1979 г. май—июнь т. 34. вып. 3(207)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМ. И. Г. ПЕТРОВСКОГО ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ

Заседание 30 сентября 1978 г.

1. Ф. Джон (США) «Разрушение решений неравенства $\Box u \geqslant u^2$ с тремя пространственными переменными».

Доклад посвящен отсутствию глобальных решений $u(x, t) = u(x_1, x_2, x_3, t)$ у дифференциального неравенства

$$\Box u \equiv u_{tt} - \Delta u \geqslant u^2 \text{ для } x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \tag{2}$$

имеющими компактные носители. Оказывается, что $u(x, t)$ либо перестает существовать, либо обращается в тождественный нуль при достаточно больших t. Более точно, имеет место следующая

Теорема. *Пусть u — решение класса C^3 задачи* (1), (2) *с начальными данными f, g, носители которых содержатся в шаре*

$$|x| \leqslant \rho. \tag{3}$$

Тогда $u(x, t)$ также имеет компактный носитель и обращается в нуль вне характеристического конуса

$$|x| + t \leqslant \rho. \tag{4}$$

Следствие. *Пусть $u(x, t)$ при $x \in \mathbb{R}^3, t \geqslant 0$ является решением класса C^3 дифференциального уравнения*

$$\Box u = F(u),$$

где функция F удовлетворяет неравенству $F(s) \geqslant s^2$ для всех вещественных s. Тогда u обращается в тождественный нуль, если начальные данные для u имеют компактные носители.

Примеры. а) Функция $u(x, t) = 6(t + 1)^{-2}$ является неразрушающимся решением уравнения $\Box u = u^2$. Однако здесь начальные данные не обладают компактными носителями.

б) Функция

$$u(x, t) = \begin{cases} ((\rho - t)^2 - |x|^2)^4 & \text{при } |x| + t < \rho, \\ 0 \text{ при } |x| + t \geqslant \rho \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $\Box u \geqslant u^2$. Носителем ее начальных данных служит множество (3), а носителем u является множество (4).

З а м е ч а н и е. Для более высоких размерностей аналогичная теорема неверна. С. Клайнерманом и В. Штрауссом доказано, что в случае, когда число пространственных переменных больше четырех, всякое решение уравнения $\Box u = u^2$ с начальными данными, которые имеют компактные носители и являются «достаточно малыми», существует при всех $t \geqslant 0$.

Заседание 2 октября 1978 г.

1 Ж. Л е р е (Франция) «Лагранжев анализ и квантовая механика».

За исключением самых простых случаев, физики не пользуются точными решениями $u(x)$ эволюционных задач. Обычно они обращаются к «асимптотическим решениям» вида

$$u(\nu,\ x)=\alpha(\nu,\ x)\,e^{\nu\varphi(x)}; \tag{1}$$

здесь «фаза» φ — вещественнозначная функция от $x \in X = \mathbb{R}^l$; «амплитуда» α — формальный ряд по степеням $1/\nu$:

$$\alpha(\nu,\ x)=\sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\,\alpha_r(x),$$

коэффициенты α_r которого являются комплекснозначными функциями от x; «частота» ν — чисто мнимый параметр. Дифференциальное уравнение

$$a\left(x,\ \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)u(\nu,\ x)=0, \tag{2}$$

описывающее эволюцию, удовлетворяется в том смысле, что его левая часть оказывается произведением $e^{\nu\varphi}$ на формальный ряд по степеням $1/\nu$, у которого равны нулю первые или все члены. Способ построения таких асимптотических решений давно считается классическим и называется методом ВКБ. Фаза φ удовлетворяет некоторому уравнению с частными производными первого порядка, нелинейному, если порядок исходного оператора отличен от единицы. Амплитуда α находится путем интегрирования вдоль характеристик уравнения первого порядка, определяющего φ. В квантовой механике, например, сначала проводят выкладки, считая, что $\nu = i/h$ ($2\pi h$ — постоянная Планка) — бесконечно большая величина, стремящаяся к $i\infty$; затем подставляют вместо ν его численное значение ν_0. Физики строят асимптотические решения задач о равновесии и периодических задач, заменяя, например, задачи волновой оптики задачами геометрической оптики. Однако φ испытывает скачок, а α приобретает особенности на огибающей характеристик, определяющих φ; например, в геометрической оптике — на огибающей световых лучей, т. е. на каустиках, которые являются образами источников света. Между тем, за каустиками геометрическая оптика пригодна.

Для вполне общей ситуации В. П. Маслов ввел индекс (его четкое определение принадлежит В. И. Арнольду), который описывает эти скачки фазы, и с помощью надлежащим образом примененного преобразования Фурье показал, что особенности амплитуды являются лишь кажущимися. Но он был вынужден наложить некоторые «условия квантования». Их формулировка исходит из того, что ν равно заданному чисто мнимому числу ν_0. Это противоречит предположению о том, что ν — переменная, стремящаяся к $i\infty$. Между тем, последнее предположение необходимо для того, чтобы преобразование Фурье было точечным — факт, который В. П. Маслов существенно использует. Подход, который позволяет избежать этого противоречия и открывает путь к математическому обоснованию преобразования Фурье выражений вида (1), условий квантования Маслова и задания числа ν_0, становится возможным, если отказаться от попыток определять функции или классы функций по их асимптотическим разложениям. Он приводит к новым понятиям, которые связаны с симплектической геометрией и объекты применимости которых могут быть выяснены лишь апостериори; возможно, это будет квантовая механика, если расчет спектра гелия с помощью новых методов даст удовлетворительные численные результаты.

В докладе излагались эти понятия и их связи с уравнениями Шрёдингера, Клейна — Гордона, Дирака.

Заседание 4 октября 1978 г.

1. С. П. Новиков «О Международном конгрессе математиков в Хельсинки».

Заседание 11 октября 1978 г.

1. А. Г. Хованский «Точность неравенств Петровского — Олейник».

Недавно В. И. Арнольд получил оценку индекса особой точки $0 \in \mathbb{R}^n$ векторного поля в $\mathbb{R}^n$ с однородными компонентами фиксированной степени m. Его оценка основана на недавно открытой Левиным и Эйзенбудом формуле для индекса особой точки поля. В. И. Арнольд назвал свою оценку неравенством Петровского — Олейник: дело в том, что эта оценка в применении к градиентному векторному полю дает оценку эйлеровой характеристики вещественной гиперповерхности, найденную в 1949 г. И. Г. Петровским и О. А. Олейник. В докладе приводятся новые оценки, связанные с индексом полиномиального векторного поля. Пусть $V = (P_1, \ldots, P_n)$ — полиномиальное векторное поле в $\mathbb{R}^n$ с компонентами $P_1, \ldots, P_n$ степеней $m_1, \ldots, m_n$. Обозначим через ind сумму индексов всех особых точек поля V. Пусть далее U_0 — область в $\mathbb{R}^n$, определенная неравенством $P_0 > 0$, где P_0 — полином степени m_0. Обозначим через ind^+ сумму индексов всех особых точек поля V в области U_0 и через ind^- — в области $\mathbb{R}^n \setminus \overline{U}_0$. Приводятся оценки величин ind, ind^+ и $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ (при фиксированном наборе степеней $m_1, \ldots, m_n$ и m_0). Доказательство этих оценок (особенно в невырожденном случае) тесно связано как с доказательством Арнольда, так и с доказательством Петровского — Олейник. Оно проще этих доказательств и возникло из анализа их взаимосвязи. Далее, в докладе приводятся примеры векторных полей, доказывающие точность всех приведенных оценок. В частности, эти примеры доказывают точность неравенств Петровского — Олейник (вопрос о точности неравенств Петровского — Олейник был поставлен В. И. Арнольдом). Более подробное изложение можно найти в моей статье «Индекс полиномиального векторного поля», Функц. анализ 13:1 (1979).

Заседания 18 и 25 октября 1978 г.

1. С. А. Молчанов «Спектральные свойства оператора Шрёдингера со случайным потенциалом».

Заседание 1 ноября 1978 г.

1. Н. В. Крылов, Б. Л. Розовский «Аналитические методы в фильтрации диффузионных процессов».

Основные результаты доклада опубликованы в [1], [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Крылов, Б. Л. Розовский, О задаче Коши дял линейных стохастических дифференциальных уравнений с частными производными, Изв. АН, сер. матем., 41:6 (1977), 1329—1347.

[2] Н. В. Крылов, Б. Л. Розовский, Об условных распределениях диффузионных процессов, Изв. АН, сер. матем., 42:2 (1978), 356—378.

Заседание 15 ноября 1978 г.

1. Н. Р. Сибгатуллин «Волны в сильных гравитационных полях».

Заседание 22 ноября 1978 г.

1. А. В. Угланов «Обобщенные функции и дифференциальные уравнения на гильбертовом пространстве».

Исследуется вопрос существования фундаментальных решений линейных бесконечномерных дифференциальных уравнений. Далее рассматривается задача Коши для бесконечномерного уравнения Шрёдингера и, на основе ее решения, предлагается новый метод построения меры Фейнмана.

I. Пусть $\Phi \subset H \subset \Phi'$ есть тройка сепарабельных гильбертовых пространств, связанных плотными вложениями Гильберта — Шмидта, S — линейное топологическое пространство (л. т. п.) гладких быстро убывающих мер на Φ' (по поводу точных формулировок см. [1]), $\overline{S}$ — л. т. п. всех характеристических функционалов мер из S (считается, что $(\Phi')' = \Phi$; таким образом, элементы $\overline{S}$ являются функциями на Φ), S', $\overline{S}'$ — пространства, сопряженные с S, $\overline{S}$ соответственно (пространства обобщенных функций и мер). Для $u \in \overline{S}'$ вторая производная u'' есть линейный оператор, действующий из Φ в $L(\Phi, \overline{S}')$. Таким образом, для линейного непрерывного оператора $A\colon \Phi \to \Phi$, вектора $a \in \Phi$ и числа $c \in R^1$ определен оператор

$$D_{A,a,c}\colon \overline{S}' \to \overline{S}'\colon u \longmapsto \mathrm{Tr}\,(u''A) + D_a u + cu$$

(Tr означает след, $D_a\colon \overline{S}' \to \overline{S}'$ — оператор дифференцирования по направлению a). Обозначим через δ меру единичной массы, сосредоточенную в точке $0 \in \Phi$, и в пространстве $\overline{S}'$ рассмотрим уравнение

$$D_{A,a,c}\,(\cdot) = \delta. \tag{1}$$

Т е о р е м а. *Уравнение* (1) *разрешимо. Размерность многообразия его решений равна либо нулю, либо бесконечности.*

Решения уравнения (1) удалось записать в явном виде (выражаются через бесконечномерные поверхностные интегралы). Следующее предложение показывает, что в пространстве S' вопрос о существовании фундаментальных решений не имеет смысла.

Т е о р е м а. *Обобщенная функция, сосредоточенная в точке, равна нулю.*

II. В пространстве $\overline{S}'$ рассмотрим задачу Коши для уравнения Шрёдингера ($t \geqslant 0$):

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} - i\,\mathrm{Tr}\,(\nu'' A) = 0, \quad \nu(0) = \delta. \tag{2}$$

Т е о р е м а. *Уравнение* (2) *имеет единственное решение.*

При $A = 1$ и фиксированном $t > 0$ обобщенная мера $\nu = \nu(t)$ допускает продолжение с пространства $\overline{S}$ на значительно более широкое пространство $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\Phi)$; полученный линейный функционал $\nu\colon \mathscr{L} \to \mathbb{C}$ обладает еще некоторым свойством непрерывности. Укажем связь функционала ν с континуальным интегралом Фейнмана (см. [2]). Пусть $H = L_2[0, 1]$, $\Phi = N_2[0, 1]$ — пространство абсолютно непрерывных функций $\varphi\colon [0, 1] \to R^1$ таких, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi' \in L_2[0, 1]$, $0 = s_{0,n} < s_{1,n} < \ldots < s_{m,n} = 1$ $(m = m(n))$, $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_j (s_{j+1,n} - s_{j,n}) = 0$. Для $f \in \mathscr{L}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in R^1$ положим $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = f(\varphi)$, где функция $\varphi \in N_2[0, 1]$ линейна на промежутках $[s_{j,n}, s_{j+1,n}]$ и $\varphi(0) = \varphi_0 = 0$, $\varphi(s_{j+1,n}) = \varphi_{j+1}$.

Т е о р е м а.

$$\lim_{n\to\infty} (4\pi t i)^{-m/2} \prod_{j=0}^{m-1} (s_{j+1,n} - s_{j,n})^{-1/2} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int f(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \exp\left[-\frac{1}{4ti} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\varphi_{j+1} - \varphi_j)^2}{s_{j+1,n} - s_{j,n}}\right] d\varphi_1 \ldots d\varphi_m = (\nu, f).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. У г л а н о в, Обобщенные меры на гильбертовом пространстве, Изв. АН 39:2 (1975), 438—468.

[2] Р. Ф е й н м а н, А. Х и б с, Квантовая механика и интегралы по траекториям, М., «Мир», 1968.

Заседание 29 ноября 1978 г.

1. С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов «Асимптотика решения смешанной задачи для нелинейного волнового уравнения $h^2 \square u + a \operatorname{sh} u = 0$».

В области $\Omega \subset R^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$ при $t \geqslant 0$ рассматривается задача

$$h^2 u_{tt} - \sum_{j=1}^{3} (\partial^2 u/\partial x_j^2) + Ta(x) \operatorname{sh}(uT^{-1}) = 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = v_0(x), \quad u_t|_{t=0} = v_1(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $h > 0$ — малый параметр, $T > 0$ — параметр, $a(x) > 0$ — некоторая гладкая функция, v_0, v_1 — гладкие вещественнозначные функции, носители которых лежат в некоторой не пересекающейся с $\partial\Omega$ компактной области $M \subset \Omega$. Пусть $a(x)$ таково, что i) каждая траектория $q^{(1)}(\alpha, t)$ системы

$$\ddot{q} = -\nabla a(q)/(2a(\alpha)), \quad q|_{t=0} = \alpha \in M, \quad \dot{q}|_{t=0} = 0$$

достигает поверхности $\partial\Omega$ за некоторое время $\tilde{t}(\alpha)$, $0 < \tilde{t}(\alpha) \leqslant t_1$, причем $\langle \dot{q}^{(1)}(\alpha, \tilde{t}(\alpha)), n \rangle \neq$ $\neq 0$, где n — единичная нормаль к $\partial\Omega$ в точке $q^{(1)}(\alpha, \tilde{t}(\alpha))$; ii) каждая траектория $q^{(2)}(\alpha, t)$, $t \geqslant \tilde{t}(\alpha)$, $\alpha \in M$, этой же системы, выпущенная в момент времени $\tilde{t}(\alpha)$ из точки $q^{(1)}(\alpha, \tilde{t}(\alpha))$ с импульсом

$$-2n \langle n, \dot{q}^{(1)}(\alpha, \tilde{t}(\alpha)) \rangle + \dot{q}^{(1)}(\alpha, \tilde{t}(\alpha)),$$

не достигает $\partial\Omega$ при $\tilde{t}(\alpha) < t \leqslant t_0$, iii) при всех $t \in [0, t_0]$ и $\alpha \in M$

$$\det(\partial q^{(i)}/\partial\alpha) \neq 0.$$

Тогда [1] существует формальное асимптотическое решение линейной ($T = \infty$) задачи (1), главный член которого представляется в виде суперпозиции падающей волны $\varphi_1 \cos(S_1/h)$ и отраженной волны $\varphi_2 \cos(S_2/h)$, где фазы $S_j(x, t)$ и амплитуды $\varphi_j(x, t)$ — гладкие функции. В этих же предположениях методом Уизема [5], [6] для случая многих фаз, удается построить асимптотическое решение нелинейной задачи (1). При этом падающая и отраженная волны представляются эллиптическими функциями, а их «нелинейная суперпозиция» выражается через точное двухзонное условно периодическое решение уравнения

$$\Phi_{\xi\xi} - \Phi_{\eta\eta} + \sin\Phi = 0$$

[3], [4] — «суперпозицию» его точных периодических (кноидальных) решений, на существование которой в нелинейных уравнениях указал С. П. Новиков в 1974 г. в [2].

Пусть на гиперэллиптической римановой поверхности

$$\Gamma\colon \omega^2 = z \prod_{j=1}^{4} (z - E_j) \quad (E_3 < 0,\ E_4 = -1,\ \max(E_1, E_2) < \min(E_3, -1))$$

с запрещенными зонами $[E_1, E_2]$, $[E_3, E_4]$, $[0, \infty)$ выбран базис циклов a_1, a_2, b_1, b_2, такой, что a_1, a_2 — полные прообразы зон $[E_1, E_2]$, $[E_3, E_4]$,

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = \delta_{ij}, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2).$$

Пусть

$$U_l = \sum_{j=1}^{0} c_{lj}(E) z^j dz/\omega, \quad E = (E_1, E_2, E_3, -1) \qquad (l = 1, 2)$$

— базис голоморфных дифференциалов на Г, нормированный условиями

$$\oint_{a_j} dU_l = 2\pi\delta_{jl}.$$

Введем матрицу

$$B_{jl}=\oint\limits_{b_j} dU_l,$$

двумерную θ-функцию

$$\theta(\tau, E)=\sum_{k\in Z^2}\exp(i\langle k, Bk\rangle/2+i\langle k, \tau\rangle),$$

$\tau=(\tau_1, \tau_2)$ и функцию

$$y(\tau, E, T)=2T\ln(\theta(\tau_1+\pi, \tau_2, E)/\theta(\tau_1, \tau_2+\pi, E)).$$

Рассмотрим относительно функций

$$S=(S_1(x, t), S_2(x, t)), \quad E=(E_1(x, t), E_2(x, t), E_3(x, t), -1)$$

систему уравнений ($x\in\Omega$, $t\geqslant 0$)

$$S_{jt}S_{lt}-\langle\nabla S_j, \nabla S_l\rangle=a(x)(c_{j1}(E)c_{l2}(E)+c_{l1}(E)c_{j2}(E))/(-2E_1E_2E_3) \quad (j, l=1, 2);$$

$$\partial/\partial t\Big(\sum_{j=1}^{2}\rho_{jl}S_{jt}\Big)-\Big\langle\nabla, \sum_{j=1}^{2}\rho_{jl}\nabla S_j\Big\rangle=0 \qquad (l=1, 2); \tag{2}$$

$$\rho_{jl}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} y_{\tau_j}y_{\tau_l}\,d\tau_1\,d\tau_2;$$

$$S_1|_{t=0}=0\ (S_{1t}|_{t=0}>0), \quad E_3|_{t=0}=\exp(-2v_0(x)/T), \quad E_1|_{t=0}=E_2|_{t=0};$$

$$S_2|_{\partial\Omega}=S_1|_{\partial\Omega}, \quad \langle n, \nabla S_1\rangle|_{\partial\Omega}=-\langle n, \nabla S_2\rangle|_{\partial\Omega}, \quad E_1|_{\partial\Omega}=-E_2E_3|_{\partial\Omega}, \tag{3}$$

где n — нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x\in\partial\Omega$.

Теорема. *Пусть при* $t\in[0, t_0]$ *выполнены условия* i) — iii). *Тогда*: 1) *для сколь угодно малого* $\varepsilon>0$, *не зависящего от* h, *и любого* $m>0$ *существуют функции* $S^{(m)}(x, t, T)$ *и* $E^{(m)}(x, t, T)$, *удовлетворяющие при* $T>ch^{-\varepsilon}$, $c>0$, *задаче* (2) — (3) *с точностью до* $O(h^m)$; 2) *существует формальное асимптотическое по* mod $O(h^m)$ *решение задачи* (1), *главный член которого имеет вид*

$$u_0=y(S^{(m)}/h, E^{(m)}, T).$$

Носитель функции $E_3^{(m)}+1$ (принадлежащий M при $t=0$) достигает $\partial\Omega$ за некоторое время t_2. До этого момента времени при всех $x\in\Omega$, $E_1^{(m)}=E_2^{(m)}$, двумерная θ-функция вырождается в одномерную, система (3) вырождается в систему двух уравнений относительно S_1, E_3 и u_0 является «однофазовым решением». При временах $t>t_2$ точки $E_1^{(m)}$, $E_2^{(m)}\in\Gamma$ раздвигаются, в решении u_0 появляется вторая фаза $S_2^{(m)}$ и происходит «отражение падающей волны» с одной фазой $S_1^{(m)}$ от $\partial\Omega$, причем так же, как и в линейном случае, $S_1^{(m)}$ и $S_2^{(m)}$ на $\partial\Omega$ связаны равенствами (3) — классическим законом геометрической оптики о равенстве угла падения углу отражения. В некоторый момент времени $t_3>t_2$ точка $E_3^{(m)}\in\Gamma$ слипается с -1 при всех $x\in\Omega$, и u_0 опять принимает вид однофазового решения с фазой $S_2^{(m)}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., «Наука», 1976.

[2] С. П. Новиков, Периодическая задача Кортевега-де Фриза. I, Функц. анализ 8:3 (1974), 54—66.

[3] В. А. Козел, В. П. Котляров, Почти периодические решения уравнения $u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0$, ДАН УССР, сер. А, 10 (1976), 878—881.

[4] V. B. Matveev, Abelian functions and solitons; preprint № 373, Inst. Fiz. Teor. Uniwer. Wroclawsk., Wroclaw, 1976.

[5] J. C. Luke, A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems, Proc. Roy. Soc., A292, 1966, 403.

[6] R. M. Miura, M. D. Kruskal, Application of a nonlinear WKB method to the Korteweg — de Vries equation, SIAM J. Appl. Math. 25 (1973).