А. Г. Хованский

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С МНОГОГРАННИКАМИ НЬЮТОНА ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Я буду рассказывать об одной довольно необычной ситуации с многогранниками Ньютона. Сначала я расскажу вообще о многогранниках Ньютона, потом расскажу про эту ситуацию, а потом немножко расскажу при теорию Паршина—Като, которая с этим связана. Программа лекции:

1) Многогранники Ньютона (вообще — что это такое, какие есть варианты, какие есть решённые задачи и какие нерешённые).

2) Системы n уравнений от n неизвестных, многогранники Ньютона которых находятся в общем положении.

В пункте 2) — две части. Одна более старая, которую мы получили с Ольгой Гельфонд [1, 2]. Это — явная формула для суммы любой функции по корням системы. Умея вычислять такую сумму, можно вычислить всё, что угодно. Можно исключать неизвестные, можно находить число вещественных корней, число вещественных корней в области, ограниченной заданными полиномиальными неравенствами и т. д. У меня есть значительно более новый результат [3]. Я нашёл произведение всех корней системы уравнений. Дело в том, что корни лежат в группе $(\mathbb{C}^*)^n$ Все корни такой системы можно перемножить, и для произведения получается совершенно явная формула, аналогичная формуле Виета. У меня получились две формулы для произведения корней, абсолютно непохожие друг на друга. Одна формула в духе многогранников Ньютона. Там фигурируют смешанные объёмы, производные. А во второй формуле фигурирует необычный объект, который называется *символом Паршина—Като*. Когда эта формула написалась, возникло удивительно симметричное выражение, которое напоминало те выражения, которые встречаются в одномерном законе взаимности Вейля. Я спросил Сашу Бейлинсона, знает ли он какие-либо многомерные обобщения теоремы Вейля. Он сказал: «А как же!» и сослался на теорию Паршина—Като. Я немножко расскажу про эту теорию. У меня была надежда, что при помощи этой теории можно будет наши результаты упростить. Но, честно говоря, вышло всё наоборот. Я, скорее, сильно упростил теорию Паршина—Като. Точнее, упростил законы взаимности из этой теории в случае, когда основное поле является полем комплексных чисел. Я, правда, про это ещё не готов рассказывать. Но надеюсь, что я это скоро закончу, и что эта вещь будет совсем элементарной.

Многогранники Ньютона

Я начну с простейшего примера. Рассмотрим уравнение $P(x, y) = y^2 + a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$. Какая у этого уравнения степень? По определению степень этого уравнения 3, но в нём присутствуют далеко не все члены степени $\leqslant 3$. Давайте рассмотрим вещественную плоскость и отметим все целые точки, которые соответствуют мономам, входящим в уравнение с ненулевыми коэффициентами. Рассмотрим выпуклую оболочку всех этих точек (рис. 1). Эта выпуклая оболочка называется *многогранником Ньютона* полинома P и обозначается $\Delta(P)$. Она играет такую же роль, как степень. Только степень — это число, а многогранник Ньютона — это геометрическая фигура. Поэтому всё получается значительно интересней.

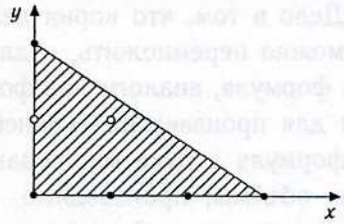


Рис. 1. Многогранник Ньютона

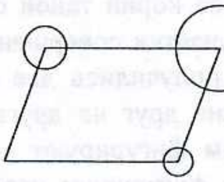


Рис. 2. Сумма выпуклых фигур по Минковскому

Что получается интересного в нашем простейшем примере? Рассматриваемая кривая эллиптическая; она имеет род 1. А внутри многоугольника Ньютона есть ровно одна целая точка. И это не случайно; так бывает всегда. Потом я расскажу про это подробнее.

Что мы вообще знаем про степень? Мы знаем, что $\deg PQ = \deg P + \deg Q$. Оказывается, что для многогранников Ньютона тоже $\Delta(PQ) = \Delta(P) + \Delta(Q)$, только эту сумму нужно понимать в смысле Минковского. Как складываются выпуклые фигуры по Минковскому? Пусть в линейном пространстве есть две выпуклые фигуры. Рассмотрим суммы всех пар векторов, у которых один конец лежит в одной фигуре, а другой конец лежит в другой фигуре (рис. 2). Получается фигура, которая тоже будет выпуклой. Она называется суммой Минковского рассматриваемых выпуклых фигур.

Легко доказывается, что если мы перемножим два полинома, то их многогранники Ньютона сложатся. Это происходит из-за того, что при перемножении мономов их степени складываются.

Многогранники Ньютона ведут себя похоже на степени многочленов. Какие есть классические результаты про системы уравнений фиксированных степеней? Если есть система уравнений, причём все уравнения имеют заданные степени и достаточно общие коэффициенты, то оказывается, что дискретные комплексные геометрические инварианты полученного многообразия (скажем, в проективном пространстве) зависят только от степеней и совершенно явно вычисляются. Рассмотрим, например, кривую степени n, заданную уравнением $P_n(x, y) = 0$. Если коэффициенты уравнения достаточно общие, то род g этой кривой равен $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ (формула Римана). Как всё это обобщается на системы уравнений с фиксированными многогранниками Ньютона и с достаточно общими коэффициентами? Прежде всего, все классические вычисления, какие только есть, переносятся на случай систем с фиксированными многогранниками Ньютона. Более того, со времён, когда классики это считали, было открыто много новых дискретных инвариантов. Я имею в виду, например, числа Ходжа смешанных структур Ходжа. Все эти новые инварианты, так же, как и старые, тоже вычисляются в терминах многогранников Ньютона, если коэффициенты уравнений достаточно общие.

Пример 1. Формула для рода кривой обобщается следующим образом. Я расскажу обобщение для случая гиперповерхности. Пусть есть одно уравнение $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ от n переменных, с многогранником Ньютона Δ. Спрашивается, каков род поверхности, заданной этим уравнением. Род поверхности — это число независимых голоморфных форм старшей степени на произвольной гладкой компактификации этой поверхности. Оказывается, что род гиперповерхности Γ задается формулой $g(\Gamma) = \#(\mathbb{Z}^n \cap (\Delta \setminus \partial\Delta))$, т. е. род равен числу точек целочисленной решётки, лежащих строго внутри многогранника Ньютона. Например, формула для рода кривой получается таким образом. Многоугольник Ньютона общего уравнения степени n — это стандартный треугольник (рис. 3). Посчитаем число целых точек внутри этого стандартного треугольника. В этом треугольнике в верхнем ряду одна целая точка, в следующем ряду две целые точки, затем три и т. д. Если вы просуммируете арифметическую прогрессию, то как раз и получите число $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Так что формула для рода гиперповерхности — прямое обобщение формулы Римана. Только ответ получается геометрический — число целых точек, лежащих внутри многогранника Ньютона.

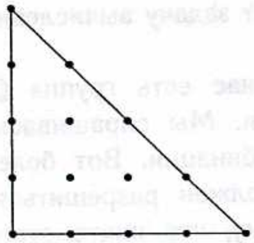


Рис. 3. Многоугольник Ньютона общего уравнения степени n

Здесь важно сказать, что все уравнения значительно лучше рассматривать не в $\mathbb{C}^n$, а в $(\mathbb{C}^*)^n$ Это означает, что мы должны выбросить все координатные плоскости из пространства $\mathbb{C}^n$ Почему лучше? Потому, что все ответы получаются значительно более симметричными. А если мы знаем ответы в пространстве $(\mathbb{C}^*)^n$, то ответы в $\mathbb{C}^n$ по ним восстанавливаются. Многие инварианты оказываются аддитивными, нужно их просто сложить по координатным плоскостям. А неаддитивные инварианты обычно выражаются через аддитивные. Просто формулы в $\mathbb{C}^n$ оказываются сложнее, а в $(\mathbb{C}^*)^n$ они удивительно симметричны.

Раз уж мы об этом заговорили, то я объясню, почему это происходит, и какое есть разумное обобщение всех вопросов про многогранники Ньютона. Формулы симметричны потому, что $(\mathbb{C}^*)^n$ — группа по умножению: наборы n ненулевых комплексных чисел можно покоординатно перемножать. А мономы — это не что иное, как характеры этой группы, т. е. гомоморфизмы $\chi\colon (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{C}^*$. Каждый моном имеет вид $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ Среди характеров встречаются и такие, в которых некоторые степени $a_1, \dots, a_n$ отрицательные. И для теории многогранников Ньютона это тоже совершенно неважно — можно допускать мономы с отрицательными степенями. Линейные комбинации таких обобщённых мономов называются полиномами Лорана. Переход от полиномов к полиномам Лорана доставляет дополнительные удобства и никак не усложняет задачу вычисления дискретных инвариантов.

Поэтому сам вопрос относится к группе. У нас есть группа $\mathcal{G}$, на ней есть характеры и их линейные комбинации. Мы спрашиваем, что можно сказать про нули такой линейной комбинации. Вот более общий вопрос. (Я действительно верю, что он должен разрешиться. Он фактически не двигался с места только потому, что никто этого не делал.) Давайте вместо $(\mathbb{C}^*)^n$ возьмём любую редуктивную группу $\mathcal{G}$, а вместо многогранника Ньютона её представление $\mathcal{G} \to \mathrm{GL}(n)$. С представлением связано линейное пространство функций на группе — линейные комбинации матричных элементов. Можно говорить об общих функциях этого линейного пространства. Возьмём такую функцию и приравняем её нулю. У нас получится гиперповерхность в группе. Разумеется, её дискретные свойства должны зависеть только от группы и от представления. Когда есть несколько характеров группы $(\mathbb{C}^*)^n$, о них можно думать как о диагональном представлении этой группы. Общая матричная функция такого представления будет как раз полиномом Лорана. Здесь получится много вопросов, но ни для каких других групп почти ничего не сделано. Есть редкие счастливые исключения. Одно счастливое исключение — это формула Бори Казарновского. Он посчитал в этой общей ситуации число решений системы n уравнений на n-мерной группе.

Итак, эта область почти полностью открыта. Ясно, что тут должно быть много интересного.

Пример 2. Рассмотрим n уравнений от n неизвестных: $P_1 = \ldots \ldots = P_n = 0$. Предположим, что у всех у них многогранник Ньютона одинаков: $\Delta(P_1) = \ldots = \Delta(P_n) = \Delta$. Тогда оказывается, что число решений этой системы (если уравнения достаточно общие и если решения рассматривать в $(\mathbb{C}^*)^n$) равно $n!V(\Delta)$, где V — объём. Это теорема Кушниренко 1975 года. В ответах, как вы видите, встречаются целые точки, встречаются объёмы.

В ответах на более сложные вопросы начинает встречаться вся комбинаторика многогранника: число граней разных размерностей, число флагов разных граней, число точек в этих флагах, объёмы разных измерений на разных целочисленных гранях. Всё это постепенно завязывается в ответы. Мы получаем связь между обычной геометрией многогранников (с числами целых точек на них, с их комбинаторикой и т. д.) и алгебраической геометрией. И эта связь работает в обе стороны. Иногда алгебраическая геометрия подсказывает совершенно неожиданные формулы про многогранники. Иногда их удаётся доказать отдельно, не используя алгебраической геометрии. Некоторые вещи до сих пор не доказаны отдельно. И наоборот, геометрия многогранников помогает продвинуться в алгебраической геометрии. Я надеюсь, что мне удалось упростить теорию Паршина—Като. И, конечно же, для меня это упрощение пришло из геометрии многогранников.

Итак, у нас есть связь алгебраической геометрии с обычной геометрией многогранников. Мы обсудим примеры ответов для рода и числа решений. Кстати, формула для числа решений была обобщена Д. Бернштейном на тот случай, когда многогранники Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ уравнений $P_1 = \ldots = P_n$ системы могут быть разными. В этом случае число решений равно $n!V(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$, где $V(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ — смешанный объём многогранников. Смешанный объём — это замечательная функция, которая линейна (относительно сложения по Минковскому) по каждому аргументу, симметрична, а на диагонали совпадает с объёмом. Такая функция только одна. Она была открыта Минковским, и активно им использовалась.

Пример 3. Теперь я приведу формулу для эйлеровой характеристики. Пусть есть гиперповерхность Γ, заданная уравнением $P = 0$ в торе $(\mathbb{C}^*)^n$. Тогда эйлерова характеристика гиперповерхности Γ равна $(-1)^{n-1}n!V(\Delta)$, где $\Delta = \Delta(P)$. Если гиперповерхность задана в $\mathbb{C}^n$, то надо воспользоваться аддитивностью эйлеровой характеристики и сложить эйлеровы характеристики пересечений гиперповерхности с координатными плоскостями. Получится аналогичная формула, гораздо менее красивая и более громоздкая.

Кстати сказать, совпадение (с точностью до знака) эйлеровой характеристики и числа Кушниренко в действительности выглядит загадочно. Не видно никаких причин, чтобы эти два числа совпадали. В формуле для эйлеровой характеристики гиперповерхности в компактном многообразии фигурируют классы Черна. Формула сложная, и первый её член действительно является аналогом числа $(-1)^{n-1}n!V(\Delta)$. Но там есть ещё много других членов. Они все фантастическим образом сокращаются. Я когда-то просчитал эйлерову характеристику гиперповерхности в торе $(\mathbb{C}^*)^n$ при помощи классов Черна. Оказалось, что всё действительно сокращается. Если вместо тора взять другую группу, то такого сокращения не происходит.

Пример 4. Я приведу ещё один пример, чтобы показать, как из алгебры иногда вытекают содержательные геометрические утверждения. Правда, то утверждение, которое я сейчас приведу, очень простое. Его, конечно, можно доказать другим способом.

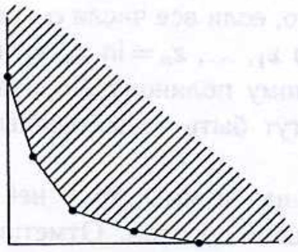
Рассмотрим уравнение $P(x, y)=0$ на плоскости (точнее, в торе $(\mathbb{C}^*)^2$). Та кривая, которую мы получим, будет некомпактна. Компактную кривую вообще нельзя аналитически вложить в аффинное пространство. Такое вложение противоречило бы принципу максимума. Значит, эта кривая является сферой с ручками, имеющей проколы. Число ручек, как мы знаем, это число целых точек внутри многоугольника $\Delta=\Delta(P)$. Оказывается, что число проколов (число дырок) равно числу целых точек на границе многоугольника $\Delta=\Delta(P)$. А эйлерова характеристика — это удвоенный объём (в данном случае — удвоенная площадь $2S(\Delta)$). Но если мы знаем, что наше пространство есть сфера с ручками и с проколами, и знаем число ручек и число проколов, мы можем вычислить эйлерову характеристику. Поэтому у нас получается соотношение: эти числа не независимые. Значит, есть соотношение между площадью многоугольника, числом целых точек внутри многоугольника и числом целых точек на границе многоугольника. Если это соотношение написать, то получится так называемая *формула Пика*:

$$S(\Delta)=\#\mathbb{Z}^2\cap(\Delta\setminus\partial\Delta)+\frac{1}{2}\#\mathbb{Z}^2\cap\partial\Delta-1.$$

Эта формула есть прямое применение алгебраических вычислений в геометрии многоугольников. Правда, это применение ерундовое. К тому же мы таким способом доказали формулу Пика только для выпуклых многоугольников, а она верна и для невыпуклых многоугольников тоже.

Но так как у алгебраических многообразий дискретных инвариантов много, и соотношений между ними тоже много, то можно себе представить, что из них получаются совершенно странные, с геометрической точки зрения удивительные, утверждения про целочисленные многогранники.

У теории многогранников Ньютона есть много вариантов. Один — это обобщение теории на другие группы. Есть и другие варианты, которые продвинуты не хуже, чем основной. Основной вариант — это когда мы рассматриваем общие полиномиальные уравнения в $(\mathbb{C}^*)^n$ Другие варианты здесь такие. Один — глобальный, когда мы рассматриваем общие полиномиальные уравнения в $\mathbb{C}^n$ Я уже говорил, что в этом варианте вопросы естественней, а ответы сложнее. Есть ещё локальный вариант. Представьте себе, что у нас есть аналитическая функция $f(z_1, \ldots, z_n)$, у которой в нуле есть особая точка. Возьмём ряд Тэйлора этой функции в нуле. Если в нуле особая точка, то можно считать, что первых членов ряда Тэйлора у этой функции нет. Отметим точки решётки, соответствующие ненулевым мономам, и возьмём их выпуклую оболочку (рис. 4). Получится бесконечный многогранник. У этого многогранника есть набор компактных граней. У особенности есть много дискретных инвариантов. Оказывается, что если функция f достаточно общая, то все дискретные инварианты выражаются через многогранник Ньютона.



Р и с. 4. Многогранник Ньютона особой точки

Теория особенностей занимается тем, что она рассматривает всё более и более особые точки. И чем более точка особая, тем больше в эту точку засасывается алгебраической геометрии. В данном случае, та алгебраическая геометрия, которая попадает сюда, — это теория многогранников Ньютона.

Ещё есть вещественный вариант. Многогранники Ньютона помогают строить нетривиальные примеры вещественных алгебраических многообразий с предписанными свойствами. Этот метод придумал Олег Виро. Ситуация здесь такая. До появления работы Виро существовали единичные, отдельные примеры хитрых вещественных алгебраических многообразий. Но никто не знал никакого большого списка примеров (были две-три серии и несколько отдельных примеров). После появления метода Виро возникла масса примеров. Иногда они окончательные, иногда почти окончательные. Этот метод настолько силён, что есть даже гипотеза (я, правда, сомневаюсь, что она верна), что основная масса всех возможных примеров может быть построена этим методом.

Ещё один вариант очень похож на замену группы: вместо группы $(\mathbb{C}^*)^n$ берётся аддитивная группа $\mathbb{C}^n$ Этот вариант такой. Вместо полиномиальных уравнений можно рассматривать уравнения вида $\sum c_\alpha \exp(\alpha_1 z_1 + \ldots \ldots + \alpha_n z_n) = 0$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Выражение $\exp(\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n)$ очень похоже на моном $z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$ Более того, если все числа α_k целые, то логарифмическим преобразованием $z_1 = \ln x_1, \ldots, z_n = \ln x_n$ функция $\sum c_\alpha \exp(\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n)$ сводится к обычному полиному Лорана. Но эти числа могут быть и не целыми. Они могут быть вещественными и даже комплексными.

Если есть такая конечная экспоненциальная суммы, то у неё есть многогранник Ньютона. Он строится следующим образом. Отметим все точки α (в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{C}^n$) и возьмём их выпуклую оболочку. Оказывается, что выпуклая оболочка в очень многом ответственна за свойства такой суммы. Например, она влияет на асимптотику роста числа нулей (в одномерном случае), на асимптотику роста дискретных инвариантов. Многообразия, которые здесь получаются, не алгебраические, а скорее, квазипериодические. Можно, например, рассматривать шар большого радиуса R, брать порцию многообразия в этом шаре и вычислять какую-нибудь его характеристику (например, эйлерову характеристику), а затем делить её на подходящую степень радиуса R. Оказывается, что такие отношения часто имеют пределы. Иногда эти пределы — те, которые можно ожидать. Иногда они совершенно неожиданные. Обычно ситуация такая. Если числа α_k вещественные, то получается вещественный многогранник — вроде многогранника Ньютона. Только его вершины не целые точки, а произвольные. В этом случае ответы получаются очень похожие на соответствующие ответы в теории многогранников Ньютона. Однако если эти числа комплексные, ответы получаются совсем другие. Здесь сделано не так уж много, и почти всё, что сделано, сделано Борей Казарновским. Некоторые его ответы очень красивые.

Общие системы из n уравнений от n неизвестных

Теперь я хочу перейти собственно к тому, о чём я хотел рассказать. Это будет состоять из двух частей. Одна старая, а другая более новая. Я начну с более старой, с нашей совместной работы с Ольгой Гельфонд. Пусть есть система уравнений $P_1 = \ldots = P_n = 0$, у которых многогранники Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ расположены достаточно общим образом друг относительно друга.

Для начала я определю, что означает общность взаимного расположения многоугольников на плоскости. В n-мерном пространстве определение

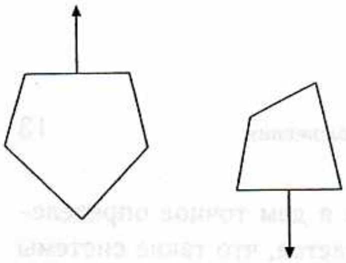


Рис. 5. Параллельные стороны с противоположно направленными нормалями

более сложное; я дам его позже. Скажем, что два многоугольника на плоскости *расположены общим образом относительно друг друга*, если у них нет параллельных сторон с одинаковым направлением внешних нормалей. Параллельные стороны с противоположно направленными внешними нормалями у них могут быть (рис. 5).

Пусть, например, есть два уравнения с двумя неизвестными, у которых многоугольники Ньютона расположены достаточно общим образом относительно друг друга. Что можно сказать про такую систему уравнений? По теореме Бернштейна мы знаем число её решений: оно равно $2\operatorname{vol}(\Delta_1, \Delta_2)$. Удивительным образом оказывается, что для такой системы можно сказать гораздо больше. В каком-то смысле, эту систему можно решить. «Решить» здесь означает, что можно исключить все неизвестные, кроме одного, т. е. свести к одному уравнению с одним неизвестным. Это можно сделать совершенно явно. Можно также явно вычислить число вещественных корней (если коэффициенты вещественные); можно вычислить число вещественных корней в какой-либо полуалгебраической области. В общем, с этой системой можно сделать всё, что угодно, и это можно сделать достаточно явно. Я бы сказал, что это поразительно. Это выпадает из общей идеологии многогранников Ньютона. В многогранниках Ньютона главная идеология заключается в следующем. Пусть уравнения достаточно общие. Тогда от их коэффициентов не зависит ничего — все дискретные инварианты вычисляются по многогранникам. Например, для одного уравнения от одного неизвестного число корней равно степени уравнения. Но это рассуждение ничего не может сказать о расположении корней. Конечно же, нельзя найти корни, не зная коэффициентов уравнения. Все коэффициенты будут играть роль в тех формулах, которые я напишу. В каком-то плане эти формулы не из нашей оперы про многогранники Ньютона. Но это не совсем так. Оказывается, что эта формула распадается на части. Одни части этой формулы абсолютно из нашей оперы — они зависят только от многогранников Ньютона. Другие части связаны с вычислением с коэффициентами, и это вычисление абсолютно явное. Никаких систем решать не надо, а надо только делить один многочлен на другой — что-то вроде того. Надо делать совершенно явные операции.

Такая же вещь есть не только на плоскости, но и в любой размерности. Оказывается, что если многогранники Ньютона расположены достаточно общим образом друг относительно друга (позже я дам точное определение), то можно сделать всё то же самое. Оказывается, что такие системы бесконечно проще, чем рассматриваемые обычно системы.

На плоскости обычно рассматривают систему из уравнения степени n и уравнения степени m, многоугольники Ньютона у которых выглядят так, как показано на рис. 6. У этих многоугольников есть параллельные стороны. Поэтому если вы берете обычные системы, то для них наша формула неприменима. И правда, для них всё достаточно сложно.

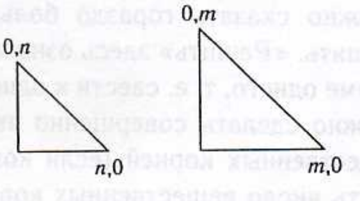


Рис. 6. Два многоугольника Ньютона

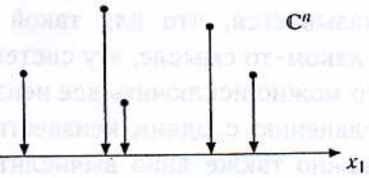


Рис. 7. Проекция на ось x_1

Что конкретно будет выражать формула? Пусть есть n уравнений $P_1 = 0, \ldots, P_n = 0$ от n неизвестных, и пусть есть ещё какой-то многочлен Q от n переменных. Формула будет явно выражать сумму $\sum Q(a)$, где суммирование ведётся по всем $a \in (\mathbb{C}^n)^*$, для которых $P_1(a) = \ldots = P_n(a) = 0$.

Прежде чем выписывать эту формулу, зададимся вопросом, зачем вообще она нужна. Представьте себе, что мы умеем вычислять такую сумму для любого многочлена Q. Если мы это умеем, то мы можем сделать всё остальное: можно и исключить неизвестные, и найти вещественные корни и т. д. Давайте, например, исключим неизвестные. Пусть есть конечное множество точек $A \subset \mathbb{C}^n$ Предположим, что мы знаем $\sum\limits_{a \in A} Q(a)$. Как получить уравнение на x_1? Спроектируем все точки множества A на ось x_1 (рис. 7). Мы хотим написать уравнение, корнями которого являются все получившиеся проекции. Сначала научимся суммировать полином одной переменной по проекции множества A. Возьмём функцию Q, которая зависит только от x_1. Если Q зависит только от x_1, то её значения в точке и в проекции одинаковы. Поэтому суммирование функции Q по проекциям и суммирование по точкам множества A — это одно и то же. По точкам множества A мы умеем суммировать. Давайте просуммируем такие функции. Сначала просуммируем функцию 1. Тогда мы узнаем число точек N. Затем просуммируем функции $x_1, x_1^2, \ldots, x_1^{N-1}$ Так мы получим основные симметрические функции Ньютона от точек проекции множества A. По ним выписываются коэффициенты многочлена, корнями которого являются точки проекции множества A. Мы исключили все неизвестные, кроме одного.

Примерно таким же способом (только надо рассматривать квадратичные формы, их сигнатуры и т. д.) можно узнать число вещественных точек в множестве A, если A инвариантно относительно комплексного сопряжения. Можно найти число точек в любой области. Если вы знаете сумму значений любого полинома Q по всем точкам конечного множества A, вы знаете всё про множество A.

Комбинаторный коэффициент

Чтобы написать формулу для суммы значений полинома, мне понадобятся две величины. Одна из них — геометрическая величина (точнее, много однотипных геометрических величин, которые характеризуют взаимное расположение многогранников). Она самая забавная, и о ней я буду специально говорить. Она называется *комбинаторный коэффициент*. Другая величина алгебраическая, та самая, которая зависит от всех коэффициентов и получается делением. Формула, как я и обещал, будет состоять из двух частей. Одна часть геометрическая, другая алгебраическая. Формула имеет следующий вид:

$$\sum_{P_1(a)=\ldots=P_n(a)=0} Q(a) = \sum_{A\in \operatorname{vert}\Delta} C_A \operatorname{res}_A \omega.$$

Суммирование в правой части формулы ведётся по вершинам некоторого многогранника Δ. Многогранник Δ нужно взять равным $\Delta_1+\ldots+\Delta_n$, т. е. многогранник Δ — это сумма по Минковскому многогранников Ньютона всех уравнений системы.

Нарисуем, например, на плоскости сумму по Минковскому треугольника и квадрата (рис. 8). Получается многоугольник, стороны которого — это все стороны треугольника и квадрата, расположенные в таком порядке, чтобы получился выпуклый многоугольник. С точностью до параллельного переноса сумма по Минковскому двух многоугольников на

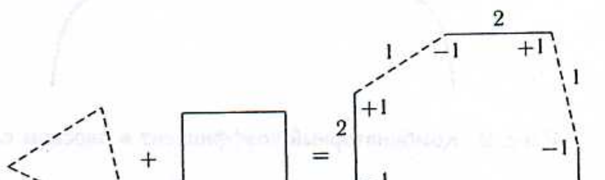


Рис. 8. Сумма по Минковскому

плоскости — это многоугольник, стороны которого — это все стороны первого многоугольника и все стороны второго.

Во-первых, в каждой вершине A многогранника Δ возникнет своё целое число C_A — геометрическая часть формулы. Во-вторых, возникнет арифметическое число $\operatorname{res}_A \omega$. Нужно вычислить целое число C_A, которое характеризует расположение многогранников. Нужно провести некую операцию деления и вычислить число $\operatorname{res}_A \omega$. В этой операции деления фигурируют коэффициенты всех уравнений. Потом нужно сложить числа $\operatorname{res}_A \omega$, взятые с коэффициентами C_A, по всем вершинам A многогранника Δ, и получится ответ. Так выглядит эта формула.

Теперь мне нужно определить комбинаторный коэффициент C_A. Я начну с определения в плоском случае, потому что плоский случай проще всех остальных. Оказывается, что в плоском случае комбинаторный коэффициент принимает всего три значения: -1, 0 и $+1$. Я замечу, что в одномерном случае локальный индекс пересечения, скажем, прямой и графика функции тоже может принимать те же самые значения -1, 0 и $+1$ (рис. 9). А в многомерном случае индекс может быть принимать любое целое значение. В многомерном случае комбинаторный коэффициент тоже может быть любым целым числом.

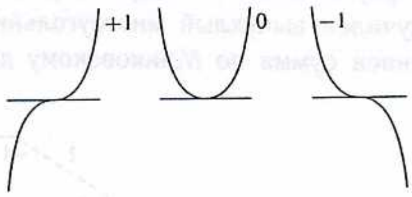


Рис. 9. Комбинаторный коэффициент в плоском случае

В плоском случае определение комбинаторного коэффициента C_A таково. Возьмём сумму многоугольников Ньютона, и будем её обходить против часовой стрелки. Если в вершине A сторона, пришедшая из первого многоугольника, меняется на сторону, пришедшую из второго многоугольника, то комбинаторный коэффициент C_A равен $+1$; если сторона, пришедшая из второго многоугольника, меняется на сторону, пришедшую из первого, то комбинаторный коэффициент в этой вершине равен -1; если обе стороны, прилегающие к вершине A, пришли из одного и того же многоугольника, то комбинаторный коэффициент C_A вершине равен 0 (рис. 8).

В многомерном случае прежде всего надо определить понятие общего набора многогранников. Давайте проанализируем определение в двумерном случае. Пусть у двух многоугольников нет параллельных сторон с одинаковым направлением внешних нормалей. Это означает следующее. Возьмём произвольный ненулевой ковектор: $\xi \in (\mathbb{R}^2)^*$, $\xi \neq 0$. Ковектор — это линейная функция. Будем искать её максимум на наших многоугольниках. Я утверждаю, что хотя бы в одном из многоугольников максимум будет в вершине. Он случайно может достигаться на стороне в одном многоугольнике. Но тогда во втором многоугольнике на стороне он достигаться не может, иначе у этих многоугольников были бы параллельные стороны с одинаковым направлением внешних нормалей. Итак, этот набор многоугольников обладает следующим свойством: для любого ковектора $\xi \neq 0$ существует номер i, для которого максимум $\max\limits_{x\in\Delta_i}(\xi, x)$ на i-м многоугольнике достигается лишь в вершине. Скажем, что n многогранников в n-мерном пространстве расположены общим образом относительно друг друга, если любая ненулевая линейная функция хотя бы в одном из них достигает максимума в вершине. Это свойство выполняется в случае общего положения. Если n многогранников не такие, то, чуть-чуть повернув их, вы добьетесь того, что это свойство будет выполнено.

Теперь я определяю комбинаторный коэффициент в вершине. Это будет локальная степень некоторого отображения. Построим отображение границы многогранника $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$ в границу положительного ортанта $F\colon \partial\Delta \to \partial\mathbb{R}^n_+ \subset \mathbb{R}^n$ Граница многогранника — это, в сущности, многообразие. Негладкое, конечно, но многообразие. Граница положительного ортанта — это тоже многообразие; тоже негладкое. Я построю такое отображение F, что в нуль перейдут только вершины многогранника. Другими словами, прообраз нуля при этом отображении состоит в точности из вершин. Тогда в каждом прообразе есть понятие локальной степени отображения. Эта локальная степень отображения и будет комбинаторным коэффициентом, соответствующим вершине. Причём отображение я построю не одно; отображений я построю много. Но все они будут гомотопны в классе отображений, у которых прообраз нуля состоит из вершин, и локальная степень у них у всех будет одинаковая. Неважно, какое из них взять.

Положительный ортант $\mathbb{R}^n_+$ лежит в $\mathbb{R}^n$ Поэтому отображение в $\mathbb{R}^n_+$ можно задать, задав n функций $F_1, \ldots, F_n$. Функция F_i определяется так. Вспомним, что $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$. Это означает, что каждая грань Γ многогранника Δ есть сумма граней: $\Gamma = \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_n$, где Γ_i — грань многогранника Δ_i. Я утверждаю, что среди граней Γ_i обязательно есть вершины. Действительно, возьмём линейную функцию ξ, которая достигает максимума в точности на грани Γ. Тогда на первом многограннике она достигает максимума в точности на грани Γ_1, на втором — на грани Γ_2, на последнем — на грани Γ_n. Но, как мы знаем, для каждой ненулевой линейной функции ξ найдётся многогранник, в котором максимум достигается в вершине. Итак, некоторые грани Γ_i — вершины. Положим $F_i(\Gamma) > 0$, если Γ_i — не вершина, и положим $F_i(\Gamma) = 0$, если Γ_i — вершина. Такие функции существуют. Действительно, если мы зафиксируем номер i, то набор тех граней Γ, в которые Γ_i входит вершиной, будет замкнутым множеством. Мы всегда можем построить непрерывную функцию, которая на замкнутом множестве равна нулю и положительна на дополнении.

Возьмём любой набор функций $F_1, \ldots, F_n$, удовлетворяющих указанному свойству. Покажем, что отображение $F = (F_1, \ldots, F_n)$ переводит границу многогранника Δ в границу ортанта. Действительно, во-первых, все функции неотрицательные, во-вторых, в каждой точке одна из них обязательно обращается в нуль. Итак, у нас возникает отображение границы многогранника в границу ортанта. В каждой вершине A есть локальная степень отображения C_A. Это и есть комбинаторный коэффициент.

Оказывается, у чисел C_A есть совершенно другое определение. Возьмём вершину A многогранника Δ. Около одной вершины любой многогранник выглядит как конус. В этот конус после параллельного переноса попадают конусы многогранников Δ_i около вершин A_i, где $A = A_1 + \ldots + A_n$. Эту картинку нужно проективизировать. Например, если речь идёт о трёхмерном многограннике, то проективизированная картинка плоская. На этой плоскости есть три выпуклые фигуры — это то, как выглядят три выпуклых многогранника Δ_i в окрестностях вершин A_i, параллельно перенесённых в точку A (рис. 10). Проективизация около вершины A многогранника $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ будет выпуклой оболочкой этих трёх фигур.

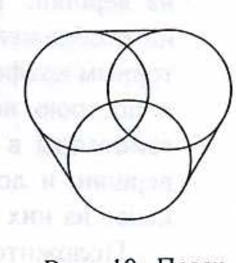


Рис. 10. Проективизированная картинка

В $(n+1)$-мерном случае получаем $n+1$ выпуклое тело в n-мерном пространстве. Предположим, что эти тела достаточно общие. Я хочу сопоставить каждому такому набору выпуклых тел целое число, комбинаторный коэффициент C_A. Выпуклые тела занумерованы (упорядочены). Ограничение по общности будет такое. Например, на плоскости у двух выпуклых областей может быть общая опорная прямая (общая касательная), но у трёх областей сразу общая опорная прямая может быть только случайно; если они находятся в общем положении, то общей опорной прямой у них нет. В n-мерном случае мы будем говорить, что $n+1$ выпуклых тел общим образом расположены в n-мерном пространстве, если у них нет общей опорной гиперплоскости. Для таких наборов я определю целое число. Определение будет немножко странное, но вполне в духе

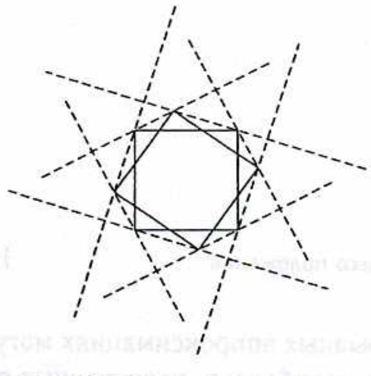


Рис. 11. Опорные прямые

степени. Оно будет несимметрично. Тела будут играть разную роль. Пусть есть выпуклые тела $\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Delta_{n+1}$. Последнее тело Δ_{n+1} отложим в сторону. Тогда останется n тел. У n тел может быть общая опорная гиперплоскость; их даже может быть очень много, не обязательно одна. Например, если вы возьмёте квадрат, повернете его относительно центра, то у получившейся пары квадратов общих опорных прямых будет много (рис 11).

Итак, берем n выпуклых тел в n-мерном пространстве и берем у них какую-то опорную гиперплоскость. Точнее говоря, нас интересуют только такие опорные гиперплоскости, что одно из полупространств, на которые эта гиперплоскость делит $\mathbb{R}^n$, содержит все $n+1$ тел. Давайте будем считать, что наши тела удовлетворяют немного более сильному свойству общности, чем я предположил с самого начала. Предположим, что общая опорная гиперплоскость пересекает каждое из n тел по одной точке и будем считать, что эти n точек образуют вершины $(n-1)$-мерного симплекса. Наша гиперплоскость ориентирована: она была границей полупространства, содержащего $n+1$ тело, а граница ориентированного многообразия ориентирована. Итак, наша гиперплоскость ориентирована, и в ней есть симплекс, вершины которого занумерованы. Порядок вершин симплекса тоже задаёт ориентацию. Если эти две ориентации совпадают, то будем считать вклад этого опорного полупространства со знаком плюс, а если не совпадают — со знаком минус. Посчитаем все опорные полуплоскости описанного вида, с учётом приписанных им знаков. Получится целое число. Это целое число и есть комбинаторный коэффициент для $n+1$ тела, удовлетворяющего немного более сильному свойству общности.

Пусть есть $n+1$ тело, общие в слабом смысле, т. е. у них нет общей опорной гиперплоскости. Давайте их слегка пошевелим, чтобы у них попрежнему не было общей опорной гиперплоскости и чтобы полученные после шевеления тела были в общем положении в сильном смысле слова. Для полученных тел определён комбинаторный коэффициент. Разные шевеления могут приводить к очень разным картинкам. Но получающийся комбинаторный коэффициент не зависит от способа шевеления. Он и называется комбинаторным коэффициентом исходного набора тел. Как при определении степени отображения: вы можете взять непрерывное отображение, приблизить его гладким, взять точку, посчитать число прообразов с учётом знака якобиана. При разных непрерывных аппроксимациях могут получаться очень разные картинки, но число прообразов, посчитанных со знаком, не меняется.

Я думаю, что я рассказал, что такое комбинаторный коэффициент. Видно, что это действительно геометрический инвариант, который никакого отношения к коэффициентам уравнений не имеет, а зависит именно от того, как многогранники расположены. И видно, что этот инвариант довольно грубый и устойчивый относительно малых шевелений.

Число $\mathrm{res}_A\,\omega$

Давайте теперь разбираться с числом $\mathrm{res}_A\,\omega$. Это число, как можно догадаться из формулы, будет вычетом некоторой дифференциальной формы ω. Сейчас я напишу эту дифференциальную форму и расскажу, о каком вычете идёт речь. Этот вычет будет комплексным числом, которое будет получаться явным делением; в его вычислении будут участвовать все коэффициенты всех уравнений.

Прежде чем переходить к n-мерному случаю, разберём совсем понятный 1-мерный случай. Пусть есть рациональная дифференциальная форма $\frac{Q}{P}\frac{dz}{z}$, где P и Q — многочлены от одной переменной z. Я хочу раскладывать рациональную функцию $\frac{Q}{P}$ в ряд Лорана по переменной z; не по переменной $z-a$, а именно по переменной z. Давайте посмотрим, сколько таких рядов. У нас есть знаменатель P, у знаменателя есть нули. Рассмотрим на комплексной плоскости окружности с центром в нуле, проходящие через нули знаменателя. Функция $\frac{Q}{P}$ раскладывается в ряд Лорана по переменной z в любом кольце между соседними окружностями. (Любая аналитическая функция, регулярная в кольце, раскладывается в этом кольце в ряд Лорана). Число таких колец на единицу меньше числа нулей у полинома P Вообще говоря, ряд Лорана бесконечен в обе стороны. Но есть два ряда, конечных в одну из сторон. Это ряды Лорана в точке 0 и в точке ∞. Эти ряды особенно приятные. Они-то нам и нужны.

Любой коэффициент в этих рядах находится чисто алгебраически, делением. Я сразу расскажу об алгоритме нахождения коэффициентов ряда в многомерной ситуации. В одномерной ситуации многогранник Ньютона полинома P от одной переменной — отрезок. У этого отрезка есть два конца. Замечательных областей для формы $\frac{Q}{P}\frac{dz}{z}$ тоже две. Они связаны с вершинами многогранника Ньютона знаменателя: ясно, что младшая степень полинома P отвечает за точку 0, а старшая степень отвечает за точку ∞. Как это будет выглядеть в многомерном случае? В многомерном случае полином Лорана P будет иметь свой многогранник Ньютона. Оказывается, что если в многомерном пространстве мы возьмём форму

$$\frac{Q}{P}\frac{dz_1}{z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{dz_n}{z_n},$$

то с каждой вершиной многогранника Ньютона полинома Лорана P будет связан свой ряд Лорана по переменным $z_1, \ldots, z_n$. Мономы, входящие в этот ряд, принадлежат некоторому выпуклому конусу. Суммирование будет идти не по всем целым точкам в пространстве, а только по целым точкам, лежащим в конусе. Этот конус будет, по существу, тем конусом, который связан с вершиной многогранника (около каждой вершины многогранник совпадает с конусом).

Есть ещё и другие ряды Лорана по степеням $z_1, \ldots, z_n$. Они тоже очень забавные геометрически. Правда, с нашей формулой они никак не связаны. Зато они тесно связаны с тем, что называется *амёба*. Амёбу придумали Виро, Гельфанд, Зелевинский, Капранов, Михалкин.

Я напишу ряд Лорана, связанный с вершиной. Вы увидите, что он получается чистым делением. Пусть у нас есть рациональная функция $\frac{Q}{P}$, и мы хотим разложить её в ряд Лорана около вершины многогранника Ньютона полинома Лорана P. Давайте сначала рассмотрим самый простой случай, к которому всё потом сведётся. Пусть точка O является вершиной многогранника $\Delta(P)$, пусть свободный член полинома P равен единице и мы хотим написать ряд Лорана функции $\frac{1}{P}$, соответствующий нулевой вершине. Положим $P = 1 - \widetilde{P}$, где $\widetilde{P}$ — полином Лорана, не имеющий свободного члена. Так и хочется написать $\frac{1}{1-\widetilde{P}} = 1 + \widetilde{P} + \widetilde{P}^2 + \ldots$ Давайте так и сделаем. Что получится? Многогранник Ньютона для P содержит точку 0. Когда мы определяем $\widetilde{P}$, единичку у P мы забрали, поэтому многогранник Ньютона для $\widetilde{P}$ не содержит точку 0. Многогранник Ньютона для $\widetilde{P}^2$ такой же, как и для $\widetilde{P}$, но в два раза больше (рис. 12); для $\widetilde{P}^3$ — в три раза больше и т. д. Как вы видите, многогранник Ньютона для $\widetilde{P}^k$ всё дальше и дальше отходит от точки 0. Чтобы узнать коэффициент при любом конкретном мономе, нам придётся считать лишь конечное число степеней $\widetilde{P}^k$ полинома Лорана $\widetilde{P}$. Это вполне конечная процедура.

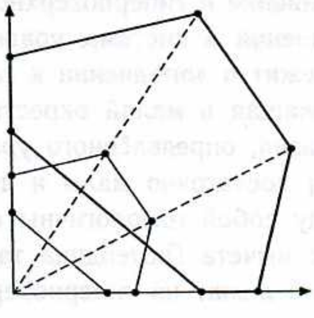


Рис. 12. Многогранники Ньютона для $\widetilde{P}$ и для $\widetilde{P}^2$

Пусть теперь $P = c_a z^a + \ldots$, точка a является вершиной многогранника $\Delta(P)$, и мы хотим написать ряд Лорана функции $\frac{1}{P}$, соответствующий вершине $A = a$. Этот ряд по определению равен умноженному на $c_a z^a$ ряду Лорана функции $\frac{1}{c_a^{-1} z^{-a} P}$, соответствующему нулевой вершине многогранника $\Delta(c_a^{-1} z^{-a} P)$.

Если ряд для P^{-1} написан, то умножить его на полином Лорана Q уже несложно. Итак, если у вас есть рациональная функция $\frac{Q}{P}$, то в каждой вершине многогранника $\Delta(P)$ она раскладывается в ряд Лорана. Это вычисление явное. В каждой вершине нам нужен будет только свободный член. Число $\operatorname{res}_A \omega$ для формы $\omega = \frac{Q}{P}\frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$ по определению равно свободному члену ряда Лорана функции $\frac{Q}{P}$ в вершине A многогранника $\Delta(P)$.

Давайте немножко обобщим нашу задачу. Будем считать не сумму значений полиномов по корням, а сумму значений так называемых *вычетов Гротендика*. Эти вычеты Гротендика в частном случае будут тем, что нам надо (значениями функций), а вообще-то это немножко более общие вещи. Сейчас я определю, что такое вычет Гротендика, и сформулирую нашу с Ольгой Гельфонд теорему в полном объёме. Пусть есть гиперповерхность, которая представлена как объединение n гиперповерхностей: $P = P_1 \ \ldots\ P_n = 0$. Тогда около каждого решения a системы уравнений $P_1 = \ldots = P_n = 0$ определён цикл, который лежит в дополнении к гиперповерхности. Он определяется так: это лежащая в малой окрестности решения a компонента связности многообразия, определённого уравнениями $\|P_1\| = \varepsilon_1, \ldots, \|P_n\| = \varepsilon_n$, где числа ε_i достаточно малы и достаточно общи. Все такие многообразия между собой гомологичны в дополнении к гиперповерхности. Определение вычета Гротендика таково. Пусть есть n-форма ω, особенности которой лежат на гиперповерхностях $P_1 = 0, \ldots, P_n = 0$. Интеграл $\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int \omega$ по такому циклу называется вычетом Гротендика. Этот вычет — прямое обобщение вычета Коши: если берётся многочлен P от одной переменной, то $P = 0$ — это точка, компонента связности множества $P = \varepsilon$, лежащая около точки — это кривая, обходящая вокруг этой точки. В 1-мерном случае особая точка обходится по кривой, в n-мерном пространстве, если уравнения трансверсальны, то по тору, а если не трансверсальны — по подмногообразию, которое задаётся уравнениями $\|P_1\| = \varepsilon_1, \ldots, \|P_n\| = \varepsilon_n$.

Теперь я сформулирую нашу теорему.

Теорема 1. *Пусть в $(\mathbb{C}^*)^n$ есть n уравнений $P_1 = 0, \ldots, P_n = 0$, многогранники Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ которых расположены* *достаточно общим образом. Возьмём произвольный многочлен Лорана Q. Положим $P = P_1 \cdot \ldots \cdot P_n$. Тогда*

$$\sum_{\text{по всем корням системы}} \operatorname{res} \frac{Q}{P} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_n}{z_n} = \sum_{A \in \operatorname{vert}\Delta(P)} (-1)^n C_A \operatorname{res}_A \omega,$$

где слева суммируются вычеты Гротендика, а справа — числа $\operatorname{res}_A \omega$ *— свободные члены рядов Лорана рациональной функции* $\frac{Q}{P}$, *вычисленные в вершине A многогранника* $\Delta(P)$.

Кстати сказать, ряды Лорана в разных вершинах связаны, потому что сумма каждого ряда — данная рациональная функция. Но связаны они не сильнее, чем, скажем, ряды Лорана рациональной функции одной переменной в нуле и в бесконечности. Это абсолютно разные ряды. Аналитические продолжения их сумм, конечно, одинаковые, но они абсолютно не похожи друг на друга. С каждой вершиной у нас связан свой ряд; берём его свободный коэффициент, и вычисляем сумму.

В частном случае, если форму $\frac{Q}{P} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$ подобрать правильно, это будет сумма значений многочлена. Как же её подобрать правильно? Если есть форма

$$L \frac{dP_1}{P_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dP_n}{P_n},$$

то вычет такой формы в корне a системы $P_1 = \ldots = P_n = 0$ равен $\mu(a)L(a)$, где $\mu(a)$ — кратность корня a. Представьте себе, что я хочу суммировать многочлен L по корням. Это то же самое, что суммировать вычеты формы

$$\frac{dP_1}{P_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dP_n}{P_n} = \frac{L \det\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) z_1 \cdots z_n}{P_1 \cdot \ldots \cdot P_n} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$$

Задачу суммирования значений функций мы свели к задаче суммирования вычетов Гротендика, которую мы умеем решать.

Частные случаи

Первый частный случай — суммирование единицы. С одной стороны, мы должны получить число корней. С другой стороны, получается довольно странное выражение $\sum (-1)^n C_A \det(A_1, \ldots, A_n)$, которое никак не похоже на смешанный объём. Это выражение устроено следующим образом. В сумме Минковского $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$ каждая вершина A помнит, суммой каких вершин она является. $A = A_1 + \ldots + A_n$. Поэтому с каждой вершиной A суммы Минковского в n-мерном пространстве связано n векторов $A_1, \ldots, A_n$. Для них можно рассмотреть детерминант $\det(A_1, \ldots, A_n)$, где A_1 — вершина в первом многограннике, ..., A_n — вершина в n-м многограннике (имеются в виду те вершины, суммой которых является наша вершина A).

По теореме Бернштейна число корней равно $n!\,\mathrm{vol}(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$, поэтому

$$\sum_{A \in \mathrm{vert}\,\Delta(P)} (-1)^n C_A \det(A_1, \ldots, A_n) = n!\,\mathrm{vol}(\Delta_1, \ldots, \Delta_n).$$

Почему должно выполняться такое равенство, непонятно. Мы суммируем самые простые определители, правда, с хитрыми коэффициентами. В результате получается смешанный объём!

Мы доказали эту странную геометрическую теорему в том случае, когда наши многогранники целочисленные и достаточно общим образом расположены друг относительно друга. Я уже говорил, что теория многогранников Ньютона позволяет из алгебры получать геометрические следствия. После того как такая формула получилась для целочисленных многогранников, не нужно иметь слишком богатое воображение, чтобы догадаться, что такая же формула верна и для нецелочисленных многогранников. Но при помощи алгебры её никак не докажешь. Никакого отношения системы алгебраических уравнений к не целочисленным многогранникам не имеют; разве что с экспоненциальными суммами есть связь, но это уже не алгебра. Алгебра просто диктует справедливость следующего геометрического факта. Пусть в n-мерном пространстве задано n выпуклых многогранников, которые находятся в общем положении, т. е. для каждого ненулевого ковектора хотя бы в одном многограннике максимум достигается строго в вершине. Тогда для таких наборов многогранников должна быть верна формула

$$\sum (-1)^n C_A \det(A_1, \ldots, A_n) = n!\,\mathrm{vol}(\Delta_1, \ldots, \Delta_n).$$

Мы с Ольгой гипотетически считали, что эта формула верна. Ольга её даже в отдельных случаях доказала, но не в общем случае. Мне стоило большого труда доказать её геометрически. Я придумал доказательство, которое, с одной стороны, доказывает эту теорему для любых многогранников, а с другой стороны, очень близкие рассуждения (прямой перевод, как подстрочником, с русского на английский) в алгебраической геометрии дают доказательство теоремы Бернштейна.

Произведения корней

Теперь я расскажу о формуле для произведения корней. Я хочу перемножить корни n уравнений от n неизвестных в группе $(\mathbb{C}^*)^n$ Я снова буду предполагать, что многогранники Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ достаточно общи. Сейчас я напишу ответ, который очень похож на предыдущую формулу для суммы значений функции. (Я знаю два ответа. Один похож на эту формулу, а второй похож скорее на формулу Бернштейна.)

Произведение корней я просто посчитал не используя никакой техники. Правда, считал я долго. Делать что-либо без всякой техники, просто руками, всегда трудно.

Когда мы перемножим корни, мы получим точку в торе $(\mathbb{C}^*)^n$ Найти точку в группе $(\mathbb{C}^*)^n$ — это по существу то же самое, что вычислить на ней значение любого характера $\chi\colon (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{C}$. Координаты $z_1, \ldots, z_n$ — это характеры. Если вычислить по формуле, которую я сейчас напишу, значения этих характеров, то мы получим координаты точки.

Итак пусть есть группа $(\mathbb{C}^*)^n$ Фиксируем характер, или, если хотите, фиксируем моном $z^k = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$ Я хочу перемножить корни и на полученной точке вычислить этот моном. Получится число. Для числа легче писать формулу, чем для точки.

Ответ получается как произведение по вершинам многогранника $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$ некоторых странных выражений. Вспомним, что каждая вершина A многогранника Δ есть сумма вершин $A_1, \ldots, A_n$ многогранников Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, т. е. $A = A_1 + \ldots + A_n$. Ещё давайте вспомним, что в каждом многограннике Δ_i у нас был написан свой полином Лорана P_i; у этого полинома есть коэффициент, который отвечает соответствующей вершине A_i. Обозначим его $P_i(A_i)$. Здесь имеется в виду следующее. Первый многочлен Лорана есть сумма $P_1 = \sum P_1(a_k) z^k$ по целочисленным точкам $a_k \in \Delta_1$. Обозначим через $P_1(A_1)$ коэффициент $P_1(a_k)$ в соответствующей вершине A_1, т. е. $a_k = A_1$. Аналогичный смысл имеют $P_2(A_2), \ldots, P_n(A_n)$ — это коэффициенты полиномов Лорана P_i в соответствующей вершине A_i.

Число $[P_1(A_1), \ldots, P_n(A_n), k]_A$, которое я хочу сейчас определить, будет зависеть лишь от вершин $A_1, \ldots, A_n$, от коэффициентов $P_i(A_i)$ и от характера $z^k = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$

Данные, определяющие это число, можно записать в виде $(n+1) \times (n+1)$ матрицы $M(A)$, где

$$M(A) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline P_1(A_1) & P_2(A_2) & \ldots & P_n(A_n) & 1 \\ \hline A_1 & A_2 & \ldots & A_n & k \\ \hline \end{array}$$

В первой строке этой матрицы стоит набор чисел $P_1(A_1), \ldots, P_n(A_n)$, 1 (единица в этой строке появилась из-за того, что характер z^k — это моном, взятый с единичным коэффициентом). Матрица $\widetilde{M}(A)$, полученная из матрицы $M(A)$ вычёркиванием первой строки, определяется так: столбец этой матрицы с номером m, где $1 \leqslant m \leqslant n$, — вектор A_m. Столбец с номером $(n+1)$ — вектор k. По определению

$$[P_1(A_1), \ldots, P_n(A_n), k]_A = \\ = (-1)^{D(\widetilde{M}(A))} P_1(A_1)^{\det[A_2,\ldots,A_n,k]} \ldots P_n(A_n)^{(-1)^{n+1}\det[A_1,\ldots,A_{n-1}]}.$$

Здесь $D(\widetilde{M}(A))$ — своеобразный аналог определителя целочисленной $(n+1)\times n$ матрицы $\widetilde{M}(A)$, определённый по mod 2. Это единственная не равная тождественно нулю полилинейная кососимметричная функция от столбцов матрицы, принимающая значение в поле $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и обладающая следующим свойством. Если ранг матрицы над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, полученной приведением матрицы $\widetilde{M}(A)$ по модулю 2, меньше чем n, то $D(\widetilde{M}(A)) = 0$. Конечно, этот замечательный аналог определителя заслуживает более подробного обсуждения, но у меня сейчас нет на это времени.

Число $[P_1(A_1), \ldots, P_n(A_n), k]_A$ называется *символом Паршина*. Именно такие числа фигурируют в теории Паршина—Като.

Теорема 2. *Пусть в* $(\mathbb{C}^*)^n$ *есть система уравнений* $P_1 = \ldots = P_n = 0$, *многогранники Ньютона* $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ *которых расположены достаточно общим образом. Тогда*

$$\prod_{\text{по корням } a \text{ системы}} a^k = \prod_{A\in \operatorname{vert}\Delta} [P_1(A_1), \ldots, P_n(A_n), k]_A^{(-1)^n C_A}.$$

Другими словами, чтобы вычислить значение характера $z^k = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$ на произведении корней системы уравнений $P_1 = \ldots = P_n = 0$ с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, надо по всем вершинам A многогранника $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$ перемножить символ $[P_1(A_1), \ldots, P_n(A_n), k]_A$, возведённый в степень $(-1)^n C_A$, где C_A — комбинаторный коэффициент в вершине A.

Формула для произведения корней очень похожа на формулу

$$\sum_{A\in \operatorname{vert}\Delta} (-1)^n C_A \det(A_1, \ldots, A_n)$$

для числа корней такой системы. И, вообще, формула для произведения корней очень похожа на формулу для суммы вычетов Гротендика (см. теорему 1). Почему? Существует ли единое доказательство этих формул? Оказалось, что ответ на этот вопрос положителен.

Пришла пора сказать о законах взаимности Паршина. Я начну с классического одномерного случая. Для алгебраических кривых известны две очень похожие формулы. Согласно первой формуле для всякой рациональной дифференциальной формы ω на любой алгебраической кривой Γ

выполняется равенство

$$\sum_{a\in\Gamma} \operatorname{res}_a \omega = 0.$$

Согласно второй формуле (называемой законом взаимности Вейля) для всякой пары рациональных функций f, g на любой алгебраической кривой Γ выполняется равенство

$$\prod_{a\in\Gamma} \{f, g\}_a = 1.$$

Здесь $\{f, g\}_a$ — так называемый символ пары функций f, g в точке a. Напомним определение этого символа. Пусть u — локальная координата около точки a, на кривой Γ и $u(a)=0$. Пусть $f = au^k + \ldots$ и $g = bu^m + \ldots$ — старшие члены разложения функций f и g в ряды Лорана по координате u. Тогда символ $\{f, g\}_a$ по определению равен $(-1)^{km}a^m b^{-k}$. Если в точке a ни f, ни g не обращаются в нуль, ни в бесконечность, то $\{f, g\}_a = 1$. Поэтому в произведении, фигурирующем в законе взаимности, лишь конечное число сомножителей отлично от 1 и это бесконечное произведение имеет смысл. Определение символа $\{f, g\}_a$ можно переписать в следующем виде. Рассмотрим 2×2 матрицу M, первая строка которой равна (a, b), а вторая строка равна (k, m).

Рассмотрим еще 2×1 матрицу $\widetilde{M}$, состоящую из строки (k, m). Тогда $\{f, g\}_a = (-1)^{D(\widetilde{M})}a^m b^{-k}$, что полностью согласуется с определением символа Паршина.

Андре Вейль пришел к своему закону взаимности из теории чисел, рассматривая его как функциональный аналог квадратичного закона взаимности Гаусса.

Для Паршина эти классические теоремы были исходным пунктом. Он обобщил их на многомерный случай. В его теории вместо алгебраической кривой фигурирует произвольное n-мерное алгебраическое многообразие (над произвольным алгебраически замкнутым полем). Для произвольной рациональной формы ω старшей степени на алгебраическом многообразии он определяет понятие вычета, и доказывает, что определенные суммы вычетов любой формы равны нулю. Для $n+1$ мероморфной функции на n-мерном алгебраическом многообразии Паршин определяет понятие символа и доказывает, что определенные произведения символов любых наборов из $n+1$ функции равны единице.

Итак, в теории Паршина есть результаты о суммах и о произведениях, очень похожие друг на друга. Разумеется, я надеялся, что наши теоремы о суммах по корням систем уравнений и о произведении корней систем уравнений должны вытекать из теории Паршина. Мой аспирант Ваня

Сопрунов доказал, что так оно и есть. Но мои надежды, пожалуй, не вполне оправдались — доказательство наших теорем от этого не упростились и ситуация с ними не стала более понятной. Скорее наоборот, думая об этом предмете, я очень упростил законы взаимности Паршина для поля комплексных чисел (отмечу, что Паршина, как и Вейля, больше интересовали числовые поля, а совсем не поле комплексных чисел).

Литература

[1] Гельфонд О. А., Хованский А. Г. Многогранники Ньютона и вычеты Гротендика // Доклады Академии Наук. 1996. № 3(350). С. 298—300.

[2] Gelfond O. A., Khovanskii A. G. Toric geometry and Grothendieck residues // Moscow Mathematical Journal. 2002. V. 2, № 1. P. 99—112.

[3] Khovanskii A. G. Newton polyhedrons, a new formula for mixed volume, product of roots of a system of equations // The Arnoldfest, Proceedings of a Conference in Honour of V. I. Arnold for his Sixtieth Birthday. Fields Institute Communications, V. 24. Amer. Math. Soc., 1999. P. 325—364.

14 декабря 2000 г.