СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXV МАЙ — ИЮНЬ 1984

УДК 513.61+517.92

А. Г. ХОВАНСКИЙ

ЦИКЛЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ И ТЕОРЕМА РОЛЛЯ

В работе показано, что циклы плоских динамических систем с полиномиальными векторными полями во многом похожи на овалы алгебраических кривых, а более общие «разделяющие решения» таких систем — на общие алгебраические кривые. Например, для разделяющих решений справедлив аналог теоремы Безу. Доказательства несложны. Они основаны на предлагаемом ниже варианте теоремы Ролля и теореме Безу для плоских алгебраических кривых.

Отметим, что согласно гипотезе Гильберта общее число предельных циклов динамической системы с полиномиальным векторным полем оценивается сверху по степени поля. Из справедливости гипотезы и результатов настоящей заметки вытекает, что кривая, состоящая из всех предельных циклов полиномиальной динамической системы, напоминает алгебраическую кривую. В настоящее время не доказана даже конечность числа предельных циклов: Ю. С. Ильяшенко показал, что доказательство Дюлака [1] содержит невосполнимый пробел (см. [2]).

1. Теорема Ролля для динамических систем

Рассмотрим гладкую динамическую систему на плоскости

$$\dot{x}=F(x);\quad x=x_1,\ x_2;\quad F=F_1,\ F_2. \tag{1}$$

Определение. Ориентированная гладкая (возможно, несвязная) кривая на плоскости называется *разделяющим решением* динамической системы, если а) кривая состоит из траекторий системы (с естественной ориентацией траекторий), б) кривая не проходит через особые точки системы, в) кривая является границей некоторой области на плоскости с естественной ориентацией границы.

Пример 1. Цикл динамической системы всегда является ее разделяющим решением: он ориентирован либо как граница внутренней области по отношению к циклу, либо как граница внешней области.

Пример 2. Некомпактная траектория, уходящая в бесконечность при $t\to+\infty$ и при $t\to-\infty$, является разделяющим решением.

Компонента связности любого разделяющего решения является либо циклом, либо уходящей в бесконечность при $t\to\pm\infty$ некомпактной траекторией.

Пример 3. Линия неособого уровня функции $H(x_1, x_2)=c$, ориентированная как граница области $H(x_1, x_2)>c$, является разделяющим решением системы Гамильтона $\dot{x}_1=\frac{\partial H}{\partial x_2}$, $\dot{x}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_1}$.

Определение. *Точкой контакта* кривой и динамической системы на плоскости называется точка кривой, в которой касательный вектор к кривой и вектор динамической системы коллинеарны.

Справедлива следующая

Теорема 1 (теорема Ролля для динамических систем на плоскости). *Пусть у непрерывной кривой (т. е. у образа интервала или окружности при непрерывном отображении в плоскость) в каждой точке су-*

ществует касательный вектор. Тогда между двумя точками пересечения кривой с разделяющим решением динамической системы есть точка контакта.

Обычные теоремы Ролля, Лагранжа и Коши получаются из теоремы 1 в случае динамической системы с постоянным векторным полем.

В предложениях чаще нужна не сама теорема 1, а более простая

Лемма 1. *Теорема 1 справедлива для C^1-гладких кривых, трансверсально пересекающих разделяющее решение.*

Доказательство. Пусть t_1 и t_2 — параметры двух последовательных трансверсальных пересечений кривой с разделяющим решением. Это решение делит плоскость на две (не обязательно связные) области: область U_1, ориентированной границей которой оно является, и дополнительную область $U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{U}_1$. Пусть для определенности в момент t_1 кривая входит в область U_1. Тогда в момент t_2 кривая выходит из области U_1. Поэтому упорядоченные пары векторов, состоящие из касательного вектора к кривой и вектора динамической системы, в моменты t_1 и t_2 определяют противоположные ориентации плоскости. Следовательно, в некоторый промежуточный момент касательный вектор и вектор динамической системы коллинеарны.

Замечание. Понятие точки контакта кривой с динамической системой введено Пуанкаре в мемуаре [3]. Лемма 1 близка к его теореме 10 (там же, с. 59), согласно которой дуга кривой, «поддерживающая» характеристику (там же, с. 17), имеет точки контакта с динамической системой. Лемма 1 основана на том, что дуга кривой, заключенная между ее последовательными трансверсальными пересечениями с разделяющим решением, обязательно поддерживает это решение.

Перейдем к доказательству теоремы 1. По сравнению с леммой 1 мы сталкиваемся с двумя осложнениями: во-первых, кривая может касаться разделяющего решения и, во-вторых, вектор скорости кривой может быть разрывен.

Сначала разберемся с первым осложнением. Пересечение кривой с разделяющим решением является замкнутым множеством. Дополнение этого множества распадается на (конечные или бесконечные) интервалы. Нам достаточно показать, что каждый конечный интервал такого рода содержит точку контакта. Пусть t_1 и t_2 — параметры концов такого интервала и t_1 предшествует t_2 в смысле ориентации кривой. Пусть для определенности при всех промежуточных значениях параметров кривая лежит в области U_1. Покажем, что существует близкий момент к моменту t_1, в который упорядоченная пара векторов, состоящая из касательного вектора к кривой и вектора динамической системы задает ту же ориентацию плоскости, что и при трансверсальном входе кривой в область U_1. Для этого выберем локальную систему координат около точки кривой с параметром t_1, в которой векторное поле динамической системы постоянно [4]. Пусть в этих локальных координатах y_1, y_2 область U_1 определяется неравенством $y_2 > 0$, динамическая система имеет вид $\dot{y}_1 = 1$, $\dot{y}_2 = 0$, разделяющее решение есть $y_2 = 0$, а кривая задается вектор-функцией $y_1(t)$, $y_2(t)$. По условию $y_2(t) > 0$ при $t > t_1$ (и $t < t_2$) и $y_2(t_1) = 0$. Поэтому в некоторый момент, близкий к t_1, производная функции $y_2(t)$ будет положительна. В этот момент упорядоченная пара векторов и задает нужную ориентацию плоскости. По тем же соображениям, существует близкий момент к моменту t_2, в который соответствующая пара векторов задает противоположную ориентацию.

Аналогично разбирается и второе осложнение. Если контакта не существует, то найдется точка кривой, в любой окрестности которой соответствующие пары векторов задают как одну, так и другую ориентацию плоскости, однако вектора ни в одной точке не коллинеарны. Чтобы убедиться в невозможности такой ситуации достаточно выпрямить векторное поле около этой точки и воспользоваться теоремой Дарбу (о том, что производная функции принимает все промежуточные значения). Теорема 1 доказана.

Замечание. Кривые с разрывной производной нам нигде не понадобятся. Они включены в теорему 1 с единственной целью — сделать очевидной взаимосвязь этой теоремы с теоремой Ролля. Напротив, случай касания в дальнейшем используется.

Следствие. *Пусть кривая, являющаяся гладким подмногообразием на плоскости, содержит не более чем N некомпактных* (и любое число компактных) *компонент связности и имеет не более чем k точек контакта с динамической системой. Тогда она имеет не более чем $N+k$ изолированных точек пересечения с любым разделяющим решением этой системы.*

Действительно, на компактной компоненте точек пересечения не больше, чем точек контакта. На некомпактной — точек пересечения может быть лишь на единицу больше, чем точек контакта.

2. Алгебраические свойства P-кривых

Определение. Кривая на плоскости называется P-*кривой степени n*, если существует ориентация этой кривой, при которой она является разделяющим решением динамической системы, компоненты векторного поля которой — полиномы степени n.

Гладкие плоские алгебраические кривые степени $n+1$ являются P-кривыми степени n (см. пример 3 п. 1). Таким образом, P-кривые — это обобщение вещественных алгебраических кривых. Мы покажем, что P-кривые обладают рядом свойств алгебраических кривых.

Теорема 2. *Ограничение многочлена степени m на* P-*кривую степени n имеет на ней не более $m(n+m)$ изолированных корней.*

Замечание 1. Если многочлен имеет неизолированные корни на компоненте связности P-кривой, то на этой компоненте он тождественно равен нулю, так как P-кривая аналитична.

Замечание 2. Возьмем траекторию динамической системы наматывающуюся на предельный цикл. Такая траектория не ограничивает области и не является P-кривой. Прямая линия, пересекающая цикл, счетное число раз пересекает такую траекторию.

Доказательству теоремы предпошлем следующее

Утверждение 1. *Пусть почти все значения непрерывной функции на гладкой кривой имеют не более N прообразов. Тогда каждое значение этой функции имеет не более N изолированных прообразов.*

Доказательство. Допустим, что среди прообразов значения a существует $N+1$ изолированная точка. Фиксируем вокруг этих точек малые непересекающиеся интервалы, в концах которых функция не равна a. Скажем, что прообраз положителен (отрицателен), если в обоих концах окружающего интервала функция больше (меньше) a (прообраз может быть и неположительным, и неотрицательным). Пусть для определенности число положительных прообразов не меньше числа отрицательных. Тогда для всех малых $\varepsilon > 0$ существует не менее чем $N+1$ прообраз значения $a+\varepsilon$. Противоречие доказывает утверждение 1.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть Q — многочлен степени m. Нам достаточно показать, что для почти всех значений a многочлен Q имеет не более чем $m(n+m)$ прообраз на P-кривой. По теореме Сарда для почти всех a уравнение $Q=a$ определяет гладкую кривую на плоскости, трансверсально пересекающую фиксированное разделяющее решение. Точка контакта кривой $Q=a$ и динамической системы (1) удовлетворяют полиномиальному соотношению

$$Q'_{x_2}F_1 + Q'_{x_1}F_2 = 0 \qquad (2)$$

степени $(n+m-1)$. Соотношение (2) либо задает алгебраическую кривую на плоскости, либо выполняется тождественно. В первом случае согласно теореме Безу кривая $Q=a$ для почти всех a имеет не более чем $m(n+m-1)$ точек пересечению с кривой (2). Кривая $Q=a$, как и всякая алгебраическая кривая степени m, имеет не более m некомпактных компонент. Поэтому согласно следствию из п. 1 она имеет не более чем $m(n+m)$ пересечений с разделяющим решением. Если соотношение (2) выполняется тождественно, то многочлен Q постоянен на траекториях динамической системы. В этом случае уравнение $Q=a$ вообще не имеет изолированных корней на разделяющем решении системы. Теорема 2 доказана.

Утверждение 2. *Оценка в теореме 2 не может быть улучшена более чем в три раза* (при $n>0$).

В доказательстве мы будем использовать лишь следующие факты: а) среди P-кривых степени n содержатся все гладкие алгебраические кривые степени $n+1$, б) среди P-кривых степени $n>0$ содержатся и неалгебраические кривые.

Оценка Безу числа точек пересечения вещественных алгебраических кривых точная. Поэтому в теореме 2 оценку нельзя сделать меньше, чем $A=m(n+1)$. С другой стороны, через любые $B=\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1$ точек плоскости можно провести алгебраическую кривую степени m. Выбрав эти точки на неалгебраической компоненте P-кривой, убеждаемся, что оценку в теореме 2 нельзя сделать меньше, чем B (исключение составляют здесь P-кривые степени 0 — все они являются прямыми линиями и не содержат неалгебраических компонент). Далее, при $m\leqslant 2n$ оценка из теоремы 2 меньше, чем $3A$, а при $m\geqslant 2n$ — меньше, чем $3B$.

Следствие 1. *P-кривая степени n имеет не более чем $n+1$ некомпактную компоненту.*

Доказательство. Несложно доказать (см. [7]) следующее утверждение: если у кривой, являющейся подмногообразием на плоскости, число трансверсальных пересечений с любой прямой не превосходит N, то кривая имеет не более чем N некомпактных компонент. Остается воспользоваться теоремой 2 для линейной функции.

Оценка из следствия 1 точная: существуют алгебраические кривые степени $n+1$ с $n+1$ некомпактной компонентой (простейший пример доставляет кривая, состоящая из параллельных прямых).

Следствие 2. *Все циклы динамической системы с полиномиальным полем степени 2 выпуклы*[1]

Доказательство. Для всякого невыпуклого овала существует прямая, пересекающая его не менее чем в четырех точках. По теореме 2 прямая может пересечь P-кривую степени 2 лишь в трех точках.

Замечание. Некомпактные траектории поля степени 2 могут быть невыпуклы. Например, некомпактная компонента алгебраической кривой степени 3 может оказаться невыпуклой. Касательная, проведенная к такой кривой в точке перегиба, пересекает ее ровно один раз. Несложно показать, что у любой траектории поля (не только P-кривой) степени 2 касательная к траектории в точке перегиба пересекает траекторию ровно один раз.

Следствие 3. *Ограничение многочлена степени m на P-кривую степени n имеет на этой кривой не более чем $(n+m-1)(2n+m-1)$ изолированных критических точек.*

Доказательство. Производная Ли полинома степени m вдоль полиномиального поля степени n является полиномом степени $n+m-1$. Нужная оценка получается теперь из теоремы 2.

[1] Как любезно указал рецензент настоящей заметки, этот результат не нов: он принадлежит Тун Цзинь-Чжу (см. «Математика», периодический сборник переводов иностранных статей, 6 : 2, 1962 г., лемма 3 на с. 153).

Следствие 4. *P-кривая степени n имеет не более чем n^2 компактных компонент.*

Доказательство. Согласно следствию 3 линейная функция имеет не более $2n^2$ критических точек на P-кривой степени n. С другой стороны, на каждом овале у нее есть максимум и минимум.

Известны примеры алгебраических кривых степени $n+1$, имеющих $\frac{n(n-1)}{2}$ компактных компонент.

Следствие 5. *P-кривая степени n имеет не более* $(3n-1)(4n-1)$ *точек перегиба* (среди компонент P-кривой могут быть прямые линии).

Действительно, в точках перегиба траекторий векторного поля F вектора $\dot{x}=F(x)$ и $\ddot{x}=\frac{\partial F}{\partial x}(x)F(x)$ коллинеарны. В этих точках обращается в ноль определитель матрицы, строки которой — вектора F и $\frac{\partial F}{\partial x}F$. Для поля F степени n этот определитель является полиномом степени $3n-1$. По теореме 2 этот определитель имеет не более $(3n-1)$ $(4n-1)$ изолированных нулей на любом разделяющем решении системы $\dot{x}=F(x)$. Компоненты разделяющего решения, содержащие неизолированные нули определителя являются прямыми линиями.

Теорема 3. (Теорема Безу для P-кривых.) *Две P-кривые степеней n и m имеют не более $(n+m)(2n+m)+n+1$ изолированных точек пересечения.*

Доказательство. В точках коллинеарности полиномиальных полей F и G степеней n и m обращается в нуль многочлен Q степени $n+m$ — определитель матрицы со строками F и G. Пусть Γ — разделяющее решение системы $\dot{x}=F(x)$. Предположим дополнительно, что все нули многочлена Q на кривой Γ изолированы. Тогда согласно теореме 2 их число не превосходит $(n+m)(2n+m)$. Итак, кривая Γ имеет не более чем $(n+m)(2n+m)$ точек контакта с системой $\dot{x}=G(x)$. Число некомпактных компонент этой кривой не превосходит $n+1$ (следствие 1 п. 2). Поэтому число точек пересечения кривой Γ с любым разделяющим решением системы $\dot{x}=G(x)$ не превосходит $(n+m)(2n+m)+n+1$ (следствие из п. 1).

Вернемся к общей ситуации, когда многочлен Q может иметь неизолированные нули и, следовательно, может тождественно обращаться в нуль на некоторых компонентах кривой Γ. Такие компоненты кривой Γ являются траекториями системы $\dot{x}=G(x)$ и либо не пересекаются, либо совпадают с компонентами разделяющего решения этой системы. И в том, и в другом случае такие компоненты не дают никакого вклада в число изолированных точек пересечения двух разделяющих решений и никак не мешают проведенному вычислению. Теорема доказана.

Приведем еще одно утверждение, имеющее отношение к P-кривым.

Утверждение 3. *Пусть векторное поле степени n касается границы компактной области и на границе не обращается в ноль. Тогда эйлерова характеристика области по модулю не превосходит числа* $\frac{1}{2}(n^2+n)$.

Доказательство. Можно считать, что все особые точки поля конечнократны (в противном случае компоненты поля можно поделить на общий множитель). Обозначим через ind^+ суммарный индекс всех особых точек векторного поля на плоскости, имеющих положительный индекс, а через ind^- — отрицательный. Справедливы неравенства

$$ind^+ - ind^- \leqslant n^2,$$

$$|ind^+ + ind^-| \leqslant n.$$

Первое из неравенств вытекает из теоремы Безу, доказательство второго можно найти в [5]. В условиях утверждения 3 эйлерова характеристика области равна сумме индексов особых точек поля, лежащих внутри области. Нужная оценка теперь выводится из приведенных неравенств.

§ 3. Обобщения

Класс P-кривых можно обобщить следующим образом: можно допустить, чтобы среди траекторий, из которых состоит P-кривая, встречались особые точки. Примером таких обобщенных P-кривых являются обобщенные циклы. Другой пример доставляют особые алгебраические кривые. На обобщенные P-кривые без труда распространяются все утверждения настоящей заметки.

Существует и многомерное обобщение. Это обобщение состоит в построении обширного класса трансцендентных многообразий, похожих на алгебраические многообразия. Подобно тому как P-кривые получаются при решении полиномиальных дифференциальных уравнений, эти многообразия получаются при последовательном решении полиномиальных уравнений Пфаффа. Набросок построения можно найти в статьях [6, 7]. Подробное изложение скоро появится в печати.

Я признателен В. И. Арнольду, Е. И. Коркиной и рецензенту настоящей заметки за полезные обсуждения и ряд ценных замечаний.

Статья поступила
29 марта 1982 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дюлак Г.* О предельных циклах. М.: Наука. 1980.
2. *Ильяшенко Ю. С.* Особые точки и предельные циклы дифференциальных уравнений на вещественной и комплексной плоскости. Препринт НЦБИ АН СССР, Пущино, 1982.
3. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.— Л.: Гостехиздат, 1947.
4. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.
5. *Хованский А. Г.* Индекс полиномиального векторного поля.— Функцион. анализ и его прил., т. 13, вып. 1, с. 49—58.
6. *Хованский А. Г.* Об одном классе систем трансцендентных уравнений.— Докл. АН СССР, т. 255, № 4, 1980, с. 804—807.
7. *Khovanski A.* Theorema de Bezout pour les fonctions de Liouville, IHES/M/81/45, September 1981, 91440-Bures-sur-Yvette (France).