А. Г. Хованский

ПРОБЛЕМА АРНОЛЬДА О ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Я хочу рассказать о нашей совместной работе с Митей Новиковым [1]—[3], посвященной проблеме Арнольда. Проблему мы не решили. Я больше не в силах думать про эту задачу. Кое-что нам удалось сделать, особенно в аффинном случае. В проективном случае мы тоже доказали одну теорему, но наш результат никак не соответствует затраченным усилиям. Мне хочется рассказать о наших результатах и устроить рекламу проблеме Арнольда.

В $\mathbb{R}^n$ выделяются своей простотой выпуклые гиперповерхности. Они обладают тем свойством, что в каждой точке их вторая квадратичная форма невырожденная; около каждой точки гиперповерхности можно ввести систему координат, для которой одна из координатных гиперплоскостей касается гиперповерхности и одна из осей координат — нормаль к гиперповерхности, глядящая из области, ограниченной гиперповерхностью. В такой системе координат гиперповерхность локально выглядит как график функции, которая с точностью до членов меньшего порядка является отрицательно определённой квадратичной формой. Никаких других компактных гиперповерхностей с невырожденной второй квадратичной формой, кроме выпуклых, нет. Действительно, по условию гиперповерхность компактна. Поэтому она помещается внутри сферы достаточно большого радиуса. Возьмём минимальную сферу, которая содержит рассматриваемую гиперповерхность. Тогда в самой удалённой от центра сферы точке вся гиперповерхность лежит по одну сторону от сферы. В этой точке гиперповерхность выпукла. Поэтому не может быть компактной гиперповерхности в $\mathbb{R}^n$, которая была бы всюду гиперболична. Но в проективном пространстве такие гиперповерхности есть. Простейший пример — гиперболоид в $\mathbb{R}P^3$. Эта поверхность гиперболична в следующем смысле: в окрестности каждой точки поверхность не лежит по одну сторону от плоскости, касающейся поверхности в этой точке. Такая поверхность по одним направлениям выпукла, а по другим вогнута.

Про выпуклые гиперповерхности есть масса замечательных результатов; некоторые из них, например, теорема Хелли и теорема Браудера, нам сегодня понадобятся. Теория выпуклых гиперповерхностей встречается практически всюду. Она простая, многое в ней до конца сделано.

Как описать гиперповерхности в проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$, у которых вторая квадратичная форма нигде не вырождена? В этом вопросе и заключается проблема Арнольда. Эту же проблему независимо от Арнольда поставил Громов [5]. Это совершенно открытая задача, про которую не известно практически ничего.

Арнольд конкретизировал свой вопрос. Перейдём к этому более конкретному вопросу Арнольда в простейшем случае. Пусть в $\mathbb{R}P^3$ есть связная поверхность, которая является границей области. Пусть известно, что вторая квадратичная форма этой поверхности в каждой точке невырождена и имеет один плюс и один минус. Примером такой поверхности может служить гиперболоид. Гиперболоид ограничивает область. Про эту область верно следующее: внутри неё находится прямая, и вне неё находится прямая. Более того, если мы возьмём одну точку на внутренней прямой и одну точку на внешней прямой и соединим эти точки отрезком, то этот отрезок пересекает гиперболоид ровно в одной точке. Очень похоже дело обстоит и для выпуклых гиперповерхностей. Для выпуклой гиперповерхности вторая квадратичная форма всюду отрицательна (если её рассматривать как график функции в направлении нормального вектора, глядящего из области, ограниченной гиперповерхностью); у неё есть $n-1$ отрицательных квадратов. И вне нашей выпуклой гиперповерхности существует $(n-1)$-мерное пространство. У квадратичной формы есть 0 положительных квадратов, и внутри поверхности находится 0-мерное пространство, т. е. точка. Если мы возьмём любой отрезок, соединяющий точку, лежащую внутри поверхности, с точкой $(n-1)$-мерного пространства, расположенного вне поверхности, то этот отрезок пересекает выпуклую гиперповерхность ровно один раз.

Пусть в $\mathbb{R}P^n$ задана гладкая связная гиперповерхность Γ, которая является границей области U. Пусть вторая квадратичная форма гиперповерхности Γ в каждой точке невырождена. Тогда сигнатура второй квадратичной формы от выбора точки не зависит. Пусть эта форма имеет k минусов и, соответственно, $n-1-k$ плюсов (размерность Γ равна $n-1$). Тогда согласно гипотезе Арнольда вне области U лежит проективное подпространство $\mathbb{R}P^k$, а внутри области U лежит проективное подпространство $\mathbb{R}P^{n-1-k}$. Более того, согласно гипотезе Арнольда эти подпространства можно выбрать так, что любой отрезок, их соединяющий, пересекает гиперповерхность Γ ровно в одной точке.

Гипотеза Арнольда верна для выпуклых гиперповерхностей в проективном пространстве. Пусть в $\mathbb{R}P^n$ есть гиперповерхность, у которой вторая квадратичная форма всюду отрицательна. Тогда есть классическая теорема о том, что эта гиперповерхность — выпуклая гиперповерхность в некотором аффинном пространстве. Точнее: существует гиперплоскость, не пересекающая эту гиперповерхность. Дополнение проективного пространства до гиперповерхности имеет структуру аффинного пространства. В этом аффинном пространстве рассматриваемая гиперповерхность является выпуклой в обычном смысле слова.

Арнольд кроме исходной проблемы сформулировал близкие задачи. Пусть гиперповерхность задана не в $\mathbb{R}P^n$, а в $\mathbb{R}^n$. Но зато известна её асимптотика ухода на бесконечность (я приведу примеры таких асимптотик). Вопрос остаётся тем же самым: верно ли, что внутри гиперповерхности находится аффинное подпространство нужной размерности и вне гиперповерхности находится аффинное подпространство нужной размерности?

Мы доказали (даже в многомерном случае), что для той конкретной асимптотики, про которую спрашивал Арнольд, ответ положительный. Внутри гиперповерхности с такой асимптотикой находится пространство нужной размерности и вне неё находится пространство дополнительной размерности. Про отрезок, соединяющий подпространства, мы получили лишь частичный результат. Кроме того, Арнольд спрашивал и про другие асимптотики. И мы с большим удивлением увидели, что для некоторых других асимптотик ответ отрицательный. После того как получилось очень простое доказательство задачи Арнольда для исходной асимптотики, мы были уверены, что гипотеза верна и для других асимптотик. Мы долго это доказывали, но в конце концов построили контрпримеры. Сначала мы эти контрпримеры даже клеили из бумаги, чтобы себя убедить в том, что они верны. Контрпример строить довольно трудно. Непонятно, как про данную гиперповерхность удостовериться, что она всюду гиперболическая, и почему внутри ограниченной ею области нет прямой. У нас были сомнения. Однако потом их удалось ликвидировать. Для аффинной проблемы все доказательства получились простыми.

Когда мы построили аффинные контрпримеры, мы попытались в этом же классе поверхностей построить проективный контрпример. Но в конце концов мы доказали, что в рассматриваемом классе проективных поверхностей контрпримеров нет. Эта задача свелась к массе частных случаев, многомерных, но всё же конечномерных. Мы постепенно разбирали случай за случаем. На первый случай мы потратили месяц. Потом дело пошло быстрее. В конце концов мы убедились, что во всех случаях внутри поверхности есть прямая. Потом нам удалось резко сократить число случаев, подлежащих рассмотрению. В окончательном варианте их оказалось 6. Это удивительно трудное доказательство; оно никак не соответствует общности теоремы. Мы доказали лишь теорему о том, что внутри «выпукло-вогнутой» поверхности в $\mathbb{R}P^3$ есть прямая.

Теперь я более подробно расскажу про аффинную задачу. Я ограничусь пространством $\mathbb{R}^3$, хотя очень многое, из того, что я расскажу, дословно переносится в n-мерное пространство. Рассмотрим простейший конус $z^2 = x^2 + y^2$. Арнольд предложил в качестве начального шага в его проблеме рассмотреть следующую ситуацию. Пусть есть поверхность в $\mathbb{R}^3$, которая асимптотически на бесконечности совпадает с этим конусом (т. е. пусть замыкание поверхности в $\mathbb{R}P^3$ пересекается с замыканием конуса в $\mathbb{R}P^3$ по окружности, лежащей в бесконечно удалённой плоскости) и пусть эта поверхность гиперболична, т. е. имеет отрицательную гауссову кривизну. Верно ли, что внутри этой поверхности найдётся прямая? (То, что вне поверхности найдётся прямая, сомнений не вызывает.) Ответ: да, верно.

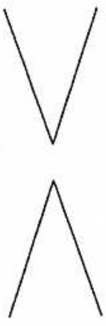


Рис. 1. Раздвинутый конус

Теперь чуть-чуть изменим ситуацию. Рассмотрим такую же задачу, но полы конуса немного раздвинем (рис. 1). Пусть есть поверхность, которая всюду гиперболична и выходит на бесконечности на эти конусы. Верно ли, что внутри поверхности есть прямая? Ответ: нет, не всегда верно.

Справедлив следующий «принцип максимума»: ни в одном из этих случаев поверхность внутрь конуса не входит. Собственно говоря, всё дело в этом принципе максимума. Ось конуса и любая другая прямая, проходящая через вершину конуса и лежащая внутри конуса, по принципу максимума лежит и внутри поверхности. Для раздвинутого конуса принцип максимума не доказывает существования прямой внутри поверхности, и такой прямой и в самом деле может не быть. Если же полы конуса, наоборот, сдвинуть (рис. 2), то тот же самый принцип максимума показывает, что внутри прямая есть. Обе поверхности (раздвинутый конус и сдвинутый конус) на бесконечности имеют особенности, но особенности у них разные. Для раздвинутого конуса поверхность в каждой точке бесконечно удалённой окружности будет эллиптической (т. е. поверхность локально расположена по одну сторону от некоторой опорной плоскости), а для сдвинутого — гиперболической (т. е. она локально рассекается каждой плоскостью, проходящей через точку);

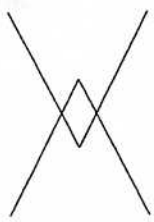
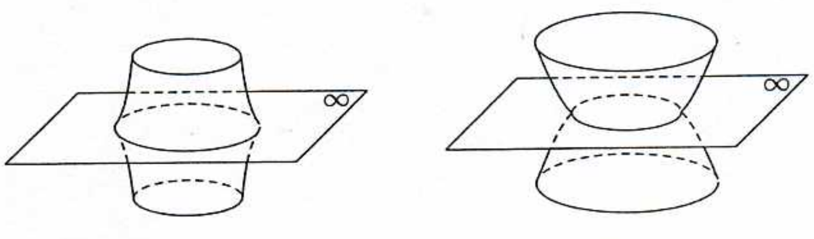


Рис. 2. Сдвинутые конусы



Р и с. 3. Особенности на бесконечности

оба случая изображены на рис. 3. Поверхность становится особой, но гиперболичность в одном случае не нарушается, а в другом нарушается.

Теорема о существовании прямой в аффинном случае получилась достаточно общая, и доказывается она достаточно просто. Доказательство основано на следующей простой топологической лемме.

Л е м м а 1. *Пусть M_1^n — компактное ориентированное n-мерное многообразие, причём $\pi_1(M_1^n)=0$. Пусть есть другое компактное ориентированное n-мерное многообразие M_2^n, у которого, возможно, есть непустая граница ∂M_2^n. Рассмотрим отображение $\pi\colon M_2^n \to M_1^n$, которое обладает следующими свойствами:* 1) *π — локальный гомеоморфизм (это означает, что в окрестности каждой точки π является гомеоморфизмом на образ этой окрестности);* 2) *ограничение отображения π на каждую компоненту связности границы ∂M_2^n является вложением. Тогда π — вложение.*

В частности, в условиях леммы 1 образы разных компонент границы ∂M_2^n не могут пересекаться.

Самый простой случай — когда у многообразия M_2^n границы нет. Тогда π — локальный гомеоморфизм одного компактного многообразия на другое. Локальный гомеоморфизм компактных многообразий является накрытием. Но $\pi_1(M_1^n)=0$, значит, это накрытие однолистное, т. е. оно — гомеоморфизм. Так что, если у M_2^n границы нет, то и доказывать нечего.

Предположим теперь, что у многообразия M_2^n граница есть. Мы сведём этот случай к случаю, когда границы нет. Возьмём компоненту границы ∂M_2^n и рассмотрим её образ. По условию ограничение отображения π на эту компоненту — вложение. В M_1^n возникает вложенная гиперповерхность. Она к тому же коориентирована: на компоненте границы выделена сторона, с которой локально лежит образ M_2^n. У нас возникла коориентированная гиперповерхность $\pi(\partial M_2^n)$ в M_1^n. Но коориентированная гиперповерхность задаёт 1-мерный класс когомологий, сопоставляющий каждой кривой число точек пересечения с этой гиперповерхностью, посчитанное с учётом знаков. Но ненулевого 1-мерного класса когомологий быть не может, потому что если нет π_1, то нет и H^1. Гиперповерхность $\pi(\partial M_2^n)$

задаёт нулевой класс когомологий. Это означает, что она затягивается плёнкой. Возьмём эту плёнку и сделаем с M_2^n следующую хирургию: приклеим к компоненте границы эту плёнку (дальше мы называем её шапкой) по тому отображению, которое здесь возникает; и так сделаем с каждой компонентой границы. Все компоненты границы M_2^n мы заклеили; получилось многообразие без границы. У этого многообразия есть отображение $\bar{\pi}$ в M_1^n. Оно устроено следующим образом. Если мы находимся в старой части многообразия M_2^n, то отображение $\bar{\pi}$ — это старое отображение π. Новая часть многообразия M_2^n состоит из шапок. Но шапки сами собой отображены в M_1^n тождественным отображением. Положим $\bar{\pi}$ на шапках равным этому тождественному отображению. Отображение $\bar{\pi}$ является локальным гомеоморфизмом. Итак, для построенного многообразия без границы есть отображение $\bar{\pi}$, которое является локальным гомеоморфизмом. Такое отображение является взаимно однозначным. Значит, исходное отображение тоже взаимно однозначно.

Вернемся к нашей задаче. Возьмём нашу поверхность и рассмотрим отображение Гаусса поверхности в единичную сферу, которое сопоставляет точке x поверхности единичную нормаль $n(x)$ в точке x к данной поверхности. Это отображение удовлетворяет условиям леммы 1. Действительно, в обычной части поверхности это отображение является локальным гомеоморфизмом. Дело здесь вот в чём. Из-за того, что кривизна поверхности всё время отрицательна, мы знаем, что якобиан гауссова сферического отображения всё время отрицателен: согласно теореме Гаусса якобиан этого отображения совпадает с кривизной, а кривизна по условию отрицательна, потому что вторая квадратичная форма в каждой точке имеет один плюс и один минус. В частности, якобиан в каждой точке отличен от нуля. Рассматриваемая поверхность в $\mathbb{R}^3$ не является многообразием с краем. Но на бесконечности край у него есть: на бесконечности мы можем к ней приделать окружности, которые происходят из конуса. Ведь поверхность на бесконечности постепенно сливается с конусом. Окружность на проективной плоскости нужно раздвоить: одну окружность приклеить с одной стороны, а другую с другой. Мы компактифицировали исходное некомпактное многообразие без края. У нас получилось многообразие с краем, которое отображено на сферу.

Как устроено отображение на бесконечных окружностях, мы знаем, потому что на окружностях будет та же самая нормаль, что и у конуса; поверхность постепенно совпадает с конусом, и нормаль постепенно совпадает с нормалью к конусу. Поэтому на граничных окружностях отображение является гауссовым отображением для конуса; значит, это отображение является вложением.

В итоге получаем, что отображение Гаусса взаимно однозначно отображает нашу поверхность на полоску на сфере, поскольку выполнены все условия леммы 1. Дополнение сферы к полоске состоит из двух компонент, которые мы будем называть выброшенными шапками. Прообраз при отображении Гаусса выброшенных шапок по определению пуст. В частности, мы доказали, что у поверхности никаких ручек нет; эта поверхность — цилиндр. Между прочим, этот факт справедлив для раздвинутого конуса и для сдвинутого конуса. Эта часть рассуждений проходит без изменений для любой из этих асимптотик.

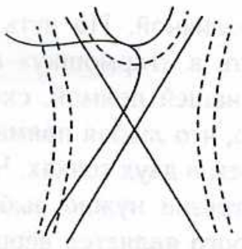


Рис. 4.
Поверхность внутри конуса

Я утверждаю, что поверхность не может войти внутрь конуса. Предположим, что поверхность вошла внутрь конуса (рис. 4). Рассмотрим наряду с конусом $z^2=x^2+y^2$ семейство слоёв $z^2=x^2+y^2+c$, зависящих от параметра c. Выберем из этих слоёв последний, который пересекает наша поверхность. Последний слой можно выбрать потому, что наша поверхность на бесконечности приближается к конусу. Последний слой и наша поверхность касаются; в точке касания у них одинаковые отображения Гаусса (нормали одинаковые). Но отображение Гаусса переводит слой, зашедший внутрь конуса, как раз в выброшенную шапку, что противоречит тому, что мы знаем про отображение Гаусса данной поверхности. Значит, внутрь конуса наша поверхность зайти не может. Для раздвинутого и сдвинутого конуса поверхность тоже не заходит внутрь. Этот факт тоже справедлив для любой из этих асимптотик.

Если поверхность не заходит внутрь конуса, то внутри её существует прямая. Это утверждение справедливо и для сдвинутого конуса. Но раздвинутый конус состоит из двух компонент связности и не содержит внутри себя прямой линии.

Теперь я докажу, что каждый луч, проведённый из вершины конуса, пересекает нашу поверхность только один раз. Это примерно соответствует гипотезе Арнольда про отрезок, соединяющий точки внешнего и внутреннего подпространства. Но мы умеем это доказывать только для лучей, выходящих из вершины конуса.

Любая прямая пересекает выпуклую поверхность не более чем два раза. Про гиперболическую поверхность в проективном пространстве это заведомо неверно. Давайте для примера рассмотрим гиперболоид в проективном пространстве. Эта поверхность строго гиперболична и на ней лежит много прямых. Возьмём одну из этих прямых и немножко продеформируем нашу поверхность. Поверхность гиперболична, поэтому при любой малой деформации она останется гиперболичной. Но чуть продеформировав гиперболоид, его можно превратить в «гармошку» около нашей прямой и сделать столько пересечений с нашей прямой, сколько мы хотим. Поэтому не приходится надеяться на то, что любая прямая пересекает гиперболическую поверхность не более чем в двух точках. Чтобы доказывать вторую часть гипотезы Арнольда, отрезки нужно выбирать удачно. Например, отрезок, один из концов которого является вершиной конуса, пересекает поверхность не более одного раза. Для доказательства этого я воспользуюсь теоремой Арнольда, а для доказательства теоремы Арнольда мне понадобится интеграл по эйлеровой характеристике. Интеграл по эйлеровой характеристике — красивая и полезная вещь, которая недостаточно популярна.

Теорему Арнольда Владимир Игоревич придумал, иногда размышляя над своей проблемой. Теорема Арнольда — это общий факт о пересечении прямой с поверхностью в проективном пространстве. Пусть в проективном пространстве дана поверхность Γ. Сопоставим каждой прямой l два числа: первое число — это число геометрически различных точек пересечения прямой с поверхностью $\#(l\cap\Gamma)$ (посчитанных без учёта кратностей); второе число — количество плоскостей (со знаком), проходящих через прямую l и касающихся поверхности Γ. Вообще говоря, во втором числе фигурирует не только знак, там фигурируют целочисленные кратности. Но в случае общего положения эти кратности равны ±1. В случае общего положения поверхность либо локально лежит по одну сторону от касательной плоскости, как в случае сферы (это эллиптический случай), либо локально лежит по обе стороны от касательной плоскости, как в случае седла (это гиперболический случай). В эллиптическом случае касательная плоскость считается со знаком плюс, а в гиперболическом случае — со знаком минус. Теорема Арнольда утверждает, что для общей прямой l справедлива следующая формула:

$$\#(l\cap\Gamma)+(\text{посчитанное с учётом знаков число касательных плоскостей, содержащих прямую } l)=E(\Gamma),$$

где $E(\Gamma)$ — эйлерова характеристика поверхности Γ.

Рассмотрим, например, сферу. Если прямая пересекает сферу, то $\#(l\cap\Gamma)=2$, а число касательных плоскостей, проходящих через прямую, равно нулю. Сумма равна 2, что как раз равно эйлеровой характеристике сферы. Если же прямая не пересекает сферу, то $\#(l\cap\Gamma)=0$, а число касательных плоскостей равно 2 (оба касания эллиптические). Сумма снова равна эйлеровой характеристике сферы. Утверждается, что так будет и для любой поверхности и любой прямой в случае общего положения.

Совершенно замечательное доказательство этой теоремы придумал Олег Виро. Он построил исчисление (своеобразную теорию интегрирования), которое очень просто, но содержательно. Например, теорему Арнольда это исчисление сразу доказывает. Это так называемый *интеграл по эйлеровой характеристике*. Для построения теории меры нужно пользоваться какой-либо булевой алгеброй. Удобно пользоваться булевой алгеброй вещественных полуалгебраических множеств. Давайте для простоты считать, что все встречающиеся множества полуалгебраические. (На самом деле, во многих конкретных случаях этого предположения можно избежать.) Итак, мы берём $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}P^n$ и рассматриваем полуалгебраические множества, т. е. множества, заданные алгебраическими уравнениями и неравенствами и их конечные объединения. Для каждого замкнутого полуалгебраического множества X определена эйлерова характеристика $E(X)$. Для замкнутых полуалгебраических множеств X и Y справедливо равенство

$$E(X \cup Y) = E(X) + E(Y) - E(X \cap Y). \tag{1}$$

Этот факт можно доказывать либо «научно», с помощью теоремы Майера—Вьеториса, либо с помощью здравого смысла. Эйлерова характеристика — это альтернированная сумма количеств симплексов разных размерностей. Возьмём триангуляцию множества $X \cup Y$, которая уважает пересечение $X \cap Y$; для полуалгебраических множеств такая триангуляция всегда существует. Для такой триангуляции формула, аналогичная формуле (1), верна не только для эйлеровой характеристики, но и для числа симплексов любой размерности. Например, число вершин в объединении равно числу вершин в первом множестве плюс число вершин во втором множестве минус число вершин в пересечении первого и второго множества (они были посчитаны дважды). То же самое верно и для симплексов других размерностей. Поэтому формула (1) верна. Формула (1) показывает, что эйлерова характеристика ведёт себя так же, как мера: $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y) - \mu(X \cap Y)$. Оказывается, что эйлерова характеристика единственным образом продолжается на все полуалгебраические множества с выполнением свойств меры. Возникает конечно-аддитивная мера на пространстве полуалгебраических множеств. Нужно сказать, что для произвольного полуалгебраического множества мера, которую мы получим, не обязательно будет равна эйлеровой характеристике этого множества.

Эта мера — очень простой объект. Например, «эйлерова характеристика» открытого круга равна 1: в открытом круге есть одна 2-мерная клетка и нет ни 1-мерных клеток, ни 0-мерных. Если полуалгебраическое множество разрезано на открытые полуалгебраические симплексы, то для вычисления меры этого полуалгебраического множества нужно просто посчитать число симплексов и взять их альтернированную сумму. Эта мера — самое наивное определение эйлеровой характеристики.

Итак, в пространстве полуалгебраических множеств есть конечно-аддитивная мера. По этой мере можно интегрировать. Интегрируемая функция — это такая функция, которая принимает конечное число значений и каждая линия уровня которой есть полуалгебраическое множество. Для интегрируемой функции f можно определить интеграл по эйлеровой характеристике: $\int f\,dE = \sum\limits_{\lambda} E(f^{-1}(\lambda))$. Мы получаем интегральное исчисление. Оно проще обычного интегрального исчисления, но в нём верны некоторые ключевые теоремы обычного интегрального исчисления. Например, в нём есть теорема Фубини, согласно которой функцию можно интегрировать послойно. Вот её полная формулировка: Пусть $\pi\colon X \to Y$ — полуалгебраическое отображение полуалгебраического множества X в полуалгебраическое множество Y и $f\colon X \to \mathbb{R}$ — интегрируемая функция. Тогда $\int\limits_X f\,dE = \int\limits_Y \Bigl(\int\limits_{\pi^{-1}(Y)} f\,dE \Bigr) dE$. По определению интеграла по эйлеровой характеристике, интеграл характеристической функции замкнутого множества равен эйлеровой характеристике этого множества.

Это интегральное исчисление очень геометрично. Олег Виро для этого исчисления нашел аналог преобразования Радона. Оказывается, что теорема Арнольда есть прямое следствие формулы обращения преобразования Радона для интеграла по эйлеровой характеристике.

Пусть есть проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ и двойственное проективное пространство $(\mathbb{R}P^n)^*$. Точка двойственного пространства — это гиперплоскость исходного пространства. Пусть на $\mathbb{R}P^n$ задана интегрируемая функция f. Тогда можно построить функцию f^* на двойственном пространстве $(\mathbb{R}P^n)^*$, которая определена следующим образом: $f^*(h) = \int\limits_h f\,dE$. Если бы здесь стоял обычный интеграл, то это было бы обычное преобразование Радона. Теорема Радона даёт выражение для f^{**}. Как и в классическом случае, ответ зависит от чётности размерности.

Теорема (Радона для интеграла по эйлеровой характеристике).

$$f^{**} = \begin{cases} f, & \text{если } n \text{ нечётно;} \\ -f + \int f\,dE, & \text{если } n \text{ чётно.} \end{cases}$$

Классическая формула Радона далеко не очевидна. Формула Радона, найденная Виро, доказывается просто сложением и вычитанием. Однако из этой теоремы сразу вытекает теорема Арнольда.

Теорема Арнольда соответствует случаю $n=2$. Представьте себе, что мы проектируем поверхность Γ из некоторой точки $a\notin\Gamma$ на какую-нибудь плоскость L. Рассмотрим на этой плоскости L функцию $f(x)=\#(l_x\cap\Gamma)$, где l_x — прямая, проходящая через точку $x\in L$. Во-первых, $\int f(x)\,dE = E(\Gamma)$. Действительно, рассмотрим на нашей поверхности функцию, тождественно равную 1. По определению интеграл по эйлеровой характеристике от этой функции равен $E(\Gamma)$. Вычислим теперь этот интеграл по теореме Фубини. Мы должны взять прямую l_x и проинтегрировать нашу функцию по этой прямой; в результате получим число точек пересечения $\#(l_x\cap\Gamma)$. Если мы проинтегрируем это число по базе, то по теореме Фубини получим исходный интеграл. Соотношение

$$\#(l\cap\Gamma)+f^{**}=E(\Gamma)$$

следует из формулы Радона $f+f^{**}=\int f(x)\,dE$. Нам осталось посчитать f^{**}. Чтобы посчитать f^{**} в точке x, мы должны взять точку x, провести через неё гиперплоскость (в данном случае — прямую) h и посмотреть, чему равно $f^{*}(h)$. После этого нужно взять пучок прямых, проходящих через x, и проинтегрировать f^{*} по этому пучку. То, что получится, это и будет по определению $f^{**}(x)$. Посмотрим теперь, что такое $f^{*}(h)$. Мы берём прямую h, и по ней мы должны интегрировать нашу функцию. Это означает, что из каждой точки прямой h мы должны провести прямую, проходящую через точку a. При этом получается плоскость L_h, содержащая точку a и прямую h. Мы должны вычислить эйлерову характеристику пересечения нашей поверхности с плоскостью L_h. В общем положении пересечение плоскости и поверхности состоит из окружностей, а эйлерова характеристика окружности равна 0. Значит, функция f^{*} всегда равна нулю, за исключением прямых h, соответствующих плоскостям L_h, касающимся поверхности. Эллиптический случай касания соответствует тому, что одна из окружностей пересечения стала точкой. Её эйлерова характеристика равна 1. В гиперболическом случае у нас возникает восьмёрка. Эйлерова характеристика восьмёрки равна -1. Поэтому в эллиптическом случае мы берём $+1$, а в гиперболическом случае берём -1. Значит, интеграл функции f^{*} равен сумме по тем плоскостям, которые касаются поверхности Γ, причём в случае общего положения одни из них входят в сумму со знаком $+1$, а другие со знаком -1. Это и доказывает теорему Арнольда.

В формуле Радона—Виро спрятано много геометрии. Например, используя эту формулу для различных функций на комплексной алгебраической кривой, можно получить формулы Плюккера. Рассматривая различные функции на алгебраической поверхности, можно получить двумерные аналоги формул Плюккера и т. д.

Итак, мы доказали теорему Арнольда. Будем теперь её использовать. Наша поверхность гиперболическая, поэтому все точки касания будут входить со знаком минус. Согласно теореме Арнольда, число точек пересечения минус число точек касания равно эйлеровой характеристике поверхности. Для гиперболической поверхности эйлерова характеристика равна нулю. Если прямая не пересекает нашу поверхность, то через неё не проходит ни одна касательная плоскость. Действительно, если число точек пересечения равно 0, то по теореме Арнольда и число точек касания тоже равно 0. Возьмём прямую, лежащую внутри конуса. Мы раньше доказали, что такая прямая не пересекает нашу поверхность. Поэтому через эту прямую не проходит ни одна касательная плоскость.

Рассмотрим проекцию нашей поверхности из вершины конуса на сферу с центром в вершине конуса. Докажем, что это отображение тоже взаимно однозначное, как и отображение Гаусса. Другими словами, каждый луч, выходящий из вершины конуса, пересекает поверхность не более одного раза. Допустим, что наше отображение не взаимно однозначное. Тогда у него есть складка. Это означает, что существует касательная плоскость к нашей поверхности, проходящая через вершину конуса. Докажем, что это невозможно. Допустим, что касательная плоскость пересекает конус лишь в его вершине. Тогда её нормаль попадает в выброшенную шапочку. Но мы доказали, что этого не может быть. Теперь допустим, что касательная плоскость рассекает конус. Тогда внутри конуса найдётся прямая, лежащая в плоскости. Эта прямая не пересекает нашу поверхность в силу принципа максимума, но через неё проходит касательная плоскость к поверхности. Это противоречит формуле Арнольда. Поэтому проекция поверхности на сферу взаимно однозначна.

Я перечислил все положительные результаты, которые нам удалось доказать. Второй результат, о проекции из центра на сферу, основан на теореме Арнольда; он доказан только в трёхмерном пространстве. А первый результат, о том, что поверхность не может заходить внутрь конуса, доказан и в многомерном случае (доказательство в многомерном случае в точности то же самое, как в $\mathbb{R}^3$).

Теперь я расскажу об отрицательном аффинном результате, который состоит в построении гиперболической поверхности, которая асимптотически совпадает с раздвинутым конусом и не содержит внутри себя никакой прямой. Чтобы строить такие примеры, мы ввели специальный класс поверхностей. Он нужен и для дальнейшего: именно для такого класса поверхностей в проективном случае мы доказали, что внутри ограниченных ими областей есть прямая. Поверхность должна быть всюду гладкой и всюду гиперболической. Свойство гладкости не очень важно. Выпуклые поверхности бывают негладкими, например, многогранники. От этого с ними ничуть не сложнее работать. Я сейчас хочу определить нечто в этом духе, но только гиперболическое. Рассмотрим область в пространстве $\mathbb{R}^3$, которая обладает следующими свойствами: 1) каждое горизонтальное сечение выпукло; 2) горизонтальное сечение вогнутым образом зависит от высоты, т. е. если вы возьмёте три горизонтальных сечения, то выпуклая оболочка двух крайних сечений содержит среднее сечение. Если бы эта поверхность была гладкой, то она не только была бы седловая в каждой точке, но по горизонтальному направлению она была бы всегда выпукла, а по вертикальному вогнута. С такими поверхностями легче разобраться. Они в каком-то смысле напоминают выпуклые поверхности.

Мы построим негладкую поверхность такого рода, внутри которой нет прямой. Когда такая поверхность построена, её легко подправить: сделать гладкой и гиперболической. Вот аналогичная ситуация. Если есть выпуклый многогранник, то его можно чуть-чуть раздуть, и он станет строго выпуклой гладкой поверхностью. Ясно, что этот процесс нуждается в точном описании, но совершенно очевидно, что это сделать можно. Это дело техники; здесь нет ничего ни удивительного, ни полезного.

Сделаю небольшое отступление и определю аналогичный класс гиперповерхностей в проективном пространстве. В аффинном пространстве есть семейство горизонтальных плоскостей. В проективном пространстве этому соответствует семейство плоскостей, проходящих через некоторую прямую l. Пусть в проективном пространстве есть поверхность, ограничивающая тело, которое обладает следующими свойствами: 1) каждое сечение тела, проходящее через фиксированную прямую l, выпукло; 2) если мы возьмём любую точку прямой l и спроектируем из неё тело, то получится дополнение до выпуклого множества. Тогда такую поверхность мы будем называть *l-выпукло-вогнутой*. Аналогичные гиперповерхности можно рассмотреть в многомерном проективном пространстве. Представьте себе, что в многомерном проективном пространстве есть плоскость L размерности k. Рассмотрим гиперповерхности, ограничивающие тела, которые обладают следующими свойствами: 1) сечение тела каждой плоскостью, проходящей через L и имеющей размерность $k+1$, выпукло; 2) если спроектировать тело из любого центра в L размерности $k-1$, то получится вогнутое множество, т. е. проекция является дополнением до выпуклого множества. Такие поверхности можно назвать *L-выпукло-вогнутыми*. Они выпуклы в одном направлении и вогнуты в другом. Никакой гладкости здесь не нужно. Гипотеза Арнольда о том, что внутри находится проективное пространство нужной размерности, может быть сформулирована и для таких L-выпукло-вогнутых поверхностей. Кстати сказать, тела, ограниченные такими поверхностями, гораздо больше похожи на выпуклые. Для выпуклых тел неважно, гладкие у них границы или негладкие.

Проективное определение можно дать ещё так. В аффинном случае у нас было условие на три сечения: то сечение, которое лежит между двумя другими, должно содержаться в их выпуклой оболочке. В проективном пространстве бесконечно удалённое сечение тоже может лежать между двумя сечениями; нам нужно, чтобы только что сформулированное свойство выполнялось для любой тройки сечений в аффинном пространстве, полученном из проективного пространства вычёркиванием произвольной проективной плоскости.

Для аффинных поверхностей мы строим контрпример, а для проективных поверхностей такого рода нам с большим трудом удалось доказать, что в размерности 3 внутри ограниченной ими области всегда есть прямая.

Перейдем к конструкции контрпримера. В чём здесь трудность? По самой формулировке задачи картинку контрпримера нарисовать непросто. С какой стороны мы бы ни посмотрели на такую поверхность, она выглядит так, как будто внутри неё есть прямая: любая проекция поверхности содержит прямую.

Прежде чем строить пример, опишем некоторые хирургии выпукло-вогнутых множеств. Первая хирургия такая. Возьмём два горизонтальных сечения, удалим заключённую между ними часть области и заменим её на выпуклую оболочку этих двух сечений. Легко проверить что после такой хирургии выпукло-вогнутое тело останется выпукло-вогнутым. Вторая операция такая. Представьте себе, что у нас есть поверхность, её проекция выглядит так, как для выпукло-вогнутой поверхности, т. е. дополнение до проекции является объединением двух неограниченных выпуклых областей. Тогда если каждое горизонтальное сечение заменить его выпуклой оболочкой, то в результате получится выпукло-вогнутое множество.

Конструкция примера основана на построении удивительного выпукло-вогнутого множества, которое вовсе не тело, а полоска. Среди выпукло-вогнутых тел есть полоски, для которых любое горизонтальное сечение — отрезок с центром на фиксированной вертикальной прямой. Я сначала построю такую полоску, внутри которой есть эта фиксированная вертикальная прямая. А потом эту полоску пошевелю так, что никакой прямой уже в ней не останется.

Оказывается, что можно построить полоску так, что с какой бы стороны на неё ни посмотреть, она будет гиперболической. Если немножко подумать, то это довольно удивительно. И это тесно связано с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Такие поверхности очень жёсткие. Я сейчас опишу все гладкие полоски. Конечно, существуют и негладкие полоски такого рода. Отметим, что на полоску можно посмотреть сбоку так, чтобы один из составляющих её горизонтальных отрезков выглядел, как точка.

Пусть z — высота, $x(z)$ и $y(z)$ — координаты одного из концов отрезка на высоте z. Вектор-функция $\boldsymbol{u}(z)=(x(z),\, y(z))$ полностью определяет полоску. Оказывается, что нужные нам функции $\boldsymbol{u}$ устроены следующим образом. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение $\boldsymbol{u}''=q(z)\boldsymbol{u}$, где $q(z)>0$. Возьмём два его независимых решения $x(z)$ и $y(z)$. Вектор-функции $\boldsymbol{u}(z)=(x(z),\, y(z))$ соответствует выпукло-вогнутая полоска. Более того, всякую гладкую выпукло-вогнутую полоску можно получить таким способом. Действительно, если мы смотрим на полоску сбоку, то полоска выглядит, как область, симметричная относительно вертикальной прямой, негоризонтальные компоненты границы которой являются линейными комбинациями решений $x(z)$ и $y(z)$ нашего линейного дифференциального уравнения. Но линейная комбинация двух решений тоже является решением. У решения дифференциального уравнения $\boldsymbol{u}''=q(z)\boldsymbol{u}$, где $q>0$, вторая производная имеет тот же знак, что и решение. Это значит, что граница области по одну сторону от вертикальной прямой выпукла в одну сторону, а по другую — в другую, с какого бы бока мы на полоску ни смотрели.

Полученная выпукло-вогнутая полоска содержит фиксированную вертикальную прямую; легко проверить, что для любой функции $q>0$ эта прямая ровно одна — никаких других прямых эта полоска не содержит. Теперь я хочу сделать из этой полоски выпукло-вогнутую область, не содержащую прямой. Сделаем хирургию первого типа. Возьмём два горизонтальных сечения. Эти сечения — отрезки. Их выпуклая оболочка является тетраэдром. Разбивая полоску серией горизонтальных сечений и делая хирургию первого типа, превратим полоску в область, состоящую из серии тетраэдров. Легко доказать, что другой прямой при этом не появится. Область содержит одну вертикальную прямую. У неё есть много горизонтальных сечений, являющихся отрезками с центрами на этой прямой. Гиперболичность сохраняется при малом шевелении. Я возьму один отрезок и немножко его подвину. Тогда прямая исчезнет, а гиперболичность останется. Итак, мы построили выпукло-вогнутую область, внутри которой нет прямой. Покажем, как построить такую область с заданной асимптотикой на бесконечности.

Пусть есть два раздвинутых конуса, и есть прямая, проходящая через вершины этих конусов (рис. 5). Вместо этой прямой вставим нашу полоску, настолько узкую, чтобы сбоку это выглядело, как на рисунке 5. То, что получится, не будет выпукло-вогнутым, но с любого бока это выглядит гиперболично. Поэтому мы можем применить хирургию второго типа — заменить каждое сечение его выпуклой оболочкой. На этом построение примера закончено.

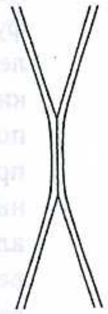


Рис. 5. Раздвинутые конусы

Мы с Митей Новиковым были абсолютно уверены, что, немножко поработав, мы подправим нашу конструкцию на бесконечности и получим проективный контрпример. Мы долго мучились и в конце концов доказали, что каждое проективное l-выпукло-вогнутое тело содержит внутри себя проективную прямую. Доказательство получилось довольно тяжёлое и морально неправильное. В трёхмерном пространстве, разобрав море случаев, которые мы потом свели к шести основным случаям, мы что-то сделали. Но как быть даже с 4-мерным пространством, мы совершенно не представляем.

Несколько слов о доказательстве этой теоремы. Она формулируется следующим образом. Всякое l-выпукло-вогнутое множество в трёхмерном проективном пространстве содержит проективную прямую.

Рассмотрим l-выпукло-вогнутое множество как объединение выпуклых сечений, проходящих через прямую l. Нам нужно провести прямую через все эти сечения. Для этого согласно теореме Хелли *) достаточно доказать, что через любые 5 сечений проходит прямая. Действительно, рассмотрим все прямые в проективном пространстве, которые не пересекают прямую l. Они образуют 4-мерное аффинное пространство. (В этом аффинном пространстве прямую можно задать так: возьмём две плоскости, проходящие через прямую l, на каждой отметим по точке, не лежащей на прямой l, и через эти точки проведём прямую; так мы параметризуем все прямые, не пересекающие прямой l. Каждая из двух отмеченных точек лежит в аффинной плоскости, поэтому наше пространство прямых имеет естественную структуру 4-мерного аффинного пространства.) Рассмотрим теперь множество прямых из нашего пространства, пересекающих одно сечение. Разумеется, это будет множество будет выпуклым в нашем пространстве прямых: если две прямые пересекают выпуклое сечение, то их линейная комбинация тоже пересекает сечение. У нас есть семейство выпуклых множеств в 4-мерном пространстве прямых (каждому сечению соответствует одно множество семейства). Если мы хотим доказать, что все эти множества пересекаются, то согласно теореме Хелли достаточно

*) Теорема Хелли утверждает, что если в n-мерном аффинном пространстве имеется семейство компактных выпуклых множеств такое, что любые $n+1$ множеств из этого семейства имеют общую точку, то пересечение всех выпуклых множеств из этого семейства непусто.

доказать, что любые 5 из них пересекаются. Остаётся доказать, что через любые 5 сечений проходит прямая.

Мы умеем очень просто доказывать, что через любые 4 сечения проходит прямая. Чтобы это сделать, мне будет нужна ещё одна замечательная теорема из выпуклой геометрии, которая является обобщением теоремы Брауэра. Придумал её человек с очень похожей фамилией — Браудер. Теорема Брауэра такова. Пусть есть непрерывное отображение $f\colon B^n \to B^n$, где B^n — замкнутый шар. Тогда существует точка x, для которой $f(x) = x$. В теореме Браудера рассматриваются многозначные отображения шара в себя, которые каждой точке сопоставляют выпуклое множество, т. е. $f(x)$ — выпуклое множество в B^n. Предположим, что это отображение полунепрерывное сверху, т. е. если точке соответствует выпуклое множество V, то соседним точкам соответствуют выпуклые множества, лежащие в малой окрестности множества V; при изменении точки x множество $f(x)$ не может резко увеличиваться, но может резко уменьшиться. Если отображение однозначно, то полунепрерывность сверху означает непрерывность этого отображения. Теорема Браудера утверждает, что существует точка x, для которой $x \in f(x)$. Например, если f — однозначное отображение, то это в точности теорема Брауэра. Давайте я расскажу неправильное доказательство теоремы Браудера. Сопоставим каждому выпуклому телу $f(x)$ его центр тяжести. У нас возникает отображение шара в себя. По теореме Брауэра у него есть неподвижная точка. Из этого следует, что существует точка x, являющаяся центром тяжести тела $f(x)$. Это неправильное рассуждение. Неправильное оно потому, что центр тяжести выпуклого тела разрывно зависит от тела. Например, центр тяжести треугольника — точка пересечения медиан, а центр тяжести отрезка — его середина. Поэтому если треугольник схлопывается в отрезок, то центр тяжести скачет. Теорема Браудера нуждается в отдельном доказательстве. Но доказывается это примерно так же, как и теорема Брауэра. Эта теорема ещё называется теоремой Какутани (Sh. Kakutani. A generalization of Brouwer's fixed point theorem // Duke Math. J. 1941. V. 8. P. 457—458).

Докажем, что через любые 4 сечения проходит прямая. Представьте себе, что есть три последовательных горизонтальных сечения. Для выпукло-вогнутого тела среднее сечение находится в выпуклой оболочке двух других. Это означает, что через каждую точку среднего сечения можно провести прямую, пересекающую два других сечения. Я буду пользоваться этим свойством. Пусть теперь есть 4 сечения A, B, C, D. Построим многозначное отображения сечения B в себя следующим образом. Возьмём произвольную точку $x \in B$ и проведём через нее прямую, протыкающую сечения A и C. Затем через полученную точку пересечения

$y \in C$ проведём прямую, протыкающую сечения B и D. Получилась ломаная. Отобразим точку x в множество $f(x)$ пересечений всевозможных прямых такого вида с сечением в B. Для каждого x множество $f(x)$ выпукло. Согласно теореме Какутани—Браудера есть точка x, которая переходит в выпуклое множество $f(x)$. Для такой точки две прямые сливаются, и мы получаем прямую, пересекающую 4 сечения. Это доказательство годится для аффинных выпукло-вогнутых тел. Однако как мы знаем, в аффинном случае есть выпукло-вогнутая область, внутри которой нет прямой.

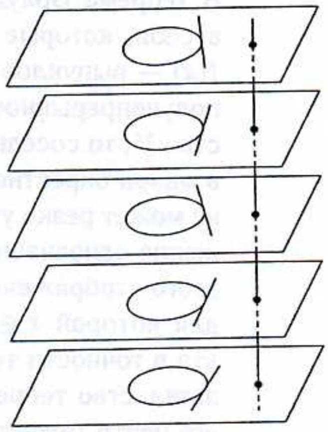


Рис. 6. Пять сечений

Поэтому утверждение о существовании прямой, пересекающей 5 заданных сечений, принципиально более трудное. Несколько слов о нашем доказательстве этого утверждения. Пусть есть 5 сечений (рис. 6). Рассмотрим всевозможные невертикальные прямые. Каждой прямой сопоставим максимум из расстояний до данных сечений. Выберем ту прямую, для которой максимум самый маленький (чебышевскую прямую). Возникают 5 опорных полуплоскостей (см. рис. 6). Допустим, что существует прямая, проходящая через эти 5 полуплоскостей. Тогда я утверждаю, что исходная прямая была не чебышевская. Действительно, нашу прямую можно подвинуть к прямой, пересекающей 5 опорных плоскостей, сократив расстояния до всех сечений. Негоризонтальные прямые образуют аффинное пространство; поэтому прямую можно подвинуть. Итак, нужно доказать, что для 5 опорных полуплоскостей можно провести прямую, которая их протыкает. Это — отдельная задача, которую и надо решать. Эта задача зависит от большого, но конечного числа параметров: нужно задать высоты, на которых находятся горизонтальные плоскости, направления граничных прямых полуплоскостей и их расстояния до вертикальной прямой. Вырожденный случай в рассматриваемой задаче, когда граничные прямые каких-либо двух полуплоскостей параллельны, при помощи специальной двойственности (см. [2]) сводится к задаче о существовании прямой, пересекающей 4 сечения. Невырожденные случаи распадаются на 6 принципиально различных случаев. Они разбираются отдельно (см. [1]). В этом рассмотрении задача о существовании прямой, пересекающей 4 сечения, тоже играет ключевую роль.

Литература

[1] Khovanskii A., Novikov D. L-convex-concave sets in real projective space and L-duality // Moscow Mathematical Journal, 2003. V. 3, № 3. P. 1013—1037.

[2] Khovanskii A., Novikov D. L-convex-concave body in $\mathbb{RP}^3$ contains a line // Geometric and Functional Analysis (GAFA), 2003. V. 13. P. 1082—1118.

[3] Khovanskii A., Novikov D. On affine hypersurfaces with everywhere nondegenerate second quadratic form // Moscow Mathematical Journal, 2006. V. 3. № 1. P.135—152.

[4] Arnold V. I. Problem 1987-4 // Arnold Problems. — Springer—PHASIS, 2004.

[5] Громов М. Знак и геометрический смысл кривизны. Ижевск: РХД, 1999.

26 апреля 2001 г.