МНОГОГРАННИКИ НЬЮТОНА И ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА—ЯКОБИ

А. Г. Хованский

Формула Эйлера — Якоби [1] справедлива для невырожденных систем многочленов фиксированных ступеней. Здесь дается обобщение этой формулы, справедливое для невырожденных систем многочленов с фиксированными многогранниками Ньютона. Я благодарен В. И. Арнольду за постановку задачи и внимание.

1. **Общие леммы.** Пусть M — n-мерное компактное комплексно аналитическое многообразие и $D_1, \ldots, D_n$ — неособые трансверсальные аналитические гиперповерхности в M. Обозначим $M \setminus D_1 \cup \ldots \cup D_n$ через M_0, $D_1 \setminus D_2 \cup \ldots \cup D_n$ через $M_1, \ldots, D_1 \cap \ldots \cap D_n$ через M_n. Множество M_n состоит из отдельных точек a_k, $M_n = \{a_k\}$ $(k = 1, \ldots, N)$. Пусть $T_1, \ldots, T_N$ — n-мерные вещественные торы в M_0, «обегающие» все поверхности D около точек $a_1, \ldots, a_N$. Точнее, пусть $T_k = \delta a_k$, где δ — сложная кограница Лере (см. [2], стр. 83).

Лемма 1. *Цикл $T_1 + \ldots + T_N$ гомологичен нулю в M_0.*

Доказательство. Пусть $H_*(M_n) \xrightarrow{\delta_n} H_*(M_{n-1}) \to \ldots \xrightarrow{\delta_1} H_*(M_0)$ — последовательность кограниц Лере, $\delta = \delta_1 \circ \ldots \circ \delta_n$. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ — вещественные кривые, «обегающие» точки $a_1, \ldots, a_N$ на комплексной кривой $\overline{M}_{n-1} = D_1 \cap \ldots \cap D_{n-1}$. Точнее, пусть $\gamma_k = \delta_n a_k$. Цикл $\gamma_1 + \ldots + \gamma_N$ гомологичен нулю в M_{n-1}. Действительно, он ограничивает пленку, которая получается из кривой $\overline{M}_{n-1}$ после выбрасывания дисков B_k с границами γ_k. Доказательство леммы на этом заканчивается, так как $\sum T_k = \delta \sum a_k = \delta_1 \circ \ldots \circ \delta_{n-1} \sum \gamma_k = 0$.

Пусть $z = z_1, \ldots, z_n$ — локальные координаты на многообразии M около точки a_k и $P_1 = 0, \ldots, P_n = 0$ — локальные уравнения поверхностей $D_1, \ldots, D_n$ около этой точки. Обозначим через $\frac{\partial P}{\partial z}$ определитель соответствующей матрицы Якоби. Рассмотрим мероморфную форму ω вида $\omega = \frac{f}{P_1 \cdot \ldots \cdot P_n} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$, где f — голоморфная функция в окрестности точки a_k.

Лемма 2. $\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{T_k} \omega = \left(f \Big/ \frac{\partial P}{\partial z}\right)\Big|_{a_k}$.

Лемма 2 называется формулой сложных вычетов. Она доказывается n-кратным применением формулы вычета Коши.

2. **Теорема.** Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — невырожденная система многочленов Лорана с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ (см. [3]). Пусть Q — произвольный многочлен Лорана, многогранник Ньютона $\Delta(Q)$ которого лежит строго внутри многогранника $\Delta_1 + \ldots + \Delta_n$, $\Delta(Q) < \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$.

Теорема (обобщенная формула Эйлера—Якоби). *Сумма* $\sum\limits_{\{a_k\}} \left(Q/z_1 \cdot \ldots \cdot z_n \cdot \frac{\partial P}{\partial z}\right)\Big|_{a_k}$ *равна нулю. Суммирование ведется по набору $\{a_k\}$ корней системы уравнений $P_1 = \ldots = P_n = 0$, лежащих в $(C \setminus 0)^n$ (т. е. $z_1 \neq 0, \ldots, z_n \neq 0$).*

Доказательство. Рассмотрим торическую компактификацию M пространства $(C \setminus 0)^n$, достаточно полную для многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ (см. [3]). Пусть $D_1, \ldots, D_n$ — замыкания в M гиперповерхностей в $(C \setminus 0)^n$, заданных уравнениями $P_1 = 0, \ldots, P_n = 0$. Продолжим на M мероморфную форму ω, заданную в $(C \setminus 0)^n$ формулой $\omega = \frac{Q}{P_1 \cdot \ldots \cdot P_n} \cdot \frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$. Несложно показать, что *форма ω регулярна вне поверхностей $D_1, \ldots, D_n$*. Следовательно, $\sum \int\limits_{T_k} \omega = 0$, так как по лемме 1 цикл

$T_1+\ldots+T_N$ гомологичен нулю в $M_0=M\setminus D_1\cup\ldots\cup D_n$. Далее, по лемме 2 $\sum\int\limits_{T_k}\omega=\sum\limits_{\{a_k\}}\left(Q/z_1\cdot\ldots\cdot z_n\cdot\frac{\partial P}{\partial z}\right)\Big|_{a_k}$. Теорема доказана.

Следствие (формула Эйлера—Якоби). *Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — общая система многочленов степеней $m_1, \ldots, m_n$ и $\widetilde{Q}$ — любой многочлен степени, меньшей, чем $\sum(m_i-1)$. Тогда* $\sum\limits_{\{a_k\}}\left(\widetilde{Q}\Big/\frac{\partial P}{\partial z}\right)\Big|_{a_k}=0.$

Доказательство. Если все корни не лежат на координатных плоскостях, следствие получается непосредственным применением теоремы для $Q=z_1\cdot\ldots\cdot z_n\cdot\widetilde{Q}$. От дополнительного ограничения легко избавиться малым шевелением коэффициентов системы уравнений $P_1=\ldots=P_n=0$.

3. Замечания. Отметим, что в случае многогранников $\Delta_i=\Delta(P_i)$ полной размерности теорема не допускает улучшений: в этом случае *любая функция f на корнях $\{a_k\}$, подчиненная обобщенному условию Эйлера—Якоби $\sum f(a_k)=0$, получается как вычет некоторой формы* $\frac{Q}{P_1\cdot\ldots\cdot P_n}\cdot\frac{dz_1}{z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{dz_n}{z_n}$, *где* $\Delta(Q)<\Delta_1+\ldots+\Delta_n$. Это утверждение несложно вытекает из когомологических вычислений статьи [4]. Отметим, что случай нульмерных полных пересечений является исключительным: для полных пересечений $P_1=\ldots=P_m=0$ положительной размерности ($m<n$) *любая* голоморфная форма старшей степени получается как вычет от некоторой формы $\frac{Q}{P_1\cdot\ldots\cdot P_m}\cdot\frac{dz_1}{z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{dz_n}{z_n}$, где $\Delta(Q)<\Delta_1+\ldots+\Delta_m$ [4].

Отметим в заключение, что формула Эйлера — Якоби применяется в вещественной алгебраической геометрии [5]. Обобщенная формула несомненно найдет аналогичное применение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Kronecker, Werke: Über einige Interpolationformeln für ganse Funktionen mehrer Variabeln 1 (1895), 133—141.

[2] Ф. Фам, Введение в топологическое исследование особенностей Ландау, М., «Мир», 1970.

[3] А. Г. Хованский, Многогранники Ньютона и торические многообразия, Функц. анализ 11:4 (1977), 56—64.

[4] А. Г. Хованский, Многогранники Ньютона и род полных пересечений, функц. анализ 12:1 (1978), 51—61.

[5] И. Г. Петровский, О. А. Олейник, О топологии действительных алгебраических поверхностей, Изв. АН, серия матем. 18 (1949), 389—402.

Поступило в Правление общества 20 сентября 1977 г.