой в [3] конструкции, очень мало (их можно пересчитать по пальцам).

Целочисленная структура многогранников

Целочисленным многогранником в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклый многогранник Δ, вершины которого принадлежат решетке $\mathbb{Z}^n$ целых точек. Обозначим через $k\Delta$ многогранник, полученный гомотетичным растяжением многогранника Δ в k раз, где k — целое число. В геометрии были известны следующие замечательные свойства числа целых точек в целочисленных многогранниках $k\Delta$.

1. *Полиномиальность*: функция $T_\Delta(k)$, сопоставляющая целому числу k число целых точек в многограннике $k\Delta$, является полиномом при $k \geqslant 0$, функция $B_\Delta(k)$, сопоставляющая целому числу k число целых внутренних точек в многограннике $k\Delta$, является полиномом при $k > 0$.
2. *Двойственность Эрхарда*: допуская вольность речи, будем обозначать символами T_Δ и B_Δ полиномы, которые совпадают в натуральных точках с функциями T_Δ и B_Δ. Тогда для этих полиномов справедливо тождество
$$T_\Delta(-x) = (-1)^{\dim \Delta} B_\Delta(x),$$
в котором $\dim \Delta$ — размерность многогранника Δ.

В работе [3] оба эти свойства были доказаны методами алгебраической геометрии. С многогранником Δ естественно связывается линейное расслоение на соответствующей торической компактификации пространства $(\mathbb{C}^*)^n$. Эйлерова характеристика торического многообразия с коэффициентами в пучке голоморфных сечений этого линейного расслоения равна числу целых точек в многограннике Δ. Теорема Римана—Роха доставляет явную формулу для эйлеровой характеристики алгебраического многообразия с коэффициентами в пучке голоморфных сечений линейного расслоения через характеристические классы расслоения. Эта формула полиномиальна. Поэтому полиномиальность числа целых точек является автоматическим следствием теоремы Римана—Роха. Аналогично двойственность Эрхарда непосредственно вытекает из двойственности Серра.

Найденная в [3] связь числа целых точек в целочисленных многогранниках с теоремой Римана—Роха оказала влияние на все дальнейшее развитие этой области. Явная топологическая формула для эйлеровой характеристики из теоремы Римана—Роха в применении к геометрии многогранников означает, что число целых точек в целочисленных многогранниках должно явно выражаться через объемы многогранников.

Более чем десятилетие я никак не мог найти этого явного выражения, хотя время от времени возвращался к этой задаче. Затем мы начали работать над этой задачей вместе с замечательным молодым математиком, в то время сотрудником нашего института Сашей Пухликовым. В 1989 году нам, наконец, удалось найти искомую формулу [4]. Мы использовали трюк, который, во-первых, проливает новый свет на теорему Кушниренко—Бернштейна и ее связь с теорией торических многообразий и, во-вторых, имеет другие применения в геометрии многогранников. Ниже я остановлюсь на этом подробнее. А сейчас перейду к *неравенствам Александрова—Фенхеля.*

Смешанные объемы многогранников

Неравенства Александрова—Фенхеля — это центральный результат теории смешанных объемов, имеющий многочисленные применения в геометрии. Например, из него вытекает классическое изопериметрическое неравенство. Неравенство Александрова—Фенхеля для смешанных объемов выпуклых тел $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ в $\mathbb{R}^n$ заключается в следующем соотношении:

$$V^2(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n) \geqslant V(\Delta_1, \Delta_1, \Delta_3, \ldots, \Delta_n)V(\Delta_2, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n).$$

Все известные геометрические доказательства этого неравенства достаточно сложны. В них неравенство сводится к старой теореме Брунна—Минковского. Именно в этом сведении содержится главная трудность.

Доказательство, использующее алгебраическую геометрию, было независимо найдено Б. Тессье и мной в конце 1970-х годов. Идея этого доказательства настолько проста, что ее можно здесь полностью привести. Пусть Γ_1, Γ_2 — алгебраические кривые на неособой связной проективной алгебраической поверхности M. Тогда при незначительных ограничениях на кривые Γ_1 и Γ_2 выполняется следующая

Теорема Ходжа об индексе. *Справедливо неравенство*

$$(\Gamma_1, \Gamma_2) \geqslant (\Gamma_1, \Gamma_1)(\Gamma_2, \Gamma_2),$$

где (Γ_i, Γ_j) — *индекс пересечения* (*или самопересечения*) *соответствующих кривых.*

Обозначим через M^0 некомпактную алгебраическую поверхность, определенную в $(\mathbb{C}^*)^n$ системой уравнений

$$P_3 = \ldots = P_n = 0,$$

где $P_3, \ldots, P_3$ — достаточно общие полиномы Лорана с многогранниками Ньютона $\Delta_3, \ldots, \Delta_n$. Несложно показать, что если многогранники Ньютона имеют полную размерность, $\dim \Delta_3 = \ldots = \dim \Delta_n = n$, то поверхность M^0 связна. Пусть Γ_1^0 и Γ_2^0 — некомпактные алгебраические кривые, определенные на поверхности M^0 общими уравнениями $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$ с многогранниками Ньютона Δ_1 и Δ_2. Согласно теореме Бернштейна, число точек пересечения кривых Γ_1^0 и Γ_2^0 равно $n!V(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$. На интуитивном уровне это число следует воспринимать как индекс пересечения кривых Γ_1^0 и Γ_2^0 (строго говоря, поверхность M^0 некомпактна, а теория пересечений строится на компактных многообразиях). Пусть $\widetilde{\Gamma}_1^0$ и $\widetilde{\Gamma}_2^0$ — алгебраические кривые, заданные на поверхности M^0 уравнениями $\widetilde{P}_1 = 0$ и $\widetilde{P}_2 = 0$, которые получаются из уравнений $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$ достаточно общим малым изменением их коэффициентов. Для $i = 1, 2$, согласно теореме Бернштейна, число точек пересечения кривых Γ_i^0, $\widetilde{\Gamma}_i^0$ равно $n!V(\Delta_i, \Delta_i, \Delta_3, \ldots, \Delta_n)$. На интуитивном уровне это число следует воспринимать как индекс самопересечения кривой Γ_i^0 (строго говоря, индекс самопересечения кривой Γ_i^0 не определен, так как поверхность M^0 некомпактна).

Пусть M_Δ — гладкая торическая компактификация пространства $(\mathbb{C}^*)^n$, построенная по многогранникам $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ (см. выше и [3]). Пусть M — замыкание поверхности M^0 в этой компактификации, и Γ_i — замыкание кривой Γ_i^0 в этой компактификации. При $i = 1, 2$ и $j = 1, 2$ индекс пересечения (или самопересечения) кривых Γ_i и Γ_j равен $n!V(\Delta_i, \Delta_j, \Delta_3, \ldots, \Delta_n)$. Подставляя значения для индексов пересечений в неравенство из теоремы Ходжа об индексе, получаем неравенство Александрова—Фенхеля для многогранников Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$.

Тем самым мы доказали это неравенство для многогранников полной размерности с целыми вершинами. Доказательство распространяется на многогранники полной размерности с рациональными вершинами при помощи гомотетии и затем на любые выпуклые тела при помощи предельного перехода.

Объем многогранника и кольцо когомологий торического многообразия

Начнем с конструкции, позволяющей по однородному полиному V степени n в линейном пространстве L построить градуированное коммутативное кольцо. Рассмотрим коммутативное кольцо D всех линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на пространстве L. В этом кольце выделим идеал I, состоящий из дифференциальных операторов, аннулирующих полином V. С полиномом V свяжем коммутативное *факторкольцо D/I, являющееся прямой суммой своих однородных компонент степеней от нуля до n. В этом сопоставлении и заключается наша конструкция.

Вернемся к геометрии многогранников. Пусть Δ — *простой* выпуклый многогранник (т. е. пересечение полупространств, находящихся в общем положении) в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть многогранник Δ имеет N граней старшей размерности. Рассмотрим N-мерное семейство выпуклых многогранников, определенных следующим условием: каждая грань старшей размерности многогранника из семейства параллельна одной из граней старшей размерности многогранника Δ, при этом каждый многогранник из семейства имеет ту же комбинаторику, что и многогранник Δ. Описанное семейство многогранников образует конус относительно сложения по Минковскому: сумма по Минковскому двух многогранников семейства снова принадлежит семейству и гомотетичное растяжение многогранника в λ раз, где $\lambda > 0$, тоже принадлежит семейству. Легко проверить, что объем V многогранника семейства является полиномом степени n. Этот полином продолжается на линейное пространство L формальных разностей многогранников из семейства. Применяя к полученному полиному V указанную выше конструкцию, мы получим коммутативное кольцо, являющееся прямой суммой однородных компонент степени от нуля до n.

Это кольцо имеет следующий смысл в алгебраической геометрии. Предположим, что исходный многогранник Δ был целочисленным многогранником. Допустим также, что торическое многообразие, связанное с этим многогранником (см. [3]), является гладким многообразием. Тогда описанное выше кольцо изоморфно кольцу когомологий торического многообразия. Нужно только сменить градуировку — однородная компонента кольца степени k соответствует $2k$-мерным когомологиям.

Этот факт можно рассматривать как обобщение теоремы Кушниренко—Бернштейна. (Забавно, что конструкция кольца имеет смысл для любого простого многогранника Δ, не удовлетворяющего никаким условиям *целочисленности. С таким многогранником не связано никакого алгебраического многообразия. Но мы имеем отличного претендента на роль кольца когомологий этого несуществующего многообразия!)

Именно эта геометрическая конструкция кольца когомологий торического многообразия позволила нам с А. В. Пухликовым найти комбинаторный вариант теоремы Римана—Роха [4]. Перейду теперь к формулировке нашего результата.

Теорема Римана—Роха и число целых точек в целочисленных многогранниках

Начнем с обозначений. Пусть

$$F(h_1, \ldots, h_N) = \sum c_k h^k,$$

где $k = k_1, \ldots, k_N$, $h_k = h_1^{k_1}, \ldots, h_N^{k_N}$, — ряд Тейлора, зависящий от N переменных. Свяжем с этим рядом линейный дифференциальный оператор бесконечного порядка

$$F\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial h_n}\right) = \sum c_k \left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^k,$$

где $k = k_1, \ldots, k_N$ и

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^k = \left(\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_N}}{\partial h_1^{k_1} \ldots \partial h_N^{k_N}}\right).$$

Такой оператор можно применять ко всем полиномам от $h_1, \ldots, h_N$ и к некоторым бесконечно гладким функциям от этих переменных. Рассмотрим теперь функцию

$$T = \prod_{1 \leqslant i \leqslant N} \left(\frac{h_i}{1 - e^{-h_i}}\right).$$

Для нас важную роль будет играть оператор Тодда

$$T\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial h_n}\right) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant N} \left(\frac{\dfrac{\partial}{\partial h_i}}{1 - e^{-\partial/\partial h_i}}\right),$$

связанный с рядом Тейлора функции T в начале координат.

Пусть Δ — целочисленный многогранник в $\mathbb{R}^n$, заданный линейными неравенствами $\langle l_i, x\rangle \leqslant c_i$, $i = 1, \ldots, N$, где l_i — несократимые целочисленные вектора, нормальные к граням старшей размерности многогранника Δ. Предположим дополнительно, что многогранник Δ является не только простым, но и *целочисленно простым*. Последнее условие означает, что для каждой вершины A многогранника Δ целочисленные нормали $l_i(A)$ к граням старшей размерности, пересекающимся в вершине A, образуют базис в целочисленой решетке пространства $\mathbb{R}^n$. С каждым вектором $h = h_1, \ldots, h_N$, достаточно близким к вектору $c = c_1, \ldots, c_N$, свяжем многогранник $\Delta(h)$, определенный неравенствами $\langle l_i, x\rangle \leqslant h_i$, $i = 1, \ldots, N$. В частности, многогранник $\Delta(c)$ совпадает с исходным многогранником Δ. Объем $V(\Delta(h))$ полиномиально зависит от h.

Комбинаторная теорема Римана—Роха. *Применим к полиному $V(\Delta(h))$ оператор Тодда и вычислим значение полученного полинома в точке $x = c$. Тогда это значение равняется числу целых точек, лежащих в *многогораннике $\Delta = \Delta(c)$.*

Эта теорема дает явное вычисление числа целых точек в целочисленно простых целочисленных многогранниках Δ по многочлену объема семейства многогранников $\Delta(h)$. Она непосредственно вытекает из теоремы Римана—Роха — вывод основан на описании кольца когомологий торического многообразия через многочлен объема. (Условие целочисленной простоты многогранника Δ гарантирует, что соответствующая торическая компактификация будет неособым многообразием.)

Впрочем, нам с Пухликовым удалось найти совершенно элементарное доказательство приведенной теоремы, а заодно и усилить ее. При этом усиленная версия этой теоремы оказалась многомерным вариантом классической формулы Эйлера—Маклорена, которая связывает интеграл функции по отрезку с суммой значений этой функции по всем целым точкам, принадлежащим этому отрезку. Перейдем к формулировке этой более общей теоремы.

Пусть $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — произвольный полином на пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $I(h)$ интеграл $\int\limits_{\Delta(h)} P\, dx_1 \ldots dx_n$, где $\Delta(h)$ — многогранник из семейства, соответствующий вектору h. Легко видеть, что функция $I(h)$ является полиномом.

Многомерный вариант формулы Эйлера—Маклорена. *Применим к полиному $I(h)$ оператор Тодда и вычислим значение полученного полинома в точке $h = c$. Тогда это значение равняется сумме значений полинома P по всем целым точкам, лежащим в *многогораннике $\Delta = \Delta(c)$.*

Комбинаторная теорема Римана—Роха является частным случаем многомерного варианта формулы Эйлера—Маклорена, соответствующим полиному Р,тождественно равному единице. В 1989 году я докладывал этот результат в МГУ на семинаре В. И. Арнольда, в следующем году — в Гарварде и в других университетах. Наша работа нашла продолжение: М. Брион и М. Верн, С. Капелль и Гж. Шанесон открыли более общие варианты нашей формулы, связанные с обобщениями теоремы Римана—Роха на случай особых алгебраических многообразий. Совсем недавно Я. Каршон, Ш. Стернберг и Дж. Вейцман [5], нашли еще более сильное обобщение. Интересно, что в доказательстве они используют в чуть-чуть модифицированном виде наш с Пухликовым метод.

Комбинаторика многогранников

С каждым простым многогранником Δ связан его f-вектор, $f = f_0, \ldots, f_n$, где f_i — число граней многогранника Δ размерности i. Как узнать, является ли заданный вектор f-вектором некоторого простого многогранника? П. МакМаллен нашел ответ на этот вопрос. Для его формулировки удобно сначала преобразовать f-вектор. Набор чисел $h_0, \ldots, h_n$ называется *h-вектором* многогранника Δ, если выполняется тождество $\sum h_k t^k = \sum f_l (t-1)^l$, где $f_0, \ldots, f_n$ — f-вектор многогранника. По h-вектору можно восстановить f-вектор, так как $\sum f_l t^l = \sum h_k (t+1)^k$. Согласно гипотезе Мак-Маллена, для h-вектора должны выполняться следующие соотношения:

1. *Соотношение Дена—Зоммервиля*: $h_i = h_{n-i}$ для любого $0 \leqslant i \leqslant n$, причем, $h_0 = h_n = 1$;
2. *Ограничение на скорость роста*: для всякого $0 < i < n/2$ выполнено неравенство $(h_{i+1} - h_i) \leqslant \varphi_i(h_i - h_{i-1})$ где φ_i — некоторая явно выписываемая универсальная функция от натурального аргумента;
3. *Возрастание к середине*: $h_{i-1} \leqslant h_i$, если $0 < i \leqslant n/2$.

Р. Стэнли доказал необходимость, а Биллера и Ли доказали достаточность условий МакМаллена на h-вектор.

Наметим идею доказательства Р. Стэнли, которое изящно использует алгебраическую геометрию. Не меняя комбинаторного типа простого многогранника, его можно немного продеформировать так, чтобы все вершины стали рациональными. Затем, используя гомотетию, его можно превратить в целочисленный многогранник. С каждым целочисленным многогранником связано торическое многообразие. Торическое многообразие, связанное с простым многогранником, является *квазигладким*. Стэнли заметил, что числа h_k являются $2k$-мерными числами Бетти соответствующего квазигладкого торического многообразия. После этого замечания все условия МакМаллена проверяются автоматически. Соотношение Дена—Зоммервиля $h_k = h_{n-k}$ вытекает из двойственности Пуанкаре. Ограничение на скорость роста компонент h-вектора вытекает из того факта, что кольцо когомологий квазигладкого торического многообразия порождено элементами, лежащими в H^2. Возрастание к середине компонент h-вектора вытекает из сильной теоремы Лефшеца (или из теории Ходжа).

Алгебраическая геометрия к этому времени уже применялась в геометрии многогранников. С ее помощью доказывались старые теоремы и открывались новые. Однако, кроме алгебраического доказательства удавалось найти аналогичное геометрическое доказательство, которое временами работало в большей общности и доставляло более полное понимание предмета. Теорема Стэнли была исключением. Если соотношение Дена—Зоммервиля было доказано еще в начале прошлого века, то все попытки найти доказательство возрастания к середине компонент h-вектора, не использующее алгебраической геометрии, оставались тщетными. Наконец, МакМаллен добился успеха [6]. Хотя доказательство МакМаллена посвоему замечательно, оно весьма громоздко и совершенно несопоставимо с прозрачным рассуждением Стэнли. По-моему, главная причина тяжеловесности доказательства МакМаллена — неудачное описание геометрического аналога кольца когомологии торического многообразия.

Мой ученик Владлен Тиморин [7] упростил доказательство П. МакМаллена. В качестве геометрического аналога кольца когомологии он использовал кольцо, построенное по полиному объема простого многогранника (см. выше). На самом деле Тиморин нашел аналоги сильной теоремы Лефшеца и разложения Ходжа в этом кольце. Заодно он нашел новое геометрическое доказательство неравенств Александрова—Фенхеля, не использующее теоремы Брунна—Минковского.

Несколько слов еще об одном результате из комбинаторики многогранников. Каждая l-мерная грань n-мерного куба содержит ровно $C_l^k 2^k$ граней размерности k. Используя теорему Стэнли, несложно показать, что среднее число k-мерных граней на l-мерной грани любого простого n-мерного многогранника не превосходит числа $C_l^k 2^k + \varepsilon$, где ε — явно выписываемая функция от n, k, l, которая не зависит от выбора многогранника. При фиксированных kи l функция ε стремится к нулю при $n \to \infty$. Скажем, что n-мерный многогранник *прост в ребрах*, если в каждом его ребре пересекается ровно $(n-1)$ грань старшей размерности. Каждый простой многогранник прост в ребрах. Для простых в ребрах многогранников теорема Стэнли неверна. Однако, для n-мерных многогранников, простых в ребрах, выполняется в точности та же оценка среднего числа k-мерных граней на l-мерной грани.

Мне удалось найти это обобщение, используя связь с алгебраической геометрией. Доказательство можно найти в статье [8], в которой содержится также простое доказательство соотношений Дена—Зоммервиля, имитирующее в геометрии многогранников доказательство двойственности

Пуанкаре при помощи теории Морса. Это обобщение применяется в геометрии Лобачевского. Используя его, можно показать, что в n-мерном пространстве Лобачевского при $n > 995$ не существует дискретных групп, порожденных отражениями, с фундаментальным многогранником конечного объема (ссылки на основополагающие работы В. В. Никулина, Э. Б. Винберга и М. Прохорова по этому предмету можно найти в [8]).

Снова о кольце, построенном по полиному объема простого многогранника

Это кольцо моделирует кольцо когомологии гладкого торического многообразия. В этом кольце есть оператор Тодда, аналоги сильной теоремы Левшеца и структуры Ходжа. Оно помогло найти многомерный вариант формулы Эйлера—Макларена, прозрачное доказательство гипотезы Мак-Маллена и непосредственное (т. е. не использующее теоремы Брунна—Минковского) геометрическое доказательство неравенств Александрова—Фехнкеля. Это кольцо — яркий пример связи геометрии многогранников и алгебраической геометрии.

Литература

1. *Чеботарев Н. Г.* Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики. Собр. соч.. Т. 3. М.; Л., 1950. С. 47–80.
2. *Бернштейн Д. Н.* Число корней системы уравнений // Функцион. анализ и его прил. 9 (1975). Вып. 3, 1–4.
3. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и торические многообразия // Функцион. анализ и его прил. 11 (1977). Вып. 4, 56–64.
4. *Пухликов А. В.*, *Хованский А. Г.* Теорема Римана—Роха для интегралов и сумм квазиполиномов по виртуальным многогранникам // Алгебра и анализ. 4 (1992). Вып. 4, 188–216.
5. *Karshon Y.*, *Sternberg S.*, *Weitsman J.* Euler Maclaurinwith remainder for a simple integral polytope. Duke Mathematical Journal (to appear).
6. *McMullen P.* On simple polytops, Invent.math. 113(1993), 419–444.
7. *Тиморин В. А.* Аналог соотношения Ходжа—Римана для простых выпуклых многогранников // УМН 54 (1999). Вып. 2, 381–426.
8. *Хованский А. Г.* Гиперплоские сечения многогранников, торические многообразия и дискретные группы в пространстве Лобачевского // Функцион. анализ и его прил. 20 (1986). Вып. 1, 50–61.