Функциональный анализ и его приложения,
1986, т. 20, вып. 1, 50—61

УДК 513.34 + 513.60 + 519.46

ГИПЕРПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ, ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

А. Г. Хованский

Ограниченный многогранник называется *простым*, если он является пересечением полупространств, находящихся в общем положении. В статье оценивается число и доля k-мерных граней простого n-мерного многогранника, которые может пересечь гиперплоскость, не проходящая через его вершины. Вот пример результата: общая гиперплоскость не может пересечь более чем $P/3+2$ ребер простого трехмерного многогранника с числом ребер P. Эта оценка точная, т. е. существуют многогранники (с как угодно большим числом ребер) и их сечения, для которых оценка достигается.

Справедлива

Теорема 1. *В пространстве Лобачевского размерности* >995 *не существуют дискретных групп, порожденных отражениями, с фундаментальным многогранником конечного объема.*

Для групп с компактным фундаментальным многогранником аналогичный результат был получен В. В. Никулиным (арифметический случай [1, 2]) и Э. Б. Винбергом (общий случай [3, 4]). Он основан на оценке В. В. Никулина среднего числа l-мерных граней на k-мерной грани многомерного простого многогранника. После проведенной в 1984 г. М. Н. Прохоровым работы (см. [5] и § 6) для доказательства теоремы 1 не доставало только аналога оценки В. В. Никулина для многогранников, простота которых нарушается лишь в вершинах. Такой аналог получен в § 5 из теорем о гиперплоских сечениях многогранников (все результаты статьи возникли при попытках его получения). Теорема 1, таким образом, доказана (см. §. 6) в результате совместных условий М. Н. Прохорова и автора.

Оценка В. В. Никулина базируется на свойствах простых многогранников, доказываемых с помощью торических многообразий (см. § 1). Связь торической геометрии и геометрии многогранников, моделирование на многогранниках вычисления когомологий торических многообразий, лежат в основе настоящей статьи. Каждая предлагаемая теорема о комбинаторике гиперплоских сечений многогранников имеет точный аналог в геометрии торических многообразий.

С другой стороны, для всех встречающихся утверждений о геометрии многогранников (кроме утверждения о возрастании к середине коэффициентов H-полинома) в статье найдены элементарные доказательства. Для их понимания не нужно знакомство с торической геометрией.

Я благодарен В. В. Никулину, интерес которого способствовал выполнению этой рабоы, а также В. И. Арнольду, А. А. Бейленсону, А. Н. Варченко, Э. Б. Винбергу и М. Н. Прохорову за полезные обсуждения.

§ 1. Многогранники и торические многообразия

Здесь приводятся в нужной нам форме известные факты о геометрии простых многогранников и гладких торических многообразий.

1.1. Чуть пошевелив грани старшей размерности любого выпуклого многогранника, его можно превратить в простой. Через каждую вершину простого n-мерного многогранника в R^n проходит ровно n граней старшей размерности и ровно n ребер.

F-полиномом простого n-мерного многогранника называется производящий полином последовательности чисел его граней разных размерностей, т. е. $F(t) = \Sigma F_k t^k$, где F_k — число k-мерных граней многогранника. H-полиномом простого многогранника называется полином $H(t) = F(t-1)$. Коэффициенты F- и H-полиномов взаимно выражаются друг через друга, именно $F_k = \Sigma C_m^k H_m$ и $H_k = \Sigma (-1)^{m-k} C_m^k F_m$.

P-полиномом простого n-мерного многогранника называется полином степени $[n/2]$, производящий для последовательности чисел $P_0 = H_0$, $P_i = H_i - H_{i-1}$, $i = 1, \ldots, [n/2]$.

Утверждение 1. *Для n-мерного простого многогранника:*

1) *H-полином возвратен, т. е. $H_i = H_{n-i}$;*

2) *коэффициенты H-полинома возрастают к середине (т. е. коэффициенты P-полинома неотрицательны), причем $H_0 = H_n = P_0 = 1$.*

Следствие 1. 1) *По P-полиному можно восстановить F- и H-полиномы;* 2) *коэффициенты H-полинома положительны.*

Свойства 1) и 2) вместе с неравенством $P_{i+1} \leqslant Q^i(P_i)$ при $1 \leqslant i < [n/2]$, в котором Q^i — специальная функция натурального аргумента, доставляют необходимые и достаточные условия на H-полиномы простых многогранников (т. е. доставляют критерий существования простого многогранника с заданными числами граней всех размерностей). Этот критерий был сформулирован Мак-Мулленом [6] и доказан Биллера и Ли [7] и Стенли [8]. Свойство 1) имеет элементарное доказательство [9] и называется теоремой Дена — Зоммервиля. Намеченное в п. 1.3 доказательство свойства 2) обсуждалось (в других терминах) в 1977 г. на семинаре В. И. Арнольда.

1.2. Алгебраическое n-мерное (над C) многообразие, на котором действует группа $(C \setminus 0)^n$, называется *торическим*, если оно обладает открытой всюду плотной орбитой, изоморфной группе.

F-полиномом гладкого проективного торического многообразия называется производящий полином последовательности чисел его орбит разных размерностей, т. е. $F(t) = \Sigma F_k t^k$, где F_k число k-мерных (над C) орбит. H-полиномом называется полином $H(t) = F(t-1)$. P-полиномом n-мерного многообразия называется производящий полином последовательности чисел $P_0 = H_0$, $P_i = H_i - H_{i-1}$, $i = 1, \ldots, [n/2]$.

Утверждение 2. (см. [10, 11]). 1) *Замыкание k-мерной орбиты гладкого n-мерного торического многообразия является гладким многообразием, при этом каждая 0-мерная орбита лежит в замыкании ровно n орбит размерности $(n-1)$.* 2) *Гладкое торическое многообразие имеет лишь четные числа Бетти b_{2i}, и полином $\Sigma b_{2i} t^i$ совпадает с H-полиномом многообразия.* 3) *На торическом многообразии не существует голоморфных форм ненулевой степени.* 4) *Коэффициент P_i совпадает с размерностью примитивных когомологий многообразия размерности $2i$.*

Свойство 4) вытекает из свойства 2). Свойство 3) легко доказывается непосредственно. Из него вытекает равенство нулю чисел $h^{p,0}$ при $p > 0$ для гладких торических многообразий и равенство нулю первого числа Бетти $b_1 = h^{1,0} + h^{0,1} = 0$. Вычисления в п. 2.2 дают, в частности, вывод свойства 2) из свойств 1) и 3). Результаты настоящей статьи были отгаданы благодаря этим вычислениям.

1.3. Предположим дополнительно, что на торическом многообразии фиксирована кэлерова метрика, инвариантная относительно действия вещественного тора $T^n \subset (C \setminus 0)^n$. Каждому вектору ξ алгебры Ли $\mathscr{L}T^n$ соответствует гамильтоново векторное поле в симплектической структуре, связанной с кэлеровой метрикой, с глобально определенным в силу равенства $b_1 = 0$

гамильтонианом h_ξ. Гамильтонианы h_ξ линейно зависят от вектора ξ, поэтому каждой точке x многообразия соответствует линейная форма M_x на $\mathcal{L}T^n$, определенная равенством $M_x(\xi) = h_\xi(x)$. Это соответствие задает *отображение момента* (определенное с точностью до постоянного слагаемого) торического многообразия в двойственное пространство к алгебре $\mathcal{L}T^n$.

Утверждение 3 [12, 13]. 1) *Критические точки гамильтониана h_ξ образуют (несвязное) подмногообразие, причем ограничение гессианна функции h_ξ на каждую трансверсаль к касательному к подмногообразию подпространству является невырожденной квадратичной формой (т. е. h_ξ — боттовская функция) с четным индексом.* 2) *Образ многообразия при отображении момента является выпуклым многогранником, отображение момента устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством орбит многообразия и множеством граней многогранника, причем k-мерная (над C) орбита отображается с постоянным рангом на открытую k-мерную (над R) грань многогранника.*

Следствие 2. *Образ неособого торического многообразия при отображении момента — простой многогранник.*

Для доказательства нужно сопоставить п. 1) утверждения 2 и п. 2) утверждения 3.

Докажем утверждение 1) для многограника, являющегося образом при отображении момента гладкого торического многообразия. F-, H- и P-полиномы такого многогранника совпадают с F-, H- и P-полиномами торического многообразия. Симметрия H-полинома торического многообразия вытекает из двойственности Пуанкаре, возрастание коэффициентов к середине вытекает из теоремы Левшица, а равенство $H_0 = H_n = 1$ — из связности многообразия. Это доказательство распространяется на многогранники, являющиеся образом при отображении момента *квазигладких* (см. [14]) торических многообразий (для таких многообразий остаются справедливыми утверждения 1 и 2). Несложно показать, что любой простой многогранник можно сколь угодно малой деформацией превратить в образ квазигладкого многообразия. Поэтому приведенных рассуждений достаточно для доказательства утверждения 1.

§ 2. Линейная функция на простом многограннике

Линейную функцию на выпуклом многограннике назовем общей, если она не постоянна ни на каком ребре многогранника. Чуть изменив любую линейную функцию, ее можно превратить в общую.

2.1. Скажем, что вершина b простого n-мерного многогранника имеет *индекс $i(b)$* относительно некоторой общей линейной функции L, если функция L убывает ровно на i ребрах, выходящих из этой вершины (и, следовательно, на остальных $(n - i)$ ребрах, выходящих из этой вершины, она возрастает). Обозначим через $h(i)$ число вершин многогранника, имеющих индекс i. Справедлива

Теорема 2. *Число $h(i)$ совпадает с i-м коэффициентом H_i H-полинома многогранника. Другими словами, числа $h(i)$ связаны с числами F_k k-мерных граней многогранника соотношениями $F_k = \Sigma C_i^k h(i)$ при $k = 0, \ldots, n$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, сопоставляющее каждой k-мерной грани многогранника ту вершину, в которой линейная функция L достигает максимума на этой грани. При этом отображении в каждую вершину индекса i попадает в точности C_i^k k-мерных граней. Действительно, в точке максимума на k-мерной грани, по k ребрам, исходящим из этой вершины и лежащим в грани, функция убывает. Наоборот, набору выходящих из одной вершины k ребер, на каждом из которых функция убывает, соответствует k-мерная грань, для которой эта вершина является максимумом — в простом многограннике на каждый набор из k ребер, исходящих из одной вершины, натягивается k-мерная грань. Просуммировав по всем вершинам число прообразов предъявленного отображения, получим формулу $F_k = \Sigma C_i^k h(i)$.

Следствие 1. *Числа $h(i)$ не зависят от выбора общей линейной функции.*

Следствие 2. *Числа H_i и H_{n-i} равны.*

Доказательство. Вершина индекса i для функции L имеет индекс $n - i$ для функции $-L$. Поэтому число $h(i)$, посчитанное по функции L, совпадает с числом $h(n - i)$, посчитанным по функции $- L$.

Мы получили новое доказательство теоремы Дена — Зоммервиля о равенстве H_i и H_{n-i}. Оно моделирует доказательство двойственности Пуанкаре на гладком многообразии при помощи рассмотрения морсовских функций f и $-f$.

Следствие 3. *Для простого n-мерного многогранника числа H_i при $i = 0, \ldots, n$ строго положительны.*

Действительно, для произвольной вершины многогранника существует общая линейная функция, имеющая в этой вершине любой индекс от 0 до n.

Следствие 4. *Число H_i для любой грани не превосходит числа H_i для многогранника.*

Действительно, пусть L функция, достигающая минимума на заданной грани, и $\tilde{L}$ — близкая к L общая функция. Тогда для любой вершины этой грани индекс функции $\tilde{L}$ на многограннике совпадает с ее индексом для ограничения $\tilde{L}$ на эту грань.

Отметим, что гипотеза о верхней границе [8] легко выводится из следствия 4.

2.2. Рассмотрим отображение момента M кэлерова торического многообразия в $\mathcal{L}^*T^n$ и общую относительно многогранника — образа линейную функцию L на $\mathcal{L}^*T^n$.

Лемма 1. *Функция $L \circ M$ является морсовской на торическом многообразии. Критические точки функции $L \cdot M$ — 0-мерные орбиты многообразия. Индекс критической точки функции $L \circ M$ равен удвоенному индексу соответствующей вершины многогранника — образа относительно функции L.*

Доказательство. Линейная функция L на $\mathcal{L}^*T^n$ соответствует некоторому вектору ξ из алгебры $\mathcal{L}T^n$, и функция $L \circ M$ является гамильтонианом h_ξ. Боттовская функция h_ξ не имеет критических точек на орбитах положительной размерности (так как функция L не постоянна на гранях положительной размерности, и отображение орбиты на грань имеет постоянный ранг). Критическими точками функции h_ξ могут быть лишь нульмерные орбиты, и она, следовательно, морсовская. Пусть индекс функции L на многогранник в вершине b, соответствующей критической точке, равен i. У многогранника существуют замкнутые i-мерная и $(n - i)$-мерная грани, на которых функция L достигает соответственно максимума и минимума в вершине b. Прообразы этих граней — неособые $2i$-мерное и $2(n - i)$-мерные (над R) подмногообразия, на которых функция $L \circ M$ достигает соответственно максимума и минимума в критической точке. Существование таких подмногообразий доказывает последнее утверждение леммы.

Следствие 6. *H-полином торического многообразия равен $\Sigma\, b_{2i}t^i$, где b_{2i} — его $2i$-мерное число Бетти.*

Действительно, гамильтониан $L \circ M$ имеет критические точки четных индексов. Согласно теории Морса число Бетти b_{2i} равно числу критических точек индекса $2i$, которое согласно лемме равно $h(i)$. По теореме 2 $h(i) = H_i$.

Тем самым мы получим новое доказательство свойства 3 утверждения 1 в п. 1.2. (На самом деле доказано большее: фактически предъявлен базис групп гомологий, состоящий из алгебраических циклов. Отсюда вытекает равенствс $b_{2i} = h^{i,i}$ и явное описание кольца пересечений (ср. [11])).

§ 3. Дробно-линейное программирование

Здесь формулируются и решаются нужные в § 4 специальные задачи дробно-линейного программирования. Дробно-линейное программирование это максимизация на выпуклом многограннике отношения двух линейных функций L_1/L_2 (предполагается, что знаменатель L_2 не обращается в нуль на многограннике). Дробно-линейное программирование мало отличается от линейного: проективным преобразованием, переводящим гиперплоскость $L_2 = 0$ в бесконечно удаленную, дробно-линейную функцию можно превратить в линейную. Выпуклый многогранник при таком преобразовании перейдет в другой выпуклый многогранник, а задача дробно-линейного программирования перейдет в задачу линейного программирования. *Максимум дробно-линейной функции достигается на некоторой грани многогранника.* (В случае общего положения эта грань является нульмерной и представляет собой одну из вершин многогранника).

Очевидно следующее

Утверждение 1. *Пусть B_1 и B_2 положительные и $A_1/B_1 > A_2/B_2$. Тогда для неотрицательных чисел α_1, α_2, не равных нулю одновременно, справедливы неравенства $A_1/B_1 \geqslant (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)/(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2) \geqslant A_2/B_2$. При этом первое (второе) неравенство обращается в равенство, если и только если $\alpha_2 = 0$ ($\alpha_1 = 0$).*

Пусть B — конечное множество точек с фиксированной целочисленной функцией i: $B \to \mathbf{Z}$, принимающей значения от 0 до n. Рассмотрим пространство $R^{|B|}$, координатные функции которого находятся во взаимно однозначном соответствии с точками множества B. Координатную функцию, соответствующую точке b, обозначим через x_b. Для неотрицательных целых чисел l и k определим функцию $\Phi_{l,k}$ на $R^{|B|}$ формулой

$$\Phi_{l,k} = \Big[\sum_{b \in B} x_b C^l_{i(b)} + (1 - x_b)\, C^l_{n-i(b)}\Big] \Big/ \Big[\sum_{b \in B} x_b C^k_{i(b)} + (1 - x_b)\, C^k_{n-i(b)}\Big].$$

Функция $\Phi_{l,k}$ определена, если существует хотя бы одна точка $b \in B$, для которой $k \leqslant \min(i(b), n - i(b))$. Мы будем предполагать это условие выполненным.

Задача 1. *Найти максимум функции $\Phi_{l,k}$ на стандартном кубе $0 \leqslant x_b \leqslant 1$ пространства $R^{|B|}$.*

Обозначим через q число $[n/2]$ и через A грань стандартного куба, определенную условиями: $x_b(A) = 1$, если $i(b) < q$, и $x_b(A) = 0$, если $i(b) > q$.

Теорема 3. *При $0 \leqslant l < k < q$ максимум функции $\Phi_{l,k}$ на стандартном кубе пространства $R^{|B|}$ достигается на грани A.*

Доказательство теоремы использует следующие два свойства биномиальных коэффициентов.

Утверждение 2. 1) *Пусть $l < k$. Тогда отношение $\psi(m) = C^l_m/C^k_m$, определенное при $m \geqslant k$, с ростом m строго монотонно убывает.* 2) *Пусть $A > Q \geqslant B$. Тогда отношение $\varphi(h) \doteq (C^h_A - C^h_B)/C^h_Q$, определенное при $0 \leqslant h \leqslant Q$, с ростом h строго монотонно возрастает.*

Доказательство утверждения. 1) $\psi(m) = k!/(m - l)(m - l - 1)\ldots(m - k + 1)\, l!$. С ростом m знаменатель возрастает. 2) $\varphi(h) = A!/Q!\,(A - h)\ldots(Q - h + 1) - B!\,(Q - h)\ldots(B - h + 1)/Q!$ произведения $(A - h)\ldots(Q - h + 1)$ и $(Q - h)\ldots(B - h + 1)$ содержат не зависящее от h число сомножителей, которые уменьшаются с ростом h.

Переходим к доказательству теоремы, которое мы осуществим в три шага. 1. Значение функции $\Phi_{l,k}$ на грани A больше или равно C^l_q/C^k_q. Действительно, согласно п. 1 утверждения 2 отношения C^l_k/C^k_k, C^l_{k+1}/C^k_{k+1}, ..., C^l_q/C^k_q убывают. Осталось несколько раз воспользоваться утверждением 1.2. Значение функции $\Phi_{l,k}$ на грани A больше, чем в любой соседней вершине (т. е. чем в любой вершине, соединенной с гранью A ребром). Действительно, за исключением одной координаты, все координаты соседней вершины удовлетворяют тем же ограничениям, что и координаты точек грани A. Пусть эта исключительная координата соответствует точке $b \in B$. Значение $i(b)$ функций этой точки b обозначим через i. Возможны два случая: $i < q$ и $i > q$. В первом из этих случаев при переходе к соседней вершине к числителю функции $\Phi_{l,k}$ прибавляется число $C_{n-i}^{l} - C_i^l$, а к знаменателю — число $C_{n-i}^k - C_i^k$. Покажем, что отношение этих чисел меньше, чем $\Phi_{l,k}(A)$, — согласно утверждению 1 этого достаточно для доказательства п. 2 в рассматриваемом случае. По п. 1 имеем $\Phi_{l,k}(A) \geqslant C_q^l/C_q^k$. Далее $(C_{n-i}^l - C_i^l)/(C_{n-i}^k - C_i^k) < C_q^l/C_q^k$. Действительно, рассматриваемое неравенство эквивалентно соотношению $(C_{n-i}^l - C_i^l)/C_q^l < (C_{n-i}^k - C_i^k)/C_q^k$. Справедливость этого соотношения вытекает из п. 2) утверждения 2 для $A = n - i$, $Q = q$, $B = i$ ($i < [n/2]$, $n - i > [n/2]$, $q = [n/2]$) и значений h равных l и k. Второй случай ($i > q$) разбирается аналогично первому. 3). Мы проверили, что значения функции $\Phi_{l,k}$ в соседних вершинах с гранью A меньше, чем на грани A. Согласно теории линейного (а значит, и дробно-линейного) программирования это возможно, только если функция достигает максимума на грани A. Теорема доказана.

Для дальнейшего интересен случай задачи 1, в котором B — множество вершин простого n-мерного многогранника Δ, а функция i — индекс некоторой общей линейной функции на многограннике. Выразим максимум в задаче 1 в терминах H- и P-полиномов многогранника. Для $i = 0, \ldots, n$ положим $i^* = \min(i, n - i)$ и обозначим через $M_j(k, n)$ сумму

$$\sum_{j \leqslant i \leqslant n-j} C_{i^*}^k = C_{[(n+1)/2]}^{k+1} + C_{[(n+2)/2]}^{k+1} - 2C_j^{k+1},$$

в частности, $M_0(k, n) = C_{[(n+1)/2]}^{k+1} + C_{[(n+2)/2]}^{k+1}$. Для неотрицательного $k \leqslant [n/2]$ определим число $G_k(\Delta)$ формулой

$$G_k(\Delta) = \sum_{i \leqslant [n/2]} C_i^k H_i + \sum_{i > [n/2]} C_{n-i}^k H_i.$$

В терминах P-полинома эта формула принимает вид

$$G_k(\Delta) = \sum P_j M_j(k, n).$$

Утверждение 3. *В описанном случае задачи 1 максимум равен* $G_l(\Delta)/G_k(\Delta)$.

Доказательство немедленно вытекает из теоремы 3.

Задача 2. *Найти максимум функции*

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant q} P_j M_j(l, n) \Big/ \sum_{0 \leqslant j \leqslant q} P_j M_j(k, n)$$

при условии $P_0 > 0, P_1 \geqslant 0, \ldots, P_q \geqslant 0$.

Теорема 4. *При* $0 \leqslant l < k \leqslant q$ *максимум функции из задачи 2 равен* $M_0(l, n)/M_0(k, n)$ *и достигается при* $P_{l+1} = \ldots = P_q = 0$.

Доказательство. 1) Отношения $M_j(l, n)/M_j(k, n)$ с ростом j от k до q монотонно убывают. Действительно, согласно п. 1) утверждения 2, отношения C_m^l/C_m^k с увеличением j от k до q монотонно убывают. Теперь для доказательства достаточно несколько раз воспользоваться утверждением 1. 2) Отношения $M_j(l, n)/M_j(k, n)$ с ростом j от 0 до k монотонно убывают. Действительно, при возрастании j убывает числитель, а знаменатель остается неизменным. 3) Для завершения доказательства теоремы достаточно несколько раз воспользоваться утверждением 1.

Для целых k и j таких, что $0 < k \leqslant q$, $0 \leqslant j \leqslant q$, $q = [n/2]$, положим $N_j(k, n) = \sum_{j \leqslant i \leqslant n-j} C_i^k = C_{n+1-j}^{k+1} - C_j^{k+1}$, в частности, $N_0(k, n) = C_{n+1}^{k+1}$.

Задача 3. *Найти максимум функции*

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant q} P_j N_j(k, n) / \sum_{0 \leqslant j \leqslant q} P_j M_j(k, n)$$

при условии $P_0 > 0$, $P_1 \geqslant 0, \ldots, P_q \geqslant 0$.

Теорема 5. *При* $0 < k \leqslant q$ *максимум функции из задачи 3 равен* $N_0(k, n)/M_0(k, n)$ *и достигается при* $P_1 = \ldots = P_q = 0$.

Доказательство. 1) Отношение $N_j(k, n)/M_j(k, n)$ с уменьшением j от q до k монотонно возрастает. Действительно, при переходе от $j + 1$ к j к числителю прибавляется величина $C_{n-j}^k + C_j^k$, а к знаменателю величина $2C_j^k$. Отношение этих величин, равное $(1 + C_{n-j}^k/C_j^k)/2$, растет с уменьшением j. Каждое из них больше чем $N_q(k, n)/M_q(k, n)$. Отсюда и вытекает п. 1). 2) Отношение $N_j(k, n)/M_j(k, n)$ с уменьшением j от k до 0 монотонно возрастает — растет лишь числитель. 3) Для завершения доказательства теоремы достаточно несколько раз воспользоваться утверждением 1.

§ 4. Гиперплоские сечения простых многогранников

Цель § 4 — оценка снизу числа и доли k-мерных граней простого многогранника, которые останутся непересеченными гиперплоским сечением, не проходящим через его вершины многогранника.

4.1. Чуть пошевелив гиперплоскость, не проходящую через вершины, можно добиться, чтобы она стала поверхностью уровня $L = c$ общей линейной функции L на многограннике. Обозначим через $O(c)$ и $\Pi(c)$ множество вершин многогранника, в которых значение функции соответственно меньше и больше чем c. Объединение этих множеств совпадает с множеством вершин многогранника, так как гиперплоскость по условию не проходит через вершины.

Теорема 6. *Число $F_k(c)$ k-мерных граней в простом n-мерном многограннике, не пересекающихся с гиперплоскостью $L = c$, определяется формулой*

$$F_k(c) = \sum_{b \in O(c)} C_{i(b)}^k + \sum_{b \in \Pi(c)} C_{n-i(b)}^k. \qquad (*)$$

Доказательство. Множество k-мерных граней, непересекающихся с гиперплоскостью $L = c$, распадается на два подмножества: подмножество граней, на которых функия L строго меньше, чем c, и подмножество граней, на которых она строго больше, чем c. Число граней в первом множестве равно первому слагаемому. Для доказательства нужно сопоставить каждой грани из первого множества вершину, в которой ограничение функции L на эту грань достигает максимума, и посчитать, скольким граням соответствует одна вершина. (Аналогичное вычисление проведено при доказательстве теоремы 2.) Сопоставляя грани из второго множества точку минимума, убеждаемся, что число граней во втором множестве равно второму слагаемому. Теорема доказана. Скажем, что гиперплоскость, не проходящая через вершины простого n-мерного многогранника, удачно его рассекает, если она пересекает все грани размерности большей чем $[n/2]$.

Следствие 1. *Общая гиперплоскость $L = c$ удачно рассекает простой n-мерный многогранник, если и только если все вершины индекса, меньшего $n/2$, лежат в множестве $O(c)$, а все вершины индекса, большего $n/2$, лежат в множестве $\Pi(c)$.*

Доказательство получается применением теоремы 6 для $k = [n/2] + 1$.

С л е д с т в и е 2. *Общая гиперплоскость не пересекает некоторых $[n/2]$-мерных граней простого n-мерного многогранника.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вершина индекса $[n/2]$ дает ненулевой вклад в число $F_{[n/2]}(c)$ независимо от того, в каком из двух множеств $O(c)$ или $\Pi(c)$ она лежит.

З а м е ч а н и е. Утверждение следствия 2 справедливо и для непростых многогранников. Более того, для любой гиперплоскости, пересекающей выпуклый n-мерный многогранник, существуют две грани, лежащие по разные стороны от гиперплоскости, суммарная размерность которых $\geqslant (n - 1)$.

Т е о р е м а 7. *Пусть гиперплоскость $L = c$ не проходит через вершины простого n-мерного многогранника Δ. Тогда для $0 \leqslant l < k \leqslant [n/2]$ справедливы оценки $F_k(c) \geqslant G_k(\Delta)$ и $F_l(c)/F_k(c) \leqslant G_l(\Delta)/G_k(\Delta)$ (определение числа $G(\Delta)$ см. в § 3). Для удачного сечения многогранника все эти оценки точны. Обратно, если одна из этих оценок точна (для некоторого k или для некоторой пары l, k из указанного диапазона), то сечение удачно.*

Скажем, что простые многогранники F-эквивалентны, если они имеют одинаковое число граней каждой размерности.

С л е д с т в и е 3. *Для удачного сечения простого многогранника числа $F_k(c)$ и $F_l(c)/F_k(c)$ при $0 \leqslant l < k \leqslant n/2$ в классе общих сечений F-эквивалентных простых многогранников достигают соответственно минимума и максимума.*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 7. Теорема 6 вычисляет числа $F_k(c)$ в терминах множеств $O(c)$ и $\Pi(c)$. Разобьем множество вершин многогранника в объединение двух непересекающихся множеств O и Π и для каждого разбиения и неотрицательного числа $k \leqslant [n/2]$ определим число $F_k(O)$ формулой, аналогичной (*), в которой вместо множеств $O(c)$ и $\Pi(c)$ стоят соответственно множества O и Π. Ясно, что число $F_k(O)$ минимально для тех и только тех разбиений, для которых все вершины индекса, меньшего $n/2$, лежат в множестве O, а все вершины индекса, большего $n/2$, лежат в множестве Π. В точности для этих разбиений число $F_l(O)/F_k(O)$ максимально — это вытекает из теоремы 3. Для завершения доказательства осталось воспользоваться следствием 1.

4.2. П р и м е р ы. 1) Для выпуклого n-угольника на плоскости $H_0 = H_2 = 1$, $H_1 = n - 2$. Прямая, не проходящая через вершины n-угольника, не пересекает не менее $n - 2$ его сторон. Оценка достигает лишь для удачного сечения, т. е. лишь для сечения, пересекающего многоугольник. 2) Для простого трехмерного многогранника, имеющего B вершин P и ребер, $H_0 = H_3 = 1$, $H_1 = H_2 = n - 1$, где $n = P/3 = B/2$ (в частности, справедливо тождество $2P = 3B$). При $n = 1$ многогранник является симплексом, для $n \geqslant 2$ он F-эквивалентен призме с n-угольным основанием. Согласно теореме 7 плоскость, не проходящая через вершины простого трехмерного многогранника, пересекает не более $P/3 + 2$ его ребер. Наклоняя среднее сечение призмы, можно добиться, чтобы оно пересекало верхнее и нижнее основания и по-прежнему пересекало бы все боковые грани. При этом мы получим удачное сечение, для которого предъявленная оценка достигается. 3) Для n-мерного симплекса $H_0 = \ldots = H_n = 1$, $P_0 = 1$, $P_1 = \ldots = P_{[n/2]} = 0$. Сечение симплекса гиперплоскостью, по одну сторону от которой лежит ровно $[(n+1)/2]$ вершин, является удачным. Для этого сечения $F_k(c) = M_0(k, n)$. (При фиксированном k и $n \to \infty$ это число асимптотически равно $2^k n^{k+1}/(k+1)!$). Для любого другого сечения и $0 \leqslant l < k \leqslant [n/2]$ число $F_k(c)$ будет больше, а число $F_l(c)/F_k(c)$ будет меньше, чем для удачного сечения. 4) Рассмотрим в R^n стандартный куб, определенный неравенствами $0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \ldots, 0 \leqslant x_n \leqslant 1$. Гиперплоскость $x_1 + \ldots + x_n = c$, где c при нечетном n равно $n/2$, а при четном n равно $(n + 1)/2$, удачно рассекает куб. Посчитаем сколько k-мерных граней куба пересекает указанное сечение. Грань куба размерности k задается фиксацией для некоторых $n-k$ координат значений 0 или 1 (остальные координаты на этой грани пробегают все значения от 0 до 1). Чтобы грань пересекала сечение, нужно, чтобы среди фиксированных координат было m единиц, где $[n/2] \geqslant m > [n/2]-k$. Откуда имеем, что число $Q_{k,n}$ пересеченных k-мерных граней равно $C_n^k \Sigma C_{n-k}^m$, где суммирование ведется по числам m, удовлетворяющим выписанным неравенствам.

Согласно теореме 7 гиперплоское сечение не может пересекать больше чем $Q_{k,n}$ k-мерных граней простого многогранника, F-эквивалентного n-мерному кубу. Какая доля k-мерных граней при $k \sim c\sqrt{n}$ в многограннике F-эквивалентном n-мерному кубу может быть пересечена гиперплоскостью? Ответ: при $n \to \infty$ наибольшая величина этой доли стремится к $(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-c}^{c} \exp(-x^2/2)\,dx$ (асимптотика числа $Q_{k,n}/C_n^k 2^{n-k}$ при больших n определяется нормальным распределением).

4.3. Теорема 8. *Пусть гиперплоскость $L=c$ не проходит через вершины простого n-мерного многогранника и числа l, k удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant l < k \leqslant [n/2]$. Тогда доля k-мерных граней, непересеченных гиперплоскостью (т. е. число $F_k(c)/F_k$), не меньше чем $M_0(k, n)/N_0(k, n)$, а отношение числа непересеченных l-мерных граней к числу непересеченных k-мерных граней не больше чем $M_0(l, n)/N_0(k, n)$. Обе оценки точные и достигаются для удачного сечения симплекса, причем первая из оценок достигается лишь для этого случая.*

Следствие 4. *Общее сечение простого n-мерного многогранника не пересекает по крайней мере $(2^{-k}-\varepsilon_k(n))$-ю часть его k-мерных граней (при фиксированном k и большом n), где величина $\varepsilon_k(n)$ не зависит от выбора многогранника и его сечения и стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности.*

Для доказательства следствия 4 достаточно вычислить асимптотику оценки числа $F_k(c)/F_k$ при $n \to \infty$.

Замечание. Для непростых многомерных многогранников доля непересеченных k-мерных граней может быть как угодно мала.

Доказательство теоремы 8. Из теоремы 7 вытекают неравенства $F_k/F_k(c) \leqslant \Sigma P_j N_j(k, n)/\Sigma P_j M_j(k, n)$ и $F_l(c)/F_k(c) \leqslant \Sigma P_j M_j(l, n)/\Sigma P_j M_j(k, n)$, в которых суммирование ведется по j от 0 до $[n/2]$. Согласно теоремам 4, 5 выписанные отношения достигают максимума в случае $P_1 = \ldots = P_{[n/2]} = 0$, причем первое из них достигает максимума лишь в этом случае. Теорема 8 доказана, так как $P_1 = \ldots = P_{[n/2]} = 0$ только для симплекса.

Замечание. По F-полиному простого n-мерного многогранника можно оценить число k-мерных граней у его общего сечения плоскостью коразмерности l. Рассмотрим простой $(n-l)$-мерный многогранник, у которого число k-мерных граней при $k \geqslant (n-l)/2$ равно F_{k+l}. (Числа граней младших размерностей у такого многогранника находятся по теореме Дена — Зоммервиля.) *Число граней любой размерности у сечения не превосходит числа граней той же размерности у рассмотренного многогранника.* Частный случай этого утверждения доставляет следующая гипотеза о верхней границе [8]: среди всех простых m-мерных многогранников, имеющих N граней старшей размерности, многогранник двойственный к циклическому, имеет наибольшее число граней любой размерности. Действительно, многогранник, имеющий N граней старшей размерности, является сечением $(N-1)$-мерного симплекса. А число k-мерных граней многогранника двойственного к циклическому, при $k \geqslant m/2$, как известно, как раз равно числу $(k+N-1-m)$-мерных граней симплекса. Для доказательства приведенного утверждения нужно переформулировать теорему 6. Пусть $H^{<c}$ полином $\Sigma f_k^{<c}(t-1)^k$, где $f_k^{<c}$ — число k-мерных граней, лежащих в полупространстве $L < c$. Тогда полином $H^{<c}$ равен $\Sigma h_i(c)\, t^i$, где $h_i(c)$ число вершин индекса i, лежащих в полупространстве $L < c$. Аналогично определяется и вычисляется полином $H^{>c}$. Теорема 6 заключается в этих вычислениях и равенстве $H = H^{<c} + H^{>c} + H^c(t-1)$, где H^c H — полином сечения $L = c$. Полиномы $H^{<c}$ и $H^{>c}$ имеют неотрицательные коэффициенты, откуда имеем неравенство: все коэффициенты ряда Лорана в точке ∞ функции $H(t-1)^{-1} - H^c$ неотрицательны. Обозначим через $H[l]$ H — полином сечения коразмерности l. Продолжая по индукции получаем, что все коэффициенты ряда Лорана в точке ∞ функции $H(t-1)^{-l} - H[l]$ неотрицательны. Это соотношение эквивалентно сформулированному утверждению.

4.4. Каждый результат § 4 имеет аналог в категории торических многообразий. Вот «словарь» для перевода в торическую категорию: простой многогранник — гладкое (или квазигладкое) кэлерово торическое многообразие; открытая k-мерная (над R) грань многогранника — k-мерная (над C) орбита многообразия; грань многогранника, принадлежащая другой его грани,— орбита на многообразии, принадлежащая замыканию другой орбиты; F-, H- и P-полиномы многогранника — F-, H- и P-полиномы многообразия; линейная функция на многограннике — гамильтониан векторного поля на торическом многообразии, соответствующего действию однопараметрической подгруппы вещественного тора $T^n \subset (C \setminus 0)^n$; общая линейная функция — морсовский гамильтониан; сечение, не проходящее через вершины,— поверхность неособого уровня гамильтониана. Для примера переведем в торическую категорию следствие 4.

С л е д с т в и е 4′. *На гладком n-мерном кэлеровом торическом многообразии поверхность неособого уровня гамильтониана, соответствующего действию любой однопараметрической подгруппы из T^n, не пересекает по крайней мере $(2^{-k} - \varepsilon_k(n))$-ю часть k-мерных орбит, где величина $\varepsilon_k(n)$ не зависит от выбора многообразия и однопараметрической подгруппы и стремится к нулю при $n \to \infty$.*

Для доказательства следствия 4′ достаточно воспользоваться следствием 4 и отображением момента. Аналогично переводятся в торическую категорию и остальные утверждения.

§ 5. Средняя сложность граней многогранника

В этом параграфе обобщается оценка В. В. Никулина.

5.1. Число всевозможных пар, состоящих из l-мерной грани и содержащей ее k-мерной грани многогранника Δ, обозначим через $F_{l,k}(\Delta)$. Это число можно интерпретировать как суммарное число l-мерных граней у k-мерных граней многогранника. Средним числом l-мерных граней на k-мерной грани многогранника Δ называется отношение этого числа к числу $F_k(\Delta)$ всех k-мерных граней многогранника. Насколько большим может быть это отношение для n-мерных многогранников? Покажем, как редуцировать вопрос к задаче меньшего числа измерений. Пусть $L = c$ — гиперплоскость, не параллельная ни одному ребру выпуклого n-мерного многогранника Δ. С каждой вершиной b многогранника Δ свяжем пару, состоящую из $(n-1)$-мерного многогранника $\Delta(b)$ и его гиперплоского сечения $L(b)$. Эта пара определена с точностью до проективного преобразования. Вот ее определение. Около вершины b многогранник Δ представляет собой выпуклый n-мерный конус. Пара $\Delta(b)$, $L(b)$ суть проективизация пары, состоящей из этого конуса и его сечения гиперплоскостью, проходящей через вершину конуса параллельно гиперплоскости $L = c$.

Обозначим через $F_{l,k}(\Delta(b), L(b))$ число всех пар, состоящих из l-мерной грани, не пересекающейся с гиперплоскостью $L(b)$, и любой содержащей ее k-мерной грани многогранника $\Delta(b)$, через $F_k(\Delta(b), L(b))$ — число всех k-мерных граней многогранника $\Delta(b)$, не пересекающихся с гиперплоскостью $L(b)$.

Теорема 9 (о редукции). 1) *Для* $k \leqslant (n+1)/2$ *среднее число вершин на* k*-мерной грани многогранника* Δ *не превосходит числа* $\max 2F_{k-1}(\Delta(b))/F_{k-1}(\Delta(b), L(b))$. 2) *Для* $0 < l < k \leqslant (n+1)/2$ *среднее число* l*-мерных граней на* k*-мерной грани многогранника* Δ *не превосходит числа* $\max F_{l-1, k-1}(\Delta(b), L(b))/F_{k-1}(\Delta(b), L(b))$. *В* 1) *и* 2) *максимум берется по множеству всех вершин* b *многогранника* Δ.

Доказательство. И числитель и знаменатель дроби $F_{l,k}(\Delta)/$ $/F_k(\Delta)$ представим в виде суммы неотрицательных чисел по множеству вершин B многогранника Δ. Для этого каждой паре $\Gamma_l \subset \Gamma_k$ (каждой грани Γ_k) сопоставим две вершины, в которых функция L, ограниченная на грань Γ_l (ограниченная на грань Γ_k), достигает максимума и минимума. При $k > 0$ эти вершины совпадают лишь для пар, состоящих из вершины ($l = 0$) и содержащей ее k-мерной грани. Просуммировав по вершинам число сопоставленных им объектов, получим: $2F_{l,k}(\Delta) = \Sigma F_{l-1,k-1}(\Delta(b), L(b))$ при $l > 0$, $F_{0,k}(\Delta) = \Sigma F_{k-1}(\Delta(b))$, $2F_k(\Delta) = \Sigma F_{k-1}(\Delta(b), L(b))$. При $k \leqslant (n+1)/2$ числа $F_{k-1}(\Delta(b), L(b))$ положительны (см. следствие 2 и замечание в § 4; теорему 9 мы будем использовать лишь в случае простых многогранников $\Delta(b)$). Для завершения доказательства осталось воспользоваться утверждением 1 из § 3.

Лемма Никулина [2]. *Среднее число* l*-мерных граней на* k*-мерной грани простого* n*-мерного многогранника при* $0 \leqslant l < k \leqslant (n+1)/2$ *не превосходит числа* $C_{n-l}^{n-k}(C_{[n/2]}^{l} + C_{[(n+1)/2]}^{l})/(C_{[n/2]}^{k} + C_{[(n+1)/2]}^{k})$.

Действительно, для простого многогранника все многогранники $\Delta(b)$ — — $(n-1)$-мерные симплексы. Поэтому теорема 9 сводит лемму Никулина к легкой задаче о симплексе(ср. пример из п. 4.2).

Выпуклый n-мерный многогранник называется *простым в ребрах*, если каждое его ребро содержится ровно в $n - 1$ грани старшей размерности.

Теорема 10. *Оценка из леммы Никулина справедлива для многогранников, простых в ребрах.*

Доказательство. Для каждой вершины b многогранник $\Delta(b)$ прост — это вытекает из простоты в ребрах исходного многогранника Δ. Согласно редукционной теореме достаточно для простых многогранников $\Delta(b)$ оценить отношение числа $(l-1)$-мерных граней, непересекающихся с гиперплоскостью $L(b)$, к числу $(k-1)$-мерных граней, непересекающихся с этой гиперплоскостью (каждая $(l-1)$-мерная грань лежит ровно в C_{n-l}^{n-k} $(k-1)$-мерных гранях) и отношение числа всех $(k-1)$-мерных граней к числу $(k-1)$-мерных граней, непересекающихся с гиперплоскостью $L(b)$. Эти оценки даются теоремой k. Теорема 10 доказана.

5.2. Из леммы Никулина и теоремы 10 вытекает следующее:

Утверждение. 1) *При* $0 \leqslant l < k \leqslant (n+1)/2$ *среднее число* l*-мерных орбит, лежащих в замыкании* k*-мерной орбиты квазигладкого проективного* n*-мерного торического многообразия, не превосходит числа* $C_{n-l}^{n-k}(C_{[n/2]}^{l}\, C_{[(n+1)/2]}^{l})/C_{[n/2]}^{k} + C_{[(n+1)/2]}^{k})$. 2) *Оценка из* 1) *остается справедливой, если квазигладкость многообразия нарушается в изолированных точках.*

§ 6. Приложение к геометрии Лобачевского

Докажем теорему 1, сформулированную в начале статьи. Рассмотрим фундаментальный многогранник группы, порожденной отражениями в пространстве Лобачевского. Известно, что если такой многогранник имеет конечный объем, то он прост в ребрах и *почти прост*, т. е. около каждой вершины является конусом над произведением симплексов (простота может нарушаться лишь в бесконечно удаленных вершинах многогранника). Скажем, что для n-мерного многогранника справедлива оценка Никулина до размерности m, если выполняется оценка из леммы Никулина для любых l, k таких, что $0 \leqslant l < k \leqslant m$. Используя идеи В. В. Никулина и Э. Б. Винберга, М. Н. Прохоров примерно год назад доказал следующую теорему [5].

Теорема Прохорова. *В пространстве Лобачевского размерности* >995 *не существует дискретных групп, порожденных отражениями, с фундаментальным многогранником конечного объема, для которого справедлива оценка Никулина до размерности* 4.

М. Н. Прохорову удалось также доказать, что любой почти простой многогранник (при $n \geqslant 5$) удовлетворяет оценке Никулина до размерности 3, однако его метод доказательства не переносится на большие размерности. Лемма Никулина и теорема 10, равным образом применимы как в евклидовой геометрии, так и в геометрии Лобачевского. Этот факт вытекает из существования модели Клейна геометрии Лобачевского. Сопоставляя теорему Прохорова с теоремой 10, получаем доказательство теоремы 1.

Замечание. Теорема 10 для почти простых многогранников имеет элементарное доказательство, так как для произведения симплексов возрастание к середине коэффициентов H-полинома очевидно (для общих простых многогранников пока неизвестно элементарное доказательство этого факта).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никулин В. В.* Об арифметических группах, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1980, т. 44, с. 637—669.
2. *Никулин В. В.* О классификации арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1981, т. 45, с. 113—142.
3. *Винберг Э. Б.* Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности.— Функцион. анализ и его прил., 1981, т. 15, вып. 2, с. 67, 68.
4. *Винберг Э. Б.* Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности.— Труды ММО, 1984, т. 47, с. 68—102.
5. *Прохоров М. Н.* Отсутствие дискретных групп отражений с некомпактным фундаментальным многогранником конечного объема в пространствах Лобачевского большой размерности.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1986, т. 50, № 2, с. 320—332.
6. *McMullen P.* The number of faces of simplicial polytopes.— Israel J. Math., 1971, v. 9, p. 559—570.
7. *Billera L. J.*, *Lee C. W.* Sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial convex polytopes.— Bull. Amer. Math. Soc. (New Series), 1980, v. 2, p. 181—185.
8. *Stanley R.* The number of faces of a simplicial convex polytope.— Adv. Math., 1980, v. 35, p. 236—238.
9. *Sommerville D. M. Y.* The relations connecting the angle-sums and volume of polytone in space of n dimensions.— Proc. Roy. Soc. London, ser. A115, 1927, p. 103—119.
10. *Kempf G.*, *Knudsen F.*, *Mumford D.*, *Saint-Donat B.* Toroidal embedding. I.— Lect. Notes Math., 1972, № 339.
11. *Данилов В. И.* Геометрия торических многообразий.— УМН, 1978, т. 33, вып. 2.
12. *Atiyah M. F.* Convexity and commuting hamiltonians.— Bull. London Math. Soc., 1982, v. 14, p. 1—15.
13. *Guillemin V.*, *Sternberg S.* Convexity properties of the moment mapping.— Invent. math., 1982, v. 67, p. 491—513.
14. *Steenbrink J. H. M.* Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology.— Math. Institut Amsterdam, 1976.

ВНИИ системных исследований
ГКНТ и АН СССР

Поступило в редакцию
11 июня 1985 г.