Функциональный анализ и его приложения,
т. 14, вып. 2, 1980, 52—53.

УДК 517.51

О ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ЛИУВИЛЛЯ

О. А. Гельфонд, А. Г. Хованский

Вещественные рациональные функции $f(x)$ обладают следующим свойством конечности: всякое уравнение $f(x) = a$ имеет лишь конечное число решений. Покажем, что аналогичным свойством конечности обладают все вещественные функции Лиувилля.

Пусть U — конечный или бесконечный интервал на прямой $\mathbf{R}^1$. Введем вспомогательное определение. Скажем, что f есть $\Phi\, U$-функция если: 1) функция f определена и аналитична в области $U \setminus O(f)$, где $O(f)$ — конечное множество, 2) функция f имеет конечное число дискретных нулей в области $U \setminus O(f)$. На каждом интервале аналитичности функция либо имеет лишь дискретные нули, либо тождественно равна нулю. Поэтому *множество нулей всякой Φ U-функции состоит из конечного числа точек и конечного числа интервалов*. Ограничение $\Phi\, U$-функции на интервал $J \subseteq U$ есть ΦJ-функция. Пусть интервал U является объединением конечного числа интервалов J_i и конечного числа точек. Если ограничение функции f на любой интервал J_i является ΦJ_i-функцией, то функция f является ΦU-функцией. Произведение ΦU-функций есть ΦU-функция. Если ΦU-функция f не имеет нулевых интервалов, то определена функция f^{-1}, причем f^{-1} является ΦU-функцией. Интегралом и экспонентой интеграла от функции f будем называть любые решения уравнений $y' = f$ и $y' = fy$, аналитичные в точках аналитичности функции f. У всякой ΦU-функции интеграл и экспонента интеграла существуют, но определены неоднозначно: на каждом интервале аналитичности функции f к интегралу можно прибавлять любые константы, экспоненту интеграла можно умножать на любые константы. *Интеграл и экспонента интеграла ΦU-функции являются ΦU-функциями*. Действительно, по теореме Ролля число дискретных нулей интеграла от f на каждом интервале аналитичности функции f не более чем на единицу превосходит число ее дискретных нулей на том же интервале. Экспонента интеграла не имеет дискретных нулей на интервалах аналитичности функции. Сумма ΦU-функций и производная ΦU-функции могут уже не быть ΦU-функциями.

Определение. Дифференциальное кольцо A, состоящее из функций в области U с обычной операцией дифференцирования, *обладает свойством конечности* или является *ΦU-кольцом*, если кольцо A состоит только из ΦU-функций.

Кольца многочленов и рациональных функций дают примеры $\Phi\mathbf{R}^1$-колец. Ограничения функций из ΦU-кольца A на меньший интервал $J \subseteq U$ образуют ΦJ-кольцо. Обозначим его через $A(J)$. Пусть y — некоторая функция. Расширение $A[y]$ дифференциального кольца A элементом y — это наименьшее дифференциальное кольцо, содержащее кольцо A и элемент y. Кольцо $A[y]$ образовано многочленами с коэффициентами из кольца A от функции y и всех ее производных.

Теорема. *Пусть кольцо A обладает свойством конечности. В следующих случаях его расширение $A[y]$ тоже обладает свойством конечности*: I) *y — обратный элемент над A, т. е. $y = f^{-1}$, где $f \in A$*; II) *y — интеграл над A, т. е. $y' = f$, где $f \in A$*; III) *y — экспонента интеграла над A, т. е. $y' = fy$, где $f \in A$*.

Доказательство. I) Пусть $y = f^{-1}$, где $f \in A$. Кольцо $A[y]$ образовано элементами вида py^n, где $p \in A$. Функция py^n является произведением ΦU-функций и, следовательно, является ΦU-функцией. II) Пусть $y' = f$, где $f \in A$. Кольцо $A[y]$ образовано всеми многочленами P от y с коэффициентами из A. Предположим по индукции, что всякий многочлен степени $<k$ от любого интеграла y над всяким ΦV-кольцом B является ΦV-функцией. Рассмотрим некоторый многочлен $P = f_k y^k + \ldots + f_0$ степени k, где $f_i \in B$. Пусть $J_1, \ldots, J_l$ — те из интервалов аналитичности функции f_k, на которых f_k тождественно равна нулю, а $I_1, \ldots, I_m$ — остальные интервалы аналитичности этой функции. Ограничение функции P на интервал J_i является многочленом степени $<k$ от интеграла над ΦJ_i-кольцом $B(J_i)$. По индукционному предположению ограничение P является ΦJ_i-функцией. Ограничим теперь функцию P на интервал I_i и рассмотрим ее как многочлен над кольцом $B(I_i)[f_k^{-1}]$. По доказанному это кольцо является ΦI_i-кольцом. Элемент $Z = Pf_k^{-1}$ удовлетворяет над этим кольцом уравнению $Z = y^k + a_{k-1}y^{k-1} + \ldots + a_0$, где $a_i = f_i f_k^{-1}$. Положим $L = Z'$, тогда $L = b_{k-1}y^{k-1} + \ldots + b_0$, где $b_i = a_i' + (i+1)\, a_{i+1} f$. По индукционному предположению (примененному к кольцу $B(I_i)[f_k^{-1}]$) многочлен L степени $<k$ является ΦI_i-функцией. Функция Z есть ΦI_i-функция, как интеграл от ΦI_i-функции L. Далее, P есть ΦI_i-функция, как произведение ΦI_i-функций Z и f_k. Итак, ограничение функции P как на интервалы $I_1, \ldots, I_l$, так и на интервалы $J_1, \ldots, J_m$ обладает свойством конеч-

ности. Поэтому функция P обладает свойством конечности на интервале U. Индукционное доказательство закончено. III) Пусть теперь $y' = fy$, где $f \in A$. Этот случай аналогичен предыдущему. Индукция по степени k показывает, что всякий многочлен $P = f_k y^k + \ldots + f_0$ является ΦU-функцией. Для этого (в соответствующих кольцах) рассматриваются функции Z и $L = Z'$, где $Z = Pf_0^{-1} = a_k y^k + \ldots + 1$, $a_i = f_i f_0^{-1}$. Функция L равна $y\,(b_k y^{k-1} + \ldots + b_1)$, где $b_i = a_i' + i a_i f$. Многочлен Ly^{-1} имеет степень $<k$, а функция y является ΦU-функцией, как экспонента интеграла функции f. Это позволяет сделать индукционный шаг. Теорема доказана.

Кольцо $B \supseteq A$ называется *расширением Лиувилля кольца* A, если существует цепочка колец $A = A_0 \subseteq \ldots \subseteq A_n = B$, в которой каждое кольцо A_{i+1} получается из предыдущего кольца A_i присоединением обратного элемента над A_i, интеграла над A_i или экспоненты интеграла над A_i. Функция f называется *вещественной функцией Лиувилля*, если она лежит в некотором расширении Лиувилля кольца вещественных констант. Примеры функций Лиувилля: рациональные функции, e^x, $\ln|x|$, $|x|^\alpha$, $\operatorname{arctg} x$. *Класс вещественных функций Лиувилля замкнут относительно суперпозиций арифметических операций, интегрирований и потенцирований.*

Следствие. *Расширение Лиувилля ΦU-кольца есть ΦU-кольцо. В частности, всякая вещественная функция Лиувилля имеет лишь конечное число дискретных нулей. Функция с бесконечным числом дискретных нулей* (например, $\cos x$) *заведомо не может быть вещественной функцией Лиувилля.*

Замечание 1. Функцию Лиувилля можно характеризовать ее *сложностью*, т. е. числом арифметических операций, интегрирований и потенцирований, необходимых для получения функции из констант. Из наших рассуждений вытекает, что *число дискретных нулей функции Лиувилля оценивается сверху некоторой функцией от ее сложности*. Другими словами, *функция Лиувилля, определенная простой формулой, имеет мало нулей*. Интересно было бы получить более точные оценки такого рода.

Замечание 2. Функция $\cos x$ является функцией Лиувилля над кольцом комплексных констант $\mathbf{C}$: $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$, т. е. $\cos x$ лежит в расширении кольца $\mathbf{C}$ элементом e^{ix}, удовлетворяющим уравнению $y' = iy$. Отметим, что *комплексные функции Лиувилля* тоже *обладают специальными геометрическими свойствами* (см. [1]): *множество особенностей таких функций на комплексной прямой не более чем счетно, а группа монодромии разрешима.*

Замечание 3. По-видимому, нелиувилливость функции $\cos x$ над вещественными числами можно объяснить и с точки зрения дифференциальной теории Галуа [2]. Группа Галуа уравнения $y'' + y = 0$ над полем $\mathbf{R}$ есть окружность. Окружность не имеет нормальной башни подгрупп с фактор-группами, изоморфными либо аддитивной, либо мультипликативной группе поля $\mathbf{R}$. Для полного обоснования этого объяснения нужно несколько модифицировать дифференциальную теорию Галуа: она обычно строится для дифференциальных полей с алгебраически замкнутым полем констант.

Физический институт АН СССР
Всесоюзный научно-исследовательский
институт системных исследований АН СССР

Поступило в редакцию
12 ноября 1979 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Хованский А. Г., О представимости функций в квадратурах, УМН **XXVI**, вып. 3 (1971), 251—252. 2. Капланский И., Введение в дифференциальную алгебру, М., ИЛ, 1959.