Deligne

THEOREME DE BEZOUT POUR LES FONCTIONS DE LIOUVILLE

par

A. KHOVANSKI

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35, route de Chartres
91440 - Bures-sur-Yvette (France)

September 1981
IHES/M/81/45

Les fonctions élémentaires fondamentales sont les fonctions que l'on rencontre dans l'enseignement secondaire. En voici la liste : les polynômes, exp x , sin x , cos , ln x , arc sin x , arc tg x , arc cos x. Les fonctions élémentaires de plusieurs variables sont les fonctions que l'on peut obtenir à partir de fonctions coordonnées et des fonctions élémentaires fondamentales, à l'aide des opérations arithmétiques, de la superposition, et des dérivations. Par exemple, la fonction

$$f(x,y) = \ln[\text{arc tg}(x+\exp \sin y)+x^y] \tag{1}$$

est une fonction élémentaire de deux variables. Ces fonctions s'écrivent sous la forme de formules du type de (1) qui peuvent être simples ou très compliquées.

Nous montrons ici que, sous certaines restrictions, un système de n équations élémentaires à n variables réelles a un nombre fini de racines, et que, plus les formules qui interviennent sont "raisonnables", plus la majoration que nous obtenons pour ce nombre est bonne.

Nous montrons aussi que pour des systèmes d'équations élémentaires d'un certain nombre de variables réelles, on a un analogue du Théorème de Bezout (selon lequel un système de n équations polynômiales à n variables complexes possède un nombre fini de racines isolées, et l'estimation donnée par Bezout est d'autant meilleure que le degré des polynômes est faible).

Il faut encore faire quelques restrictions sans lesquelles l'extention du théorème de Bezout ne peut être faite : ainsi l'équation simple

$$\sin x = 0$$

a une infinité de racines ! La solution la plus simple consiste à exclure totalement les fonctions sin et cos des fonctions élémentaires. Cette restriction est tout-à-fait suffisante. Bien sûr, nous supposons aussi que dans les formules du type $\ln f(x)$ ou $\text{arc sin } g(x)$ on sous-entend que l'on ne recherche les racines du système que dans les ouverts où $f(x) > 0$ ou $-1 \leq g(x) \leq 1$.

De plus nous supposons que le système (n équations à n inconnues) a seulement des racines isolées. Mais cette restriction est nécessaire dans le cas classique (Bezout).

Cependant , on regarde avec tristesse s'éloigner de la scène les merveilleuses fonctions $\sin x$ et $\cos x$! Alors gardons-les ! Mais on doit alors, au lieu de considérer le nombre de racines du système dans l'espace entier (qui peut être infini), ne considérer ce nombre que pour des racines contenues dans des ouverts particuliers. Ces ouverts sont construits en même temps que les fonctions, et dépendent de paramètres. Voici la règle pour les construire : si, dans le processus de construction de fonctions élémentaires on rencontre un terme $\sin f(x)$ ou $\cos f(x)$, il faut ne considérer les racines que dans l'ouvert $B < f(x) < A$, A et B étant des paramètres. Il faut aussi considérer que la formule est d'autant plus complexe que le nombre $[\frac{A-B}{\pi}]$ est grand. L'inclusion des fonctions $\sin x$ et $\cos x$ se révèle très utile et conduit à des applications aux systèmes d'équations algébriques [2] .

Notre rédaction est quelque peu informelle et de nombreux détails manquent. Ceci pour trois raisons :

1) Les idées principales sont ainsi plus apparentes .

2) Les raisonnements peuvent être facilement complétés en s'inspirant par exemple de [1] .

3) Nous publierons très prochainement la description formelle et précise d'une classe de fonctions encore plus grande et qui possède des propriétés analogues.

Mais donnons d'abord un résumé de la Théorie de Liouville. Cette théorie est très proche de la nôtre. On montre que les équations différentielles simples ne peuvent avoir que des solutions élémentaires simples (ou alors ce ne sont pas des fonctions élémentaires).

Des formules compliquées ne peuvent satisfaire à des équations simples. Plus précisément, si une formule compliquée satisfait à une équation simple, alors c'est qu'elle peut être simplifiée en une formule plus simple.

Le procédé de simplification repose sur l'introduction des paramètres de Liouville, qui nous sont très utiles. C'est pourquoi nous allons présenter sommairement la théorie de Liouville même si elle n'a pas d'intersection avec la nôtre.

§ 1. Résumé de la théorie de Liouville

1.1. Il existe de nombreuses manières légèrement différentes de définir une classe de fonctions élémentaires. Celle que nous considérons ici diffère quelque peu de celle que nous utiliserons dans la suite de l'article. Pour distinguer nettement cette classe, nous l'appellerons classe des fonctions de Liouville (Liouville a lui-même considéré de nombreuses classes de fonctions, par exemple celle que l'on obtient par quadratures,...)

Définition : Une fonction de Liouville est une fonction multivaluée d'une variable complexe, que l'on peut obtenir à partir de fonctions élémentaires (cf. leur liste plus haut) à l'aide d'opérations arithmétiques, de superpositions et de différentiations, ainsi que par l'intermédiaire de résolutions d'équations algébriques (dont les coefficients soient des fonctions de Liouville).

Ceci signifie que si f_1 et f_2 sont des fonctions de Liouville, les fonctions $f_1 f_2$, $f_1 \pm f_2$, $f_1 \circ f_2$, f_1/f_2 , et f_1' sont encore des fonctions de Liouville ; si f vérifie l'équation algébrique

$$f^n + f_1 f^{n-1} + \dots + f_n = 0$$

où les f_i sont des fonctions de Liouville, alors f est encore une fonction de Liouville.

<u>Remarque</u> : Il faut prendre quelques soins dans le calcul de fonctions multivaluées. Ainsi, il y a deux fonctions qui s'écrivent $\sqrt[2]{x} + \sqrt[2]{x}$: la fonction nulle et $2\sqrt[2]{x}$. Dans la définition précédente, il faut entendre "la somme de ...", par exemple comme "chacune des fonctions qui peuvent se réprésenter comme la somme..." .

1.2 Liouville remarque que pour construire les fonctions élémentaires d'une variable complexe, il suffit, outre les polynômes, de disposer de <u>deux</u> fonctions élémentaires : $\exp x$ et $\ln x$. Ainsi, on a par exemple

$$\cos x = \frac{1}{2}[\exp(ix) + \exp(-ix)]$$

$$\text{arc tg } x = \frac{1}{2i}[\ln \frac{i-x}{i+x}] \quad , \text{ etc..}$$

1.3 Liouville construit ensuite inductivement une classe de fonctions, pour laquelle il démontre qu'elle coïncide avec celle des fonctions de Liouville. Voici la construction :

a) Une fonction d'ordre zéro est une fonction algébrique d'une variable complexe.

b) Supposons construites les fonctions d'ordre k . Définissons les monômes d'ordre $(k+1)$: une fonction f s'appelle monôme d'ordre $(k+1)$ si elle n'est pas d'ordre inférieur ou égal à k et si elle s'écrit $\exp g$, ou bien $\ln g$, avec g fonction d'ordre k .

c) Une fonction f est dite fonction d'ordre $(k+1)$ si elle n'est pas d'ordre inférieur ou égal à k et si elle vérifie une équation algébrique de la forme

$$f^n + f_1 f^{n-1} + \ldots + f_n = 0$$

où les f_i sont des fonctions rationnelles de monômes d'ordre $k+1$ et de fonctions d'ordre $\leq k$.

Le théorème (de Liouville) affirme que les fonctions de Liouville, sont exactement les fonctions d'ordre fini (selon la construction précédente). La démonstration exige seulement de vérifier que la classe des fonctions d'ordre fini est fermée pour les opérations de superposition et al., ce qui n'est pas difficile.

1.4 Remarquons maintenant une circonstance tout à fait favorable : pour construire la classe des fonctionsd'ordre fini, nous pouvons nous passer de l'opération de superposition (dont le caractère non-différentiel algébrique est gênant) : en effet, la fonction

$$y = \exp f(x)$$

peut être définie comme la solution de l'équation différentielle

$$y' = f'y$$

la fonction

$$y = \ln f$$

comme celle de

$$y' = f'/f$$

C'est miraculeux !

Si au départ nous étions partis de la fonction gamma d'Euler, nous n'aurions rien pu faire avec les monômes $\Gamma(f(x))$; la fonction $\exp\Gamma(x)$ satisfait l'équation

$$y' = \Gamma\cdot y$$

mais la fonction $y = \Gamma(\exp x)$ ne vérifie aucune équation différentielle algébrique.

1. Ecriture économique

Par définition, une fonction d'ordre k s'écrit

$$y(x) = F(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_N) \quad , \tag{2}$$

F étant une fonction algébrique de $m+N$ variables, y_i des monômes d'ordre k et z_j des fonctions de Liouville d'ordre $< k$.

Une écriture économique de (2) est une formule du type (2) comportant le nombre minimal m de monômes (parmi toutes les représentations possibles).

1.1 Principe de Liouville : Toute relation algébrique

$$\phi(y_1, \ldots, y_m, u_1, \ldots, u_p) = 0 \tag{3}$$

reliant entre eux des monômes d'ordre k, $y_1, \ldots, y_m$ d'une écriture économique d'une fonction y et des fonctions d'ordre inférieur $u_1, \ldots, u_p$ doit être une identité par rapport aux premiers m arguments, i.e. la fonction (x fixe)

$$f(y_1, \ldots, y_m) = \phi(y_1, \ldots, y_m, u_1(x), \ldots, u_\rho(x)) \tag{3'}$$

est identiquement nulle.

En effet, si (3) n'était pas une identité, par exemple par rapport au premier argument, alors la fonction $y_1(x)$ s'exprimerait algébriquement à l'aide des fonctions $y_2,\dots,y_m$, $u_1,\dots,u_p$, ce qui permettrait de diminuer le nombre des monômes dans une écriture économique de $y(x)$.

1.2 L'outil de la théorie de Liouville qui nous sera le plus utile est l'utilisation des paramètres de Liouville. Voici un exemple sur un énoncé dû à Liouville, et sa démonstration, pour montrer ce que sont ces paramètres.

Théorème de Liouville : Si l'intégrale d'une fonction algébrique $v(x)$ est une fonction de Liouville, i.e. $y = \int^x v(x)dx$ est de Liouville, alors elle s'écrit

$$(4) \qquad y(x) = y_o(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln y_i(x)$$

où les y_i sont des fonctions algébriques univaluées sur la surface de Riemann de la fonction $v(x)$, i.e.

$$y_i(x) = R_i(x,v(x)) \qquad ,$$

R_i étant des fonctions rationnelles.

Corollaire : Aucune différentielle de premier type n'admet d'intégrale qui soit une fonction élémentaire. En effet, il est facile de vérifier que si y est du type de (4), la forme dy a nécessairement des singularités sur la surface de Riemann de v .

1.3 Idée de démonstration : Soit

$$(5) \qquad y = F(y_1,\dots,y_m \; ; \; z_1,\dots,z_N)$$

une représentation minimale de l'intégrale de v ,

$$y' = v(x)$$

où les y_i sont des monômes d'ordre k , les z_j des fonctions élémentaires d'ordre strictement inférieur. Montrons d'abord qu'il ne peut y avoir de monômes exponentiels d'ordre k . Supposons que

$$y_1 = \exp f_1(x) \quad .$$

1.4. <u>Paramètre de Liouville pour les exponentielles</u>. Montrons dans ce cas que pour toute valeur du paramètre t la fonction

$$y(x,t) = F(t\, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x), \ldots, z_N(x)) \tag{6}$$

est aussi une intégrale de v, i.e.

$$y'(x,t) = v(x) \quad .$$

En effet, en dérivant (5) on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} \cdot \dot{f}_1 \; y_1 + \sum_{i>1} \frac{\partial F}{\partial y_i} \, y_i' + \sum \frac{\partial F}{\partial z_i} \cdot z_i' = v(x) \quad . \tag{7}$$

Remplaçons dans (7) l'expression des y_i :

si

$$y_i = \exp(f_i) \longrightarrow \dot{f}_i y_i$$

$$y_i = \ln f_i \longrightarrow \dot{f}_i / f_i \quad .$$

Une fois ceci fait, la formule (7) devient une relation algébrique entre les k-monômes $y_1, \ldots, y_m$ et les fonctions d'ordre inférieur.

D'après le principe de Liouville cette relation doit être une identité en y_1. Pour t fixé, posons

$$y_1 = t\, y_1(x) \quad ,$$

cette fonction vérifie encore la relation

$$y_1' = \dot{f}_1 y_1 \quad .$$

Donc dans (7) on obtient que $y(x,t)$ est encore une fonction intégrale de v, donc

$$y(x,t) = \varphi(t) + F(y_1(x), z_2(x), \ldots, z_N(x)) \quad . \tag{8}$$

En dérivant (8) par rapport à t et pour $t = 0$

(9) $$\frac{\partial F}{\partial y_1} y_1 = C$$

ce qui nous donne encore une relation algébrique entre $y_1,\ldots,y_k$ et des fonctions d'ordre inférieur. D'après le principe de Liouville la relation (9) donne une identité en y_1, i.e.

(10) $$\frac{\partial F}{\partial y_1}(y_1,y_2,\ldots,z_N)y_1 \equiv C$$

en intégrant on obtient

$$F(y,y_2,\ldots) = C_1 \ \ln y_1 + F(y_o,y_2,\ldots) \quad .$$

Mais $y_1 = \exp f_1$, d'où une élimination de y_1 dans F.

$$F = C_1 f_1 + F(y_o,y_2(x),\ldots) \quad .$$

1.5. Paramètre de Liouville pour le logarithme

Supposons maintenant que

$$y_1 = \ln f_1$$

est un monôme logarithmique d'ordre supérieur. Considérons la fonction

(11) $$y(x,t) = F(y_1(x) + t\ ,\ y_2(x),\ldots) \quad .$$

Un raisonnement analogue montre que pour t fixé, la fonction $y(x,t)$ est encore une intégrale de $v(x)$, i.e.

(12) $$y(x,t) = \varphi(t) + F(y_1(x),\ldots) \quad .$$

En dérivant (12) par rapport à t, et posant $t = 0$, on obtient

(13) $$\frac{\partial F}{\partial y_1} \cdot \dot{f}_1/f_1 = C$$

qui doit être une identité (d'après le principe de Liouville). En intégrant (13) on se convainc que les monômes logarithmiques d'ordre supérieur ne peuvent apparaître dans F que sous une forme linéaire.

1.7 Fin de la démonstration : Nous avons ainsi montré qu'une intégrale élémentaire doit nécessairement avoir la forme

$$y(x) = \Sigma\, \alpha_i \ln f_i(x) + \varphi(z_1,\ldots,z_N)$$

où les fonctions f_i et z_j sont d'ordre inférieur à k . Un raisonnement analogue montre qu'une représentation minimale des fonctions f_i qui apparaissent sous le signe "ln" ne peut contenir de monômes exponentiels ou logarithmiques de plus haut degré. Donc les fonctions f_i sont algébriques les fonctions z_j ne sont pas d'ordre supérieur à celui des f_i et donc sont aussi algébriques. Un raisonnement algébrique simple montre que les fonctions f_i et $\varphi(z_1,\ldots,z_N)$ sont univaluées sur la surface de Riemann de $v(x)$.

1.8 Voici en quelques mots le schéma de la théorie de Liouville. Supposons qu'une équation différentielle simple ait une solution y compliquée - faisant intervenir des fonctions d'ordre élevé. Alors, si dans la formule pour y

$$y = F(y_1,\ldots,y_k,\ldots)$$

on place $t \exp f_1(x)$ à la place du monôme exponentiel de plus haut degré $y_1 = \exp f_1(x)$, on doit encore obtenir une solution de l'équation différentielle. Sinon l'équation conduit à une relation algébrique par rapport à ce monôme, et on peut l'éliminer de l'écriture de y .

De même en ajoutant t au monôme logarithmique de poids le plus élevé on obtient à nouveau une solution de l'équation. Ceci permet de se débarasser des monômes de degrés élevés et de simplifier l'expression de la solution de l'équation différentielle jusqu'à ce qu'elle prenne une forme simple.

2. Estimation générale du nombre de solutions d'un système d'équations

On présente ici un schéma tout-à-fait général de majoration du nombre de racines d'un système d'équations à n inconnues à partir du nombre de racines d'un système auxiliaire d'équations à $(n+1)$ inconnues.

En général, la majoration du nombre de racines de ce système est très compliquée et ce schéma ne donne rien. Il faut choisir de manière très adéquate l'inconnue supplémentaire. Pour des équations construites avec les fonctions élémentaires cette méthode s'applique très bien. Une méthode de choix dans la direction de celui des paramètres de Liouville sera indiquée plus loin. Soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application lisse de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Nous voulons estimer le nombre de préimages du point 0, c'est-à-dire

$$\mu = \mathrm{card}(F^{-1}(0)) .$$

Considérons une application arbitraire

$$\tilde{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

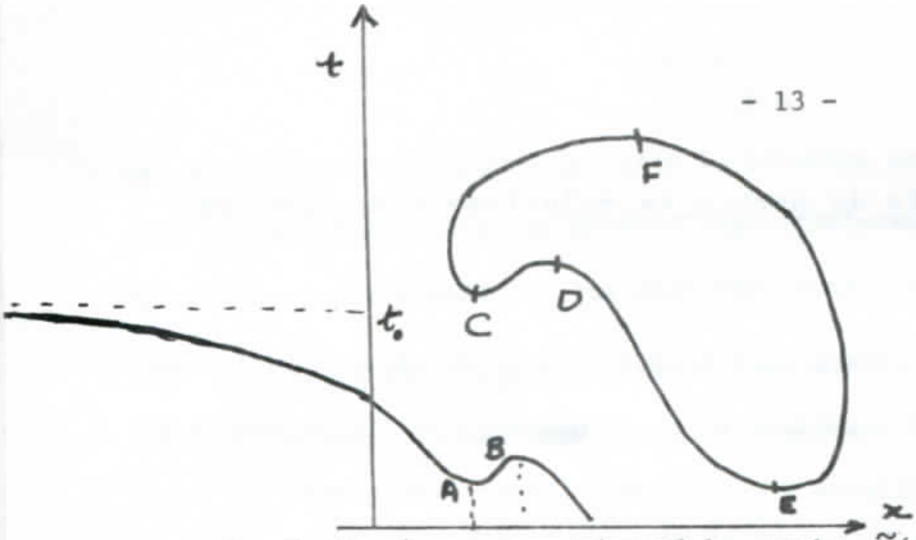
$$\tilde{F}(x,0) \equiv F(x)$$

Supposons $\tilde{F}^{-1}(0)$ lisse, et ayant au plus m composantes non-compactes.

<u>Théorème</u> : Le nombre de solutions du système $F(x) = 0$ ne dépasse pas de plus de m le nombre de solutions du système

$$\begin{cases} \tilde{F}(x,t) = 0 \\ \det \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x,t) = 0 \end{cases}$$

<u>Preuve</u> : Ce théorème résulte essentiellement du lemme de Rolle. Il est très intuitif et j'illustre sa preuve géométriquement :



<u>courbe</u> $\widetilde{F}(x,t) = 0$

Sur le dessin on a représenté la courbe $\widetilde{F}(x,t) = 0$. Pour chaque t fixé, on a le système $\widetilde{F}(x,t_1) = 0$;la courbe $\widetilde{F}(x,t) = 0$ peut être considérée comme le résultat du mouvement des racines de ce système quand t varie. A un moment, il peut arriver des bifurcations des racines ; ou bien la naissance de deux racines (points A,C,E) ou bien deux racines peuvent se joindre et disparaître (B,D,F) ou encore une racine peut partir à l'infini pour t fini (t_o) ou encore une racine peut naître à partir de l'infini en un temps fini. Appelons ligne de vie le chemin d'une racine de sa naissance (à l'infini ou en un point fini) à sa mort (idem). Il y a sept lignes de vie sur la figure (la composante compacte en contient trois et l'aut quatre). Il est clair que le nombre de racines du système $F(x,t_1) = 0$ en un temps t quelconque, n'est pas supérieur au nombre de lignes de vie, et ce nombre est exactement égal au nombre de naissances et de morts (en une partie finie de l'espace) plus le nombre de composantes de la courbe. En effet comptons le nombre de bouts (finis ou infinis) de lignes de vie. D'une part il y en a deux fois plus que de lignes de vie. D'autre part, chaque composante non-compacte a deux bouts à l'infini, mais en un point fini de naissance ou de mort, convergent deux bouts finis de lignes de vie. Pour achever la démonstration, il reste à remarquer que le nombre de naissances et de morts finies est égal au ,nombre de solutions du système

$$\begin{cases} \widetilde{F}(x,t) = 0 \\ \det \dfrac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(x,t) = 0 \end{cases} .$$

En effet, en une confluence de racines, le déterminant de la matrice de Jacobi doit s'annuler.

<u>Lemme</u> : Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe lisse. Si le nombre d'intersections transverses de Γ avec une hypersurface quelconque ne dépasse pas m , alors la courbe a au plus m composantes non-compactes.

<u>Preuve</u> : Supposons qu'existent $(m+1)$ composantes non-compactes. Associons à chaque composante non-compacte deux points sur la sphère unité. L'un est un point-limite de l'ensemble des $\frac{x}{\|x\|}$ sur la courbe dans une direction, l'autre dans l'autre (Figure).

On obtient $2(m+1)$ points sur la sphère (avec multiplicité). Faisons passer par 0 un hyperplan ne contenant aucun de ces points. L'une des demi-sphères contient au moins $(m+1)$ points. Si maintenant on déplace l'hyperplan parallèlement à lui-même du côté de cette demi-sphère et assez loin, il rencontrera la courbe au moins $(m+1)$ fois, ce qui contredit l'hypothèse.

<u>Remarque</u> : On ne peut pas appliquer directement le lemme pour majorer le nombre de composantes de $\widetilde{F}(x,t) = 0$ (dans les hypothèses du Théorème) : parmi les hyperplans il y a l'hyperplan $t = 0$, qui rencontre la courbe $\widetilde{F}(x,t) = 0$ justement selon le nombre cherché. Cependant, le lemme peut être utile. Pour l'appliquer dans l'espace (x,t) il faut faire un changement astucieux de coordonnées, et appliquer le lemme à la courbe transformée.

3. <u>Majoration du nombre de solutions d'un système de quasi-polynômes</u>

<u>Théorème</u> (cf. [1]) Considérons un système de n équations à n variables réelles $x = x_1,\ldots,x_n$, $P_1 = \ldots = P_n = 0$ dans lequel les P_i sont des polynômes de degré m_i de $n+k$ inconnues x,y ; $y = y_1,\ldots,y_k$, où

$y_i = \exp < a_j, x >$, $j = 1,\ldots,k$. Le nombre de solutions non-dégénérées de ce système est fini et au plus égal à

$$m_1 \ldots m_n \; (\Sigma\, m_i + 1)^k \; 2^{k(k-1)/2} \quad .$$

<u>Preuve</u> : Nous raisonnons par récurrence sur k . Le premier pas de la récurrence est le théorème de Bezout. Remarquons que ce théorème est valide pour un nombre quelconque d'inconnues. Pour faire la preuve par récurrence nous diminuerons le nombre k , mais augmenterons le nombre d'inconnues et le degré des équations. Supposons donc connue l'estimation du nombre de solutions d'un système de quasipolynômes pour un nombre d'inconnues quelconque, contenant k exponentielles. Soit

$$(1) \qquad \begin{array}{l} P_1(x,y_1,\ldots y_k,y) = 0 \\ \vdots \\ P_n(x,y_1,\ldots,y_k,y) = 0 \end{array}$$

où

$$y_i = \exp < a_i, x >$$

$$y = \exp < a, x >$$

un système de n équations à n inconnues, contenant $(k+1)$ exponentielles. On note n_i le degré du i-ième polynôme et

$$(2) \qquad F(x,y(x)) = 0$$

ce système. Introduisons un paramètre t dans le système en posant

$$\widetilde{F}(x,t) = F(x,t\;y(x)) \quad .$$

D'après le théorème (§ 2) le nombre de solutions du système (2) ne dépasse pas le nombre de solutions du système

$$\tilde{F}(x,t\ y(x)) = 0$$

$$\det \frac{\partial \tilde{\tilde{F}}}{\partial x}(x,t\ y(x)) = 0$$

à $(n+1)$ variables x,t , ajouté au nombre de composantes non-compactes de la courbe $\tilde{F}(x,t\ y(x)) = 0$.

Changement de variables dans l'espace (x,t) : Effectuons dans l'espace (x,t) un changement de variables. Les nouvelles variables (x,u) se définissent comme suit à partir des anciennes :

$$u = t \exp \langle a,x \rangle = t\ y(x)$$

ou

$$t = u \exp \langle -a,x \rangle \quad .$$

Montrons que dans les nouvelles coordonnées le système (1) prend une forme plus simple : il ne contient que k exponentièlles. En effet, calculons les dérivées partielles des fonctions $f_i(x) = P_i(x,y_1(x),\ldots,y_k(x),t\ y(x))$.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j} + \Sigma \frac{\partial P_i}{\partial y_\ell}\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j} + \frac{\partial P_i}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x_j} \quad .$$

Mais $y_\ell = \exp \langle a_\ell, x \rangle$

$y = \exp \langle a,x \rangle$.

Donc $\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j} = a_\ell^j\, y_\ell$ et $\frac{\partial y}{\partial x_j} = a^j y$. Donc $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ est un polynôme de $x,y_1,\ldots y_k$ et de $u = ty$ et son degré est au plus égal à m_i . Donc dans ces nouvelles variables $\det \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}$ sera un polynôme en $x,y_1,\ldots,y_k$ et en u dont le degré sera au plus égal à $\sum_{i=1}^{n} m_i$.

Avec ces nouvelles coordonnées (x,u) le lemme du § 2 permet de majorer le nombre de composantes non-compactes de la courbe $\tilde{F}(x,t\ y(x)) = 0$. Il est au plus égal au nombre de solutions du système $\tilde{F}(x,u) = 0$, $\ell(x,u) = \ell_1 x_1 + \ldots + \ell_n x_n + \ell u + \ell_o = 0$. Donc le nombre de solutions du système $P_i(x_1 y_1,\ldots,y_k,y) = 0$ est majoré par le nombre de solutions du système

$$P_i(x,y_1,\dots,y_k,u) = 0$$

$$\ell(x,u)\ \text{dét}\ \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial y}(x,u) = 0$$

de degré $m_1,\dots,m_n$, $\sum_{i=1}^{n} m_i+1$, qui contient moins d'exponentielles (mais plus d'inconnues $x_1,\dots,x_n,u$) . La récurrence est pratiquement achevée. Il reste à terminer le calcul. En éliminant par le même procédé une autre exponentielle, nous aboutissons à un système de quasipolynômes de degrés $m_1,\dots,m_n$, $(\Sigma\ m_i+1)$, $\Sigma\ m_i + (\Sigma\ m_i+1) + 1 = 2(\Sigma\ m_i+1)$ etc. Finalement nous obtenons un système d'équations polynômiales de $(n+k)$ variables de degrés $m_1,\dots,m_n$, $\Sigma\ m_i + 1$, ... $2^{k-1}(\Sigma\ m_i+1)$.

D'après le théorème de Bezout, le nombre de solutions du système est au plus égal à

$$m_1\times\dots\times m_n \left(\sum_{i=1}^{n} m_i+1\right)^k 2^{k(k-1)/2} .$$

Ceci achève la démonstration.

<u>Remarque</u> : La preuve n'est pas vraiment achevée. Il manque un point essentiel : après introduction du paramètre t le système peut devenir (très) dégénéré, et la récurrence est bloquée. Il faut donc prendre quelques précautions. La preuve complète comprend encore une déformation supplémentaire du système et le recours à Sard. Les détails sont rédigés dans [1] .

4. Une variante de l'estimation du nombre de racines d'un système d'équations

Il nous sera utile d'avoir un schéma légèrement plus général de l'estimation du nombre des racines que celui du §2. Nous nous plaçons dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application lisse d'un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$

dans $\mathbb{R}^n$. Nous voulons à présent estimer le nombre des préimages de 0 . Considérons une application lisse quelconque $\widetilde{F} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ telle que

$$\widetilde{\mathbb{F}}\,(x,0) = F(x) \quad \text{dans} \quad \mathcal{U} \quad .$$

Soit W un ouvert tel que $\overline{W} \subset V$ et $(x,0) \in W \Longleftrightarrow x \in \mathcal{U}$ et que $\overline{W} \setminus W$ soit une variété de dimension n , à un ensemble de dimension $< n$ près. $\{\widetilde{F}(x,t) = 0\}$ est supposé lisse, et transversal à ∂W .

<u>Théorème</u> : Le nombre de solutions du système $F(x) = 0$ dans $\mathcal{U}$ ne dépasse pas le nombre de solutions de

$$\widetilde{F}(x,t) = 0 \ \text{dét}\ \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial x}(x,t) = 0$$

dans l'ouvert W , ajouté à la moitié du nombre de points d'intersection de la courbe $\widetilde{F}(x,t) = 0$ avec la frontière de l'ouvert W , et de la moitié du nombre de "bouts à l'infini" de la courbe

$$\widetilde{F}(x,t) = 0 \quad .$$

<u>Lemme</u> : Si le nombre d'intersections transverses d'une courbe Γ contenue dans W avec un hyperplan quelconque ne dépasse pas m , alors la courbe Γ a au plus "2m bouts à l'infini".

<u>Preuve</u> : Celles de ce lemme et du théorème qui le précède miment les arguments du paragraphe 2.

5. Estimation du nombre de solutions d'un système de quasi-polynômes trigonométriques

Théorème : Considérons un système de n équations à n variables réelles $x_1,\dots,x_n$.

$$P_1 = \dots = P_n = 0$$

dans lequel les P_i sont des polynômes de degrés m_i de $n+k+2\rho$ variables réelles x,y,u,v ;

$$y = y_1,\dots,y_k \qquad v = u_1,\dots,v_\rho$$
$$u = u_1,\dots,u_\rho$$

et $$y_j = \exp < a_j,x > \quad j = 1,\dots,k$$

et

$$u_q = \sin < b_q,x >$$
$$v_q = \cos < b_q,x > , \; q = 1,\dots,\rho \qquad .$$

Le nombre de solutions non-dégénérées de ce système dans l'ouvert défini par

$$|<b_q,x >| < \pi|_2 \quad , \quad q = 1,\dots,\rho$$

est borné et ne dépasse pas

$$m_1 \dots m_n \, (\Sigma \, m_i+\rho+1)^{(\rho+k)} \, 2^{\rho+\frac{(\rho+k)(\rho+k-1)}{2}} \qquad .$$

Preuve : La récurrence porte sur le nombre de sinus et de cosinus. A la première étape on a un système ne contenant pas de sinus et de cosinus, mais contenant deux variables qui apparaissent de manière polynomiale, et reliées par des relations polynomiales.

Supposons le théorème démontré pour un système contenant ρ paires de sinus et de cosinus. Considérons un système avec $(\rho+1)$ paires sin et cos :

$$P_i(x,y,u_1,v_1,\dots,u_\rho,v_\rho,u,v) = 0 \quad , \quad i = 1,\dots,n$$

$$x = x_1,\dots,x_n \qquad y = y_1,\dots,y_k \quad .$$

$$y_j = \exp\langle a_j,x\rangle \qquad j = 1,\dots,k$$

$$u_q = \sin\langle b_q,x\rangle$$

$$q = 1,\dots,\rho$$

$$v_q = \cos\langle b_q,x\rangle$$

et

$$u = \sin\langle b,x\rangle$$

$$v = \cos\langle b,x\rangle$$

restreintes par

$$-\frac{\pi}{2} < \langle b_q,x\rangle < \pi/2 \qquad q = 1,\dots,\rho \text{ et } -\pi/2 < \langle b,x\rangle < \pi/2$$

Introduisons un paramètre t dans le système de la manière suivante :

Posons

$$P_i(x,t) = P_i(x,y_1(x),\dots,u_1(x),v_1(x),\dots,u_\rho(x),v_\rho(x))$$

$$\sin(\langle b,x\rangle+t) = 0$$

$$\cos(\langle b,x\rangle+t) = 0 \quad .$$

Considérons dans l'espace-temps (x,t) l'ouvert

$$-\pi/2 < \langle b,x\rangle + t < \pi/2$$

avec les restrictions complémentaires

$$-\pi/2 < \langle b_q,x\rangle < \pi/2 \quad , \quad q = 1,\dots,\rho \quad .$$

Dans cet ouvert introduisons de nouvelles coordonnées :

<u>Changement de coordonnées en</u> (x,t) : Effectuons un changement de variables. Les nouvelles variables (x,u) s'expriment de la manière suivante à partir

des anciennes

$$u = \sin(< b,x > + t)$$

Les anciennes variables s'expriment à partir des nouvelles (dans l'ouvert)

$$t = \arc\sin u - < b,x > \quad .$$

L'ouvert est défini dans les nouvelles coordonnées par

$$-1 < u < 1 \quad ; \; -\pi/2 < < b_q,x > \; < \pi/2 \; ,$$

$$q = 1,\ldots,\rho \quad .$$

Appliquons maintenant le théorème de 4. Il faut remarquer que le jacobien du système, soit $\det \frac{\partial P(x,t)}{\partial x}$ est un polynôme de degré au plus égal à $\Sigma\, m_i$ en les variables x,y,u_i,v_i,u,v où

$$v = \sin(< b,x > +t) \quad .$$

Les variables u,v sont reliées par la relation

$$u^2 + v^2 = 1 \quad .$$

Ainsi on obtient le système

$$\begin{aligned} &P_i = 0 \\ &\det \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ &u^2 + v^2 = 1 \end{aligned}$$

en les variables x,u,v , et ce système contient moins de termes trigonométriques. Les solutions qui nous intéressent appartiennent à l'ouvert

$$-\pi/2 \; < \; < b_q,x > \; < \pi/2 \quad .$$

Le nombre de solutions de tels systèmes est majoré par hypothèse de récurrence. Il reste à majorer le nombre de bouts finis et infinis de la courbe $P(x,t) = 0$.

Dans les nouvelles coordonnées les bouts finis sont définis par les intersections avec

$$\begin{aligned} &< b_q, x > = \pi/2 \\ &< b_q, x > = -\pi/2 \end{aligned} \qquad q = 1,\dots,\rho \quad .$$

Le nombre de bouts "infinis" est majoré par le double du nombre d'intersections de $P(x,u) = 0$ avec un hyperplan arbitraire. Ainsi le nombre de solutions du système est majoré par le nombre de solutions du système

$$u^2 + v^2 = 1$$

$$P_i(x,\dots) = 0$$

$$(*) \qquad \ell \cdot \ell_1 \dots \ell_\rho \ \text{dét} \frac{\partial P}{\partial x}(x,u) = 0$$

où $\ell,\dots \ell_\rho$ sont des fonctions linéaires de (x,u,v). On a ajouté deux variables (u,v) au système, et une équation du second degré, ainsi que l'équation (*) qui est de degré $\leq \Sigma\, m_i + \rho + 1$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence.

Pour obtenir la formule du théorème, il faut faire les remarques suivantes : l'équation $u^2 + v^2 = 1$ va augmenter le degré de tous les jacobiens par 1 et non par 2, puisqu'il n'y apparaît pas de terme exp , sin , cos . On peut en dire autant des équations

$$u_i^2 + v_i^2 = 1$$

qui vont apparaître dans les étapes successives de la récurrence. De plus, il vaut mieux éliminer d'abord sin , cos , et ensuite exp (si on opère dans l'autre sens, l'estimation obtenue est légèrement moins bonne) en éliminant $\sin < b,x >$ et $\cos < b,x >$ nous éliminons en même temps les "murs"

$\langle b,x\rangle = \pm\pi/2$.

Ceci achève la démonstration (modulo la même remarque qu'à la fin du §3) .

6. Fonctions élémentaires de plusieurs variables réelles

Considérons l'ensemble des fonctions élémentaires réelles, i.e. des fonctions qui sont les fonctions coordonnées de $\mathbb{R}^n$, des fonctions élémentaires d'une variable (exp, ln , sin , arc sin , cos, arc cos , tg , arc tg) et de la famille engendrée par superposition et opérations arithmétiques.

Cette famille sera automatiquement close par différentiation. La formule

$$\varphi(z) = \ln f(x)$$

signifie qu'on considère la fonction φ uniquement dans

$$\{x;f(x) > 0\}$$

Des remarques analogues s'appliquent à arc sin $f(x)$, arc cos $f(x)$, $f(x)/g(x)$.

Construction d'une classe de fonctions élémentaires réelles :

a) Une fonction d'ordre 0 est une fonction rationnelle de plusieurs variables, i.e.

$$P(x)/Q(x) \quad .$$

(P,Q polynômes). Cette fonction est définie dans $Q(x) \neq 0$. De notre point de vue, x et x^2/x diffèrent : la seconde n'étant pas définie en 0 .

Supposons définies les fonctions d'ordre k . Définissons des fonctions d'ordre $k+1$.

b) une fonction g du type

$$\left.\begin{array}{l} \exp f(x) \\ \ln f(x) \\ \sin f(x) \\ \arcsin f(x) \\ \cos f(x) \\ \arccos f(x) \\ \operatorname{arc\,tg} f(x) \end{array}\right. \quad \text{avec } f \text{ fonction d'ordre } k$$

et telle que g n'est pas une fonction d'ordre $\leq k$ et s'appelle monôme d'ordre $k+1$. Son domaine de définition est le sous-ensemble de celui de f qui permet d'effectuer la superposition correspondante. Par exemple $g(x) = \ln f(x)$ est définie dans $\{x \,;\, f(x) > 0\}$

c) Une fonction g qui n'est pas d'ordre $\leq k$ et qui se représente sous la forme P/Q , où P et Q sont des fonctions rationnelles de monômes d'ordre k et de fonction d'ordre inférieur s'appelle fonction d'ordre $k+1$. Son domaine de définition est le sous-ensemble défini par les domaines de définition qui interviennent , et par $Q \neq 0$.

d) Une fonction élémentaire est une fonction d'ordre fini.

e) Structure des fonctions élémentaires : On voit apparaître des données discrètes et des données continues. Les coefficients des fonctions rationnelles sont des nombres quelconques, mais le degré des polynômes, le nombre et l'ordre des superpositions exp , ln , ... sont des données discrètes. La famille des données discrètes qui interviennent dans la définition d'une fonction f s'appellera complexité de f .

7. Estimation du nombre de solutions d'un système d'équations élémentaires

Des équations élémentaires très simples peuvent avoir une infinité de racines :

$$\sin x = 0 \quad !$$

Nous définissons un domaine réduit dans lequel de tels phénomènes ne se produisent pas. De tels ouverts sont construits en même temps que les fonctions élémentaires et dépendent de paramètres. Supposons déjà définis ces ouverts pour les fonctions d'ordre k , et définissons-les pour les fonctions d'ordre $k+1$. Pour les monômes $\sin f(x)$ et $\cos f(x)$, c'est l'ouvert du domaine déjà défini pour f , défini par

$$B < f(x) < A \quad ,$$

A et B étant des paramètres.

Pour les autres monômes d'ordre $k+1$ ($\exp f(x)$, $\ln f(x)$,... c'est l'ouvert défini par l'ensemble des points déjà définis pour f , mais où f est positive. Pour des fonction f d'ordre $(k+1)$, c'est le sous-ouvert défini par l'intersection des domaines de définition des monômes qui interviennent dans f , et par $Q \neq 0$, où

$$f = P/Q \quad .$$

<u>Complexité d'une fonction élémentaire dans le domaine de définition</u> :
C'est une caractéristique à la fois de la fonction et de son domaine d'existence. On la définit comme plus haut, mais chaque fois que l'on rencontre des monômes $\sin f(x)$, $\cos f(x)$, et une inégalité

$$B < f(x) < A$$

On ajoute à la complexité le nombre $[\frac{A-B}{\pi}]+1$.

Théorème : Le nombre de solutions non-dégénérées d'un système de n fonctions élémentaires à n variables réelles

$$f_1(x_1,\dots,x_n) = \dots = f_n(x_1,\dots,x_n) = 0$$

(dans l'intersection des domaines de définition des f_i) est fini et peut être majoré en fonction de la famille des complexités des fonctions f_i .

Schéma de preuve : La preuve se fait encore par récurrence et selon l'ordre des fonctions f_i . Pour des fonctions d'ordre zéro le Théorème est un corollaire de Bezout. Supposons le théorème démontré pour des f_i d'ordre $\leq k$, et considérons un système où les f_i sont d'ordre $\leq k+1$. Pour de telles fonctions, on établit une récurrence sur le nombre des monômes d'ordre $k+1$ qui apparaît dans f_i . On élimine peu à peu les monômes d'ordre $k+1$, selon la procédure déjà rencontrée (§3. et §5.).

1) Elimination d'un monôme exponentiel : Soit $F(x,y(x)) = 0$ une système d'équations élémentaires où on a le monôme $y = \exp f(x)$. Introduisons le paramètre t par

$$F(x,t) = F(x,t\ y(x)) \quad .$$

En utilisant le théorème des §2 et 4. on simplifie le système par le changement de coordonnées $(x,t) \longrightarrow (x,u)$, $u = t \exp f(x)$, (cf. §3.).

2) Elimination des monômes $\sin f(x)$ et $\cos f(x)$: On suppose que le domaines de définition est

$$B < f(x) < A$$

Remplaçons $[B,A]$ par des segments $[B_i,A_i]$ de longueur $< \pi$ de manière que le nombre des segments ne dépasse pas $[\frac{A-B}{\pi}] + 1$.

Il suffit d'estimer le nombre de solutions sur chacun des segments $B_i < f(x) < A_i$. Posons $g(x) = f(x)-c_i$, $c_i = \frac{A_i+B_i}{2}$. Considérons une majoration du nombre de racines de systèmes avec les monômes $\sin g(x)$, $\cos g(x)$ et les restrictions

$$-\pi/2 < g(x) < \pi/2 \quad .$$

Soit $F(x,u(x),v(x)) = 0$ un système d'équations élémentaires où apparaissent les monômes

$$u = \sin g(x)$$
$$v = \cos g(x) \quad .$$

Introduisons un paramètre t par

$$P(x,t) = F(x,\sin(g(x)+t), \cos(g(x)+t)) \quad .$$

En utilisant le théorème de §4. on simplifie le système à l'aide du changement de coordonnées

$$(x,t) \longrightarrow (x,u) \quad \text{où} \quad u = \sin(g(x)+t) \ .$$

On fait disparaître les monômes $\sin g(x)$ et $\cos f(x)$, (on ajoute les variables u, v reliées par $u^2+v^2 = 1$) . cf. §5.

3) <u>Eliminations des monômes $\ln f(x)$, $\operatorname{arc\,tg} f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$.</u>

Soit $F(x,y(x)) = 0$ un système d'équations où apparaît $y(x) = \ln x$. On introduit dans ce système le paramètre t par $P(x,t) = F(x,y(x)+t)$.

On utilise le théorème 4. Le système obtenu se simplifie grâce au changement de coordonnées

$$< x,t > \longleftrightarrow < x,u > \quad ,$$

où $u = \ln\left[f(x)\right]+t$.

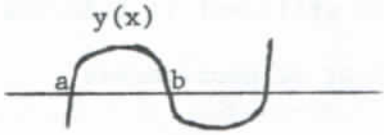
De la même façon on introduit un paramètre t pour les autres fonctions. Les fonctions $\ln f(x)$, $\operatorname{arc\,tg} f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$ ont des dérivées plus simples (qui sont des fonctions d'ordre k). L'addition d'un paramètre t ne change pas ces dérivées.

8. Généralisations et applications

1) Généralisation de la classe de fonctions : Je n'ai pas cherché la plus grande généralité , au contraire. Chaque classe de fonctions a ses théorèmes de finitude. Bien entendu, tout ce qui précède s'applique aux fonctions répré-sentables par quadratures (une variante unidimensionnelle est traitée dans [2]) .

Il existe une extension plus générale. Entre l'introduction des solutions d'équations différentielles du 1er et 2ème ordre, il y a une différence fondamentale.

Exemple : Soit $y' = P(x,y)$, P polynôme



En deux zéros voisins a et b de y la dérivée y' change de signe. Donc entre a et b , $f(x)=P(x,0)$ doit s'annuler. Donc le nombre des zéros de y est fini et au plus égal au degré de P .

Ceci n'a plus du tout lieu avec les équations du second ordre. L'équation très simple $y'' = y$ a pour solution $y = \sin x$ (cependant, cette fonction a pu être considérée parcequ'elle vérifiait une équation différentielle du premier ordre :

$$y' = \sqrt{1-y^2}$$

qui est tout-à-fait régulière dans

$$|\sin x| < 1$$

$$\text{i.e.} \quad -\pi/2 < x < \pi/2 \quad .$$

La généralisation des équations du 1er ordre est la classe des équations de Pfaff. Leur solution donne également lieu à la construction de fonctions non-oscillantes.

Supposons construites n fonctions de $(n+1)$ variables $F_i(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$. Supposons que $y(x_1,\ldots,x_n)$ satisfasse

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = F_i(x_1,\ldots,x_n,y) \ , \quad i = 1,\ldots,n \quad .$$

Alors y est considérée comme construite.

Cette méthode permet de construire une large classe de fonctions, plus grande que celle des fonctions élémentaires, et à laquelle s'appliquent les théorèmes de finitude [1] .

Nous donnerons prochainement des détails sur cette classe.

2) Généralisation de la classe d'équations : Il n'est pas nécessaire de ne considérer que des sytèmes de n équations à n inconnues, et leurs zéros non-dégénérés. On peut considérer par exemple un système de k équations $(k < n)$ définissant une variété lisse de dimension $(n-k)$. On peut montrer qu'une telle variété a le type d'homotopie d'un complexe fini et ce nombre peut être majoré par une fonction de la complexité du système (cf. [1]). On peut considérer des variétés singulières. Elles ont une stratification finie,.. On peut aussi considérer des inéquations. La situation est voisine de celle de l'algèbre, mais les variétés transcendantes sont semblables aux variétés algèbriques.

3) Applications : Les systèmes d'équations transcendantes de §3. et §5. ont des conséquences non-triviales en algèbre. (cf. [3]).

4) Problèmes : a) Quelle est "la plus grande classe" de fonctions réelles ayant des propriétés de finitude ? Peut-on par exemple, inclure la fonction

retour de Poincaré pour les équations différentielles d'ordre 1 ?

Cette question est très importante, par exemple pour majorer le nombre de cycles limites d'équations différentielles (Problème de Hilbert-Petrowsky). Il serait très intéressant plus généralement de construire de nouvelles classes de fonctions ayant ces propriétés de finitude.

b) A-t-on l'analogue du théorème de Tarski-Seidenberg ? L'image d'un ensemble élémentaire par une application élémentaire sera-t-elle élémentaire ?

Il serait également très intéressant de définir une classe de fonctions réelles et d'ensembles ayant cette propriété .

R E F E R E N C E S

[1] A. Khovansky, "Sur une classe de systèmes d'équations transcendantales". Doklady A.N.S. 1980, 25, 4, 804-807.

[2] O. Gelfond, A. Khovansky, "Sur les fonctions réelles de Liouville", Funct. An. 1980, 14, 2, p. 52-53.

[3] A. Khovansky, "Sur les racines complexes de systèmes d'équations algébriques ayant un petit nombre de monômes". C.R.A.S., Juin 1981.

A. Khovanski

Institute of System Research
29 Ryleeva
119034 Moscow
U.R.S.S.