

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA  
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E  
NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA



TESI DI LAUREA SPECIALISTICA  
ANNO ACCADEMICO 2007/08

# Dinamica delle frazioni continue e teorema del limite centrale

Candidato  
**Giulio Tiozzo**

Relatore  
**Prof. Stefano Marmi**

Controrelatore  
**Dott. Carlo Carminati**

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Fondamenti di teoria ergodica</b>	<b>4</b>
1.1 Definizioni e prime proprietà . . . . .	4
1.2 Entropia di Kolmogorov-Sinai . . . . .	6
1.3 Sistemi fibrati ed estensione naturale . . . . .	9
1.4 Dinamica dell'intervallo . . . . .	12
<b>2 Frazioni continue</b>	<b>13</b>
2.1 L'algoritmo classico . . . . .	13
2.2 Le $\alpha$ -frazioni continue . . . . .	17
2.2.1 Sviluppo in frazione continua per eccesso . . . . .	21
2.2.2 Le frazioni continue di Ito . . . . .	21
<b>3 Estensione naturale e densità invariante</b>	<b>23</b>
3.1 I sistemi duali . . . . .	23
3.2 Calcolo esplicito della densità invariante . . . . .	25
3.3 Estensione naturale e flusso geodetico sulla superficie modulare . . . . .	26
3.4 Calcolo dell'estensione naturale per la mappa di Nakada . . . . .	29
3.5 Estensione naturale per la mappa di Ito . . . . .	33
3.6 Applicazioni . . . . .	34
<b>4 Decomposizione spettrale e teoremi limite</b>	<b>38</b>
4.1 L'operatore di Perron-Frobenius . . . . .	38
4.2 Il teorema di Ionescu-Tulcea e Marinescu . . . . .	41
4.3 Una classe di trasformazioni espansive . . . . .	42
4.4 Esistenza della misura invariante . . . . .	45
4.5 Ergodicità . . . . .	45
4.6 Le perturbazioni dell'operatore $\Phi_T$ . . . . .	47
4.7 Il teorema del limite centrale . . . . .	48
4.7.1 Esistenza di una varianza non nulla . . . . .	49
4.8 Teorema del limite centrale per le frazioni continue giapponesi . . . . .	59
4.8.1 Applicabilità del teorema di Ionescu-Tulcea e Marinescu . . . . .	59
4.8.2 Ergodicità della mappa di Nakada . . . . .	62

4.8.3	Verifica della condizione di cobordo . . . . .	65
<b>5</b>	<b>L'entropia delle trasformazioni di frazione continua</b>	<b>69</b>
5.1	Continuità dell'entropia . . . . .	69
5.1.1	Comportamento dell'entropia per $\alpha \rightarrow 0$ . . . . .	72
5.2	L'entropia non è monotona . . . . .	73
	<b>Bibliografia</b>	<b>80</b>

# Introduzione

La teoria delle frazioni continue ha origini antichissime. L'algoritmo di Euclide per il calcolo del massimo comun divisore fra due interi permette di scrivere un numero razionale nella forma

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}}$$

dove gli  $a_i$  sono interi positivi. L'applicazione di tale procedimento agli irrazionali produce la rappresentazione infinita

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

nota come *frazione continua*. L'interesse per tali sviluppi, già noti nel '600, era dettato soprattutto dal fatto che le frazioni ottenute troncando lo sviluppo dopo un numero finito di passi, dette *convergenti*, sono in un senso molto preciso le migliori approssimazioni razionali a  $x$ . Lo sviluppo in frazione continua assume un'interpretazione dinamica se si considera la *mappa di Gauss*  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tale trasformazione dell'intervallo  $[0, 1]$  è monotona su infiniti sottointervalli; dato  $x \in \mathbb{R}$ , i *quozienti parziali*  $a_i$  corrispondono esattamente ai rami su cui vengono a trovarsi i punti dell'orbita di  $x$  secondo la  $T$ . Questa interpretazione permette di affrontare problemi di natura aritmetica sulle frazioni continue nel contesto della teoria dei sistemi dinamici discreti; l'esistenza di una misura di probabilità invariante per la  $T$ , scoperta da Gauss nel 1800, rende inoltre naturale l'impiego di strumenti della teoria ergodica. Numerosi risultati quantitativi sono stati in questo modo ottenuti nella prima metà del '900 (Kuzmin, Khintchine, Lévy).

Nel 1981 H. Nakada propose una generalizzazione della mappa di Gauss; fissato  $\alpha \in [0, 1]$  si considera  $T_\alpha : [\alpha - 1, \alpha] \rightarrow [\alpha - 1, \alpha]$  definita da

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} - \lfloor \frac{1}{|x|} + 1 - \alpha \rfloor & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tale mappa permette di ottenere per ogni numero reale uno sviluppo (che si chiamerà  $\alpha$ -frazione continua) del tipo

$$x = a_0 + \frac{\epsilon_1}{a_1 + \frac{\epsilon_2}{a_2 + \dots}}$$

dove gli  $a_i$  sono ancora interi positivi e gli  $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ . E' possibile analizzare le proprietà dinamiche della mappa di Nakada in modo simile a quella di Gauss, nel contesto delle mappe dell'intervallo monotone a tratti; il fatto però che non tutti i rami siano surgettivi (cosa che accade per Gauss) rende il compito tecnicamente più difficile.

Il primo risultato ottenuto da Nakada consiste nel costruire, per  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ , un'estensione bidimensionale del sistema dato di cui si conosce esplicitamente una densità invariante; ciò permette di ottenere la densità invariante e l'entropia di Kolmogorov-Sinai per  $T_\alpha$ ; tale costruzione, che è legata anche al flusso geodetico sulla superficie modulare, è l'argomento del capitolo 3.

Il capitolo 4 è invece dedicato alla dimostrazione del risultato principale della tesi, vale a dire il teorema del limite centrale. Sia  $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$  un sistema dinamico misurabile e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  un'osservabile; nonostante la dinamica sia deterministica, è interessante considerare le osservabili  $X_n = f \circ T^n$  come variabili aleatorie sullo spazio  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ; tali variabili sono isonome, ma non indipendenti. Dal momento però che le *funzioni di correlazione* tendono a 0 al crescere del numero di iterazioni, è sensato chiedersi se valgono alcuni teoremi applicabili a successioni di variabili isonome indipendenti. Il noto *teorema di Birkhoff* è l'equivalente della *legge dei grandi numeri*; scopo del presente lavoro è dimostrare che nei sistemi definiti da  $T_\alpha$  per  $\alpha \in (0, 1)$  vale anche il *teorema del limite centrale*. Considerata un'osservabile  $f : [\alpha - 1, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile, a variazione limitata e media nulla, esiste  $\sigma > 0$  per cui si ha la convergenza alla legge normale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_\alpha \left( \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T_\alpha^k}{\sigma \sqrt{n}} \leq v \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

dove  $\mu_\alpha$  è la densità invariante per  $T_\alpha$ . La dimostrazione di questo fatto si basa sulla decomposizione spettrale dell'operatore di Perron-Frobenius, secondo l'approccio iniziato da A. Lasota e J.A. Yorke per mappe con un numero finito di intervalli di monotonia ed esteso poi da diversi autori a mappe sempre meno 'regolari'; in particolare, un articolo di A. Broise provvede la necessaria estensione a una certa classe di mappe, di cui le trasformazioni definite da Nakada fanno parte. E' essenziale per l'utilizzo di questa tecnica considerare l'azione dell'operatore sul sottospazio di  $L^1$  dato dalle funzioni a variazione limitata.

Il capitolo 5 presenta infine una discussione dell'entropia della mappa  $T_\alpha$  per valori di  $\alpha$  nell'intervallo  $[0, \sqrt{2} - 1]$ , per i quali non è nota una forma esplicita dell'estensione naturale. Il concetto di entropia, formulato da Kolmogorov e Sinai per arbitrari sistemi dinamici misurabili in analogia a quanto accade in meccanica statistica, nel caso delle frazioni continue quantifica la capacità dell'algoritmo euclideo di rappresentare efficacemente numeri reali; il logaritmo

di tale quantità infatti corrisponde sostanzialmente alla base  $b$  per cui le prime  $n$  cifre dello sviluppo in frazione continua di  $x$  e le prime  $n$  cifre del consueto sviluppo in base  $b$  contengono la stessa quantità di informazione su  $x$ . Per le  $T_\alpha$ , simulazioni numeriche dimostrano che l'entropia si comporta in modo piuttosto irregolare; nella tesi si discute la continuità dell'entropia al variare di  $\alpha$  e della monotonia di tale funzione; un recente risultato di Nakada e Natsui dimostra infatti che esistono infiniti sottointervalli disgiunti di  $[0, \sqrt{2} - 1]$  su cui la funzione è monotona.

# Capitolo 1

## Fondamenti di teoria ergodica

Per lo studio delle trasformazioni associate agli sviluppi in frazione continua dal punto di vista dinamico saranno necessari i principali strumenti della teoria ergodica; in questo capitolo rivediamo brevemente alcuni fondamentali risultati.

### 1.1 Definizioni e prime proprietà

Prima di tutto introduciamo i protagonisti della teoria ergodica, chiarendo la notazione:

**Definizione 1.1.1.** *Uno spazio misurabile è una coppia  $(X, \mathcal{A})$  dove  $X$  è un insieme e  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $X$ . Un endomorfismo di uno spazio misurabile è una mappa  $T : X \rightarrow X$  tale che  $T^{-1}(C) \in \mathcal{A}$  per ogni  $C \in \mathcal{A}$ .*

**Definizione 1.1.2.** *Una misura  $\mu$  sullo spazio  $(X, \mathcal{A})$  si dice invariante per l'endomorfismo  $T$  se  $\mu(C) = \mu(T^{-1}(C))$  per ogni  $C \in \mathcal{A}$ .*

La quadrupla  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  con  $\mu$  invariante per  $T$  si dice *sistema dinamico misurabile*. Per tali sistemi è naturale introdurre la seguente

**Definizione 1.1.3.** *Due sistemi dinamici  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  e  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  si dicono isomorfi se esistono  $X_0 \subseteq X$  e  $Y_0 \subseteq Y$  misurabili con  $\mu(X_0) = \nu(Y_0) = 0$  e una  $\phi : X \setminus X_0 \rightarrow Y \setminus Y_0$  bigettiva tale che per ogni  $C \subseteq X \setminus X_0$ ,  $C \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \phi(C) \in \mathcal{B}$  e  $\nu(\phi(C)) = \mu(C)$ .*

I sistemi dinamici nascono storicamente come generalizzazione di sistemi studiati dalla fisica; considerando tale approccio è evidente l'importanza del concetto di *grandezza osservabile*.

**Definizione 1.1.4.** *Un'osservabile del sistema  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  è una funzione  $\mu$ -misurabile  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ .*

Ora, nell'approccio fisico possono essere misurate solo le medie temporali delle grandezze osservabili; fortunatamente l'esistenza delle medie temporali per sistemi dinamici discreti ci è garantita dal *teorema ergodico* di Birkhoff, a patto di considerare osservabili che siano integrabili rispetto alla misura  $\mu$ :

**Teorema 1.1.1.** (Birkhoff) *Per ogni  $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$  il limite*

$$\underline{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$$

*esiste per  $\mu$ -quasi ogni  $x \in X$ . Inoltre  $\int_X \underline{f} d\mu = \int_X f d\mu$ .*

La funzione  $\underline{f}$  così ottenuta ha la proprietà che  $\mu$ -q.o.  $\underline{f}(T(x)) = \underline{f}$ ; definiremo questa proprietà *invarianza* dell'osservabile  $\underline{f}$ .

**Definizione 1.1.5.** *Un'osservabile  $\phi$  si dice invariante rispetto a  $T$  se  $\phi \circ T = \phi$   $\mu$ -q.o. Un insieme  $A \in \mathcal{A}$  si dice invariante se  $T^{-1}(A) = A$ .*

E' ora naturale chiedersi come varia la funzione  $\underline{f}(x)$ , che rappresenta il comportamento asintotico dell'osservabile, al variare del punto "di partenza"  $x \in X$ ; a questo scopo introduciamo una particolare classe di misure.

**Definizione 1.1.6.** *Una misura  $\mu$  invariante per  $T$  si dice ergodica se per ogni insieme  $A \in \mathcal{A}$  invariante si ha  $\mu(A) = 0$  oppure  $\mu(X \setminus A) = 0$ .*

Una misura è quindi ergodica se non esistono insiemi invarianti "non banali"; notiamo però che se  $A$  è un insieme invariante, allora l'osservabile  $\chi_A$  è invariante, quindi l'esistenza di osservabili invarianti non banali (cioè non costanti) è legata all'ergodicità della misura, e questo è a sua volta legato alla costanza della media temporale  $\underline{f}$ ; più in dettaglio si ha la seguente:

**Proposizione 1.1.2.** *Sia  $\mu$  una misura invariante rispetto a  $T$ ; allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

- (i)  $\mu$  è ergodica;
- (ii) ogni  $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$  invariante è costante  $\mu$ -quasi ovunque;
- (iii) per ogni  $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $\underline{f}$  è costante  $\mu$ -quasi ovunque;
- (iv) Per ogni  $f, g \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X f \circ T^k \cdot g d\mu = \int_X f d\mu \int_X g d\mu$$

Si osservi che dalla (iii) segue che  $\underline{f} = \int_X f d\mu$   $\mu$ -q.o.; questo significa che nel caso delle misure ergodiche la "media temporale" di un'osservabile non dipende dal punto di partenza ed è uguale alla "media spaziale".

Per il teorema di Birkhoff la convergenza delle medie temporali si ha  $\mu$ -q.o.; per quanto riguarda la convergenza "in media" vale il

**Teorema 1.1.3.** (Von Neumann) Per ogni  $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ , la successione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$$

converge in  $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$  a una  $\underline{f} \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ .

Un'altra proprietà interessante dei sistemi che prenderemo in considerazione è la seguente:

**Definizione 1.1.7.** Un sistema dinamico misurabile  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  è detto mescolante se per ogni  $A, B \in \mathcal{A}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

Equivalentemente, se per ogni  $f, g \in L^2(X, \mu)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f \circ T^n \cdot g d\mu = \int_X f d\mu \int_X g d\mu$$

Le funzioni  $\int_X f \circ T^n \cdot g d\mu - \int_X f d\mu \int_X g d\mu$  sono dette *funzioni di correlazione*.

**Osservazione.** Dalla (iv) della prop. 1.1.2 segue che mescolante  $\Rightarrow$  ergodico.

## 1.2 Entropia di Kolmogorov-Sinai

Ricordando l'analogia con i sistemi fisici, A.N. Kolmogorov nel 1958 [11] ha formulato una definizione di entropia che si applica in modo generale ai sistemi dinamici misurabili, ottenendo così un interessante invariante metrico.

In meccanica statistica, l'entropia di uno stato macroscopico  $A$  è data dalla formula di Boltzmann

$$S(A) = -k \log_2(P(A)) \quad (1.1)$$

dove  $P(A)$  è la probabilità che si realizzi lo stato  $A$  a partire dai possibili stati microscopici (che si suppongono equiprobabili) e  $k$  la costante di Boltzmann. Se i microstati  $\{\omega_i \mid i \in I\}$  hanno probabilità diverse  $\{p_i \mid i \in I\}$  di realizzarsi, vale la legge di Gibbs

$$S(A) = -k \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \quad (1.2)$$

L'equazione (1.2) è il punto di partenza per la definizione dell'entropia in teoria ergodica; analizziamo questo procedimento.

**Definizione 1.2.1.** Una partizione misurabile dello spazio probabilizzato  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  è una famiglia  $\mathcal{P} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$  di insiemi misurabili tale che  $C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset$  per  $\alpha \neq \beta$  e che  $\mu(X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha) = 0$ . Se la famiglia  $I$  di indici è finita, la partizione si dice finita; se è numerabile, la partizione si dice numerabile.

**Definizione 1.2.2.** Si definisce entropia della partizione finita  $\mathcal{P}$  il numero reale

$$H(\mathcal{P}) = - \sum_{\substack{i=1 \\ \mu(C_i) > 0}}^r \mu(C_i) \log \mu(C_i)$$

Osserviamo che tale numero è l'integrale rispetto alla misura  $\mu$  della funzione informazione

$$\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(x) = - \sum_{i=1}^r \chi_{C_i}(x) \log \mu(C_i)$$

Date due partizioni  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$ , si definisce il *prodotto* delle due partizioni

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{C \cap D \mid C \in \mathcal{P}, D \in \mathcal{Q}\}$$

che è ancora una partizione misurabile. Si verifica facilmente che per ogni coppia di partizioni  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  si ha

$$H(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq H(\mathcal{P}) + H(\mathcal{Q})$$

il che permette di dimostrare il

**Lemma 1.2.1.** Per ogni partizione  $\mathcal{P}$ , esiste il limite

$$h(T, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{P}_n^T)$$

dove  $\mathcal{P}_n^T = \mathcal{P} \vee T^{-1}(\mathcal{P}) \vee \dots \vee T^{-(n-1)}(\mathcal{P})$ .

Abbiamo ora una quantità che dipende dalla mappa e dalla partizione scelta; per ottenere un invariante che non dipenda dalla partizione utilizziamo la seguente

**Definizione 1.2.3.** Si definisce entropia di Kolmogorov-Sinai (o entropia metrica) dell'endomorfismo  $T$

$$h(T) = \sup_{\mathcal{P}} h(T, \mathcal{P})$$

dove il sup è calcolato su tutte le partizioni misurabili finite.

In pratica, per il calcolo dell'entropia è spesso sufficiente trovare una *partizione generatrice*

**Definizione 1.2.4.** Una partizione finita  $\mathcal{P}$  si dice generatrice se la minima  $\sigma$ -algebra che contiene tutti gli insiemi del tipo  $T^n(C_i)$  con  $1 \leq i \leq r$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  è  $\mathcal{A}$ .

**Teorema 1.2.2.** (Sinai) Dato un sistema dinamico misurabile  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  e una partizione generatrice  $\mathcal{P}$ , allora

$$h(T) = h(T, \mathcal{P})$$

**Esempio.** (Rotazioni sul toro)

Sia  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  e  $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$  definita da

$$R_\alpha : x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$$

Allora la partizione  $\mathcal{P} = \{[0, 1/2) \cup [1/2, 1)\}$  è generatrice per  $(S^1, R_\alpha, \mathcal{B}, m)$ , dove  $\mathcal{B}$  è l'algebra dei boreliani e  $m$  la misura di Lebesgue. Per induzione si dimostra che per ogni  $N \leq 1$  la partizione  $\mathcal{P}_N^T$  è costituita da  $2N$  segmenti; da questo per la disuguaglianza di Jensen applicata alla funzione convessa  $x \mapsto x \log x$  per  $x > 0$  si ha

$$h(R_\alpha, \mathcal{P}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{-\sum_{C_i \in \mathcal{P}_{N-1}^T} \mu(C_i) \log \mu(C_i)}{N} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(2N)}{N} = 0$$

quindi per il teorema di Sinai l'entropia è nulla.

**Esempio.** (Schemi di Bernoulli)

Fissiamo  $N > 0$  intero e sia  $X = (\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}})^{\mathbb{N}}$ , che possiamo vedere come lo spazio delle successioni infinite di cifre comprese fra 0 e  $N-1$ . Tale spazio è fornito della  $\sigma$ -algebra  $\mathfrak{S}$  prodotto fra le  $\sigma$ -algebre discrete sui vari  $\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}$ ; data una  $N$ -upla  $(p_0, \dots, p_{N-1})$  di reali non negativi con  $\sum_{i=0}^{N-1} p_i = 1$  possiamo definire una misura su  $\mathfrak{S}$  definendola sui cilindri:

$$\mu(\{(x_0, x_1, \dots) \mid x_0 = r_0, \dots, x_k = r_k\}) = p_{r_0} p_{r_1} \cdots p_{r_k}$$

Considerando la mappa  $\sigma : X \rightarrow X$  di shift definita da  $\sigma((x_0, x_1, \dots)) = (x_1, x_2, \dots)$  (rispetto a cui la  $\mu$  è invariante), si ottiene che la partizione  $\mathcal{C} = \{C_0, \dots, C_{N-1}\}$  con

$$C_k = \{(x_0, x_1, \dots) \mid x_0 = k\}$$

è generatrice e

$$\begin{aligned} h(\sigma, \mathcal{C}_n^T) &= - \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=1}^{N-1} p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_n} \log(p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_n}) = \\ &= - \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=1}^{N-1} p_{k_1} \cdots p_{k_n} \sum_{j=1}^n \log(p_{k_j}) = -n \sum_{i=0}^{N-1} p_i \log p_i \end{aligned}$$

quindi per il teorema di Sinai

$$h(\sigma) = h(\sigma, \mathcal{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(\sigma, \mathcal{C}_n^T) = - \sum_{i=0}^{N-1} p_i \log p_i$$

**Osservazione.** E' evidente dalla costruzione che due sistemi dinamici misurabili isomorfi hanno la stessa entropia; è stato inoltre dimostrato ([20]) che due schemi di Bernoulli con la stessa entropia sono isomorfi.

### 1.3 Sistemi fibrati ed estensione naturale

Gli schemi di Bernoulli definiti nell'esempio precedente costituiscono un sistema dinamico in cui le traiettorie sono descritte da sequenze di simboli presi da un insieme (in questo caso finito); vedremo che una grandissima parte di sistemi dinamici è riconducibile a questo esempio. Per descrivere la situazione generale, utilizziamo la teoria dei *sistemi fibrati* seguendo l'approccio di F. Schweiger [24].

**Definizione 1.3.1.** Un sistema fibrato è il dato di una coppia  $(X, T)$ , dove  $X$  è un insieme e  $T : X \rightarrow X$  una funzione, e di una mappa  $k : X \rightarrow I$  da  $X$  in un insieme  $I$  di indici, detto alfabeto, tale che per ogni  $i \in I$  la restrizione  $T|_{k^{-1}(i)}$  è iniettiva. Gli insiemi  $B(i) = k^{-1}(i)$  sono detti cilindri di rango 1.

In particolare un sistema dinamico misurabile  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  si dice *sistema fibrato misurabile* se  $(X, T)$  è un sistema fibrato e per ogni  $i \in I$ ,  $B(i) \in \mathcal{A}$ .

**Definizione 1.3.2.** Dato un intero positivo  $k$ , si chiamano cilindri di rango  $k$  gli insiemi della forma

$$B(i_1, \dots, i_k) = B(i_1) \cap T^{-1}B(i_2) \cap \dots \cap T^{-(k-1)}B(i_k)$$

per una qualche  $k$ -upla di indici  $(i_1, \dots, i_k) \in I^k$ . Un cilindro  $B(i_1, \dots, i_k)$  si dice pieno se  $T^k(B(i_1, \dots, i_k)) = X$ .

Vediamo ora che un sistema fibrato è riconducibile a una mappa di tipo shift:

**Proposizione 1.3.1.** Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un sistema fibrato misurabile; si pone  $\Omega = I^{\mathbb{N}}$ ,  $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$  e  $\phi : X \rightarrow \Omega$  la mappa di rappresentazione definita da

$$(\phi(x))_i = k(T^i(x)) \text{ per } i \geq 0$$

Allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \Omega & \xrightarrow{\sigma} & \Omega \end{array}$$

è commutativo.

Osserviamo che possiamo definire una misura  $\nu$  su  $\Omega$  (prendendo come  $\sigma$ -algebra  $\mathfrak{S} = \times_{i \in I} \mathcal{P}(I)$ , dove  $\mathcal{P}(I)$  è la  $\sigma$ -algebra delle parti di  $I$ ) mediante la formula

$$\nu(\{(x_0, x_1, \dots, x_r, \dots) \mid x_0 = i_0, \dots, x_r = i_r\}) = \mu(B(i_0, \dots, i_r))$$

Questa definizione rende  $(\Omega, \mathfrak{S}, \nu, \sigma)$  un sistema dinamico misurabile e la  $\phi$  misurabile, con  $\phi_{\#}\mu = \nu$ . Di conseguenza se  $\phi$  è iniettiva e  $\phi^{-1}$  è misurabile, allora  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  è isomorfo a un sottosistema di  $(\Omega, \mathfrak{S}, \nu, \sigma)$ .

**Definizione 1.3.3.** Una sequenza  $(i_0, \dots, i_n, \dots)$  in  $\Omega$  si dice ammissibile se appartiene all'immagine di  $\phi$ .

Nel caso degli schemi di Bernoulli notiamo che la mappa  $\sigma$  di shift non è iniettiva, però possiamo trovare un'estensione del sistema dinamico definito da un endomorfismo invertibile: in particolare consideriamo

$$\tilde{\Omega} = \left( \frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}} \right)^{\mathbb{Z}} = \{(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \mid 0 \leq x_i \leq N-1\}$$

e  $\tilde{\sigma} : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$  tale che  $(\tilde{\sigma}(x))_i = x_{i+1}$ ; definendo

$$\tilde{\mu}\{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_{i_1} = r_1, \dots, x_{i_k} = r_k\} = p_{r_1} p_{r_2} \dots p_{r_k}$$

otteniamo un sistema dinamico misurabile tale che, detta  $\pi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  la proiezione  $(\pi(x))_i = x_i$  per  $i \geq 0$ , rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \tilde{\Omega} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Omega & \xrightarrow{\sigma} & \Omega \end{array}$$

quindi  $\Omega$  è un fattore di  $\tilde{\Omega}$ , con  $\tilde{\sigma}$  invertibile.

Sia ora in generale  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un sistema dinamico misurabile e consideriamo l'insieme

$$\tilde{X} = \{(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots) \in X^{\mathbb{N}} \mid T(x^{(i+1)}) = x^{(i)} \forall i \geq 0\}$$

Definiamo  $\tilde{\mathcal{A}}$  la  $\sigma$ -algebra generata dagli insiemi della forma

$$A_{i, C_0, \dots, C_i} = \{x = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots) \in \tilde{X} \mid x^{(0)} \in C_0, \dots, x^{(i)} \in C_i\}$$

con  $i \geq 0$ ,  $C_0, \dots, C_i \in \mathcal{A}$ . Definiamo poi una funzione  $\sigma$ -additiva su questi insiemi:

$$\tilde{\mu}(A_{i, C_0, \dots, C_i}) = \mu(T^{-i}C_0 \cap T^{-i+1}C_1 \cap \dots \cap C_i)$$

Quella così definita è una misura sui cilindri di un prodotto infinito di spazi di probabilità che per il teorema di Kolmogorov può essere estesa a una misura di probabilità su tutta la  $\sigma$ -algebra  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Definiamo infine  $\tilde{T} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  la trasformazione

$$\tilde{T}(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots) = (T(x^{(0)}), T(x^{(1)}), \dots)$$

Essa è invertibile (l'inversa è  $T^{-1}(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots) = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$ ), la misura  $\tilde{\mu}$  è invariante rispetto ad essa e il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{T}} & \tilde{X} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

commuta (dove  $\pi$  è la proiezione  $(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots) \mapsto x^{(0)}$ ); quindi  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$  è un'estensione invertibile del sistema  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ . Tale sistema si dice *estensione naturale*<sup>1</sup> di  $X$ .

L'estensione naturale non è solo un'estensione invertibile del sistema di partenza; essa è la "minima" estensione invertibile nel senso che soddisfa la proprietà universale:

**Proposizione 1.3.2.** *Per ogni morfismo  $\phi : (Y, \mathcal{B}, \nu, S) \rightarrow (X, \mathcal{A}, \mu, T)$  di sistemi dinamici misurabili tale che  $S$  sia invertibile esiste un unico morfismo  $\tilde{\phi} : (Y, \mathcal{B}, \nu, S) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$  tale che  $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi$ .*

*Dimostrazione.* La condizione  $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi$  equivale alla commutatività del diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{S} & Y & & \\
 \downarrow \tilde{\phi} & \searrow \phi & & \swarrow \phi & \downarrow \tilde{\phi} \\
 & X & \xrightarrow{T} & X & \\
 \uparrow \pi & & & & \uparrow \pi \\
 \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{T}} & \tilde{X} & & 
 \end{array}$$

Seguendo le frecce si scopre che l'unica mappa che rispetta le condizioni è definita da

$$\tilde{\phi}(y) = (\phi(y), \phi(S^{-1}(y)), \phi(S^{-2}(y)), \dots)$$

per ogni  $y \in Y$ . □

**Proposizione 1.3.3.** *La misura  $\mu$  è ergodica per  $T$  se e solo se  $\tilde{\mu}$  è ergodica per  $\tilde{T}$ .*

*Dimostrazione.* Se  $C \subset X$  è invariante per  $T$ , allora  $\tilde{C} = \pi^{-1}(C)$  è invariante per  $\tilde{T}$  e  $\mu(C) = \tilde{\mu}(\tilde{C})$ ; di conseguenza, se  $T$  non è ergodica, allora neanche  $\tilde{T}$  lo è. Supponiamo ora che  $\tilde{T}$  sia ergodica. Per il teorema ergodico di Von Neumann per ogni  $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$  si ha la convergenza in  $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$  delle medie temporali; per la densità di  $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$  in  $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$  e utilizzando il fatto che  $\|\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$  si può estendere il risultato alla convergenza  $L^1$  delle medie temporali per osservabili in  $L^1$ ; per l'ergodicità vale che per ogni  $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = \int_X f d\mu \text{ in } L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \quad (1.3)$$

Questo implica che se  $F \in L^1(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$  è della forma  $F = f \circ \pi_i$  con  $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $\pi_i : (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots) \mapsto x^{(i)}$  allora in  $L^1(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F \circ \tilde{T}^k = \int_{\tilde{X}} F d\tilde{\mu} \quad (1.4)$$

<sup>1</sup>La costruzione dell'estensione naturale si deve a V.A.Rohlin [22].

Se ora consideriamo  $G \in L^1(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$  che dipende solo dalle prime  $i + 1$  coordinate, cioè della forma  $G(x) = g(x^{(0)}, \dots, x^{(i)})$ , abbiamo per la costruzione di  $\tilde{X}$  che  $G(x) = g(T^i(x^{(i)}), T^{i-1}(x^{(i)}), \dots, x^{(i)})$  quindi è anch'essa della forma  $G = f \circ \pi_i$ ; di conseguenza le funzioni del tipo  $f \circ \pi_i$  sono dense in  $L^1(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$  e quindi la relazione (1.4) vale per ogni funzione  $F \in L^1(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ ; di conseguenza una sottosuccessione delle somme di Birkhoff converge q.o. a una costante e questa deve coincidere con il limite dato dal teorema di Birkhoff; per la proposizione 1.1.2 la  $\tilde{T}$  è ergodica.  $\square$

## 1.4 Dinamica dell'intervallo

Sia  $I$  un intervallo chiuso e limitato di  $\mathbb{R}$ . I sistemi dinamici definiti su  $I$  sono tra gli esempi più studiati e risultati diversi sono stati ottenuti considerando mappe più o meno regolari. In questa tesi studieremo mappe regolari a tratti, cioè esisterà una partizione  $\{I_j \mid j \in J\}$  di  $I$  in un numero finito o numerabile di intervalli per cui per ogni  $j \in J$   $T|_{I_j}$  è monotona e di classe almeno  $C^1$ .

**Definizione 1.4.1.** *Una funzione  $T : I \rightarrow I$  derivabile a tratti si dice espansiva se esiste  $c > 1$  tale che  $\inf_{x \in I} |T'(x)| \geq c$ .*

Il caso più semplice e studiato di queste mappe è quello in cui la restrizione di  $T$  a ciascun intervallo è surgettiva: in tal caso vale il seguente:

**Teorema 1.4.1.** (folklore theorem) *Sia  $T : I \rightarrow I$  una trasformazione espansiva tale per cui esiste una suddivisione di  $I$  in intervalli  $I_j$  per cui  $T|_{I_j}$  è un diffeomorfismo  $C^2$  fra  $I_j$  e  $I$ ; allora esiste un'unica misura di probabilità invariante su  $I$  che sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. La densità di tale misura invariante è continua e mai nulla.*

Per il calcolo dell'entropia è spesso utile il seguente

**Teorema 1.4.2.** (Formula di Rohlin) *Sia  $I$  un intervallo,  $T : I \rightarrow I$  misurabile, ergodica ed espansiva a tratti,  $\mu$  la misura invariante per  $T$  assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. Allora l'entropia di Kolmogorov-Sinai di  $T$  è data da*

$$h(T) = \int_I \log |T'| d\mu$$

## Capitolo 2

# Frazioni continue

Il procedimento di approssimazione di un numero reale mediante frazioni continue generalizza l'algoritmo di divisione euclidea ed era già noto nell'600; in tal modo si ottengono successioni di numeri razionali che approssimano molto velocemente il numero di partenza e soddisfano interessanti proprietà. In questo capitolo analizzeremo la costruzione standard e ne daremo un'interpretazione dinamica, per poi trattare le generalizzazioni di tale algoritmo ideate da Ito e Nakada negli anni '80, che saranno il materiale principale di studio del resto della tesi.

### 2.1 L'algoritmo classico

Sia  $x = \frac{p}{q}$  un numero razionale. L'algoritmo di divisione euclidea prevede che esistono  $a_0, r_0 \in \mathbb{Z}$  tali che

$$p = a_0q + r_0 \quad 0 \leq r_0 < q$$

Se ora  $r_0 \neq 0$ , possiamo scrivere

$$q = a_1r_0 + r_1 \quad a_1, r_1 \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r_1 < r_0$$

e allo stesso modo

$$\begin{aligned} r_0 &= a_2r_1 + r_2 & a_2, r_2 \in \mathbb{Z}, & \quad 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= a_3r_2 + r_3 & a_3, r_3 \in \mathbb{Z}, & \quad 0 \leq r_3 < r_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

fino a che non troviamo  $r_k = 0$ . A questo punto abbiamo una rappresentazione di  $x$

$$x = \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r_0}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}}} = \dots = \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}$$

mediante una successione finita  $(a_0, \dots, a_k)$  di numeri interi. Scriveremo  $x = [a_0, a_1, \dots, a_k]$  per indicare questa relazione. Notiamo che possiamo riscrivere le (2.1) come

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_0 + \frac{r_0}{q} & a_0 \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq \frac{r_0}{q} < 1 \\ & \vdots \\ \frac{r_{i-1}}{r_i} &= a_{i+1} + \frac{r_{i+1}}{r_i} & a_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq \frac{r_{i+1}}{r_i} < 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

e ponendo  $x_i = \frac{r_{i+1}}{r_i}$  si ottiene

$$\frac{1}{x_i} = a_{i+1} + x_{i+1} \quad a_{i+1} \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq x_{i+1} < 1$$

Di conseguenza si scopre che si possono ottenere i coefficienti dello sviluppo induttivamente ponendo

$$\begin{aligned} a_0 &= [x_0] & x_0 &= x - [x] \\ a_{i+1} &= \left[ \frac{1}{x_i} \right] & x_{i+1} &= \left\{ \frac{1}{x_i} \right\} \quad \forall i \geq 0 \end{aligned}$$

Osserviamo che per applicare tali formule non è necessario che  $x \in \mathbb{Q}$ ; partendo da  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  possiamo calcolare la successione degli  $a_i$  e degli  $x_i$ ; osserviamo che  $x_i \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x_{i+1} \in \mathbb{Q}$ , quindi partendo da  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  non potremo mai avere  $x_i = 0$  e l'algoritmo può proseguire per infiniti passi; in conclusione abbiamo trovato un modo per associare ad ogni  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  una successione  $(a_0, \dots, a_n, \dots)$ : in questo caso scriveremo

$$x = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$$

Uno dei motivi dell'interesse dello sviluppo in frazione continua è che permette di approssimare i numeri reali con delle frazioni: osserviamo che per ogni  $k$  vale l'identità

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k + x_k}}}}$$

essendo  $x_k$  "piccolo" ( $0 \leq x_k \leq 1$ ), possiamo ad ogni passo approssimare  $x$  con il razionale

$$[a_0, a_1, \dots, a_k] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}$$

Cerchiamo di determinare in modo più esplicito tali approssimazioni.

**Proposizione 2.1.1.** *Definiamo ricorsivamente*

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 1 & p_0 &= a_0 & p_{n+1} &= a_{n+1}p_n + p_{n-1} \\ q_{-1} &= 0 & q_1 &= a_1 & q_{n+1} &= a_{n+1}q_n + q_{n-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Allora per ogni  $n$  intero positivo

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

Tale numero viene detto  $n$ -esimo convergente alla frazione continua. Inoltre  $\forall n \geq 1$  valgono le relazioni

(1)

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n$$

(2)

$$x_n = \frac{q_n x - p_n}{p_{n-1} - x q_{n-1}}$$

(3)

$$x_0 x_1 \cdots x_n = (-1)^n (q_n x - p_n)$$

(4)

$$x - \frac{p_n}{q_n} = (-1)^{n-1} \frac{x_n}{q_n (q_n + x_n q_{n-1})}$$

*Dimostrazione.* Si dimostrano tutte per induzione, usando le (2.3); svolgiamo brevemente il passo induttivo:

(1)

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - p_n (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) = p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}$$

(2)

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} - a_{n+1} = \frac{p_{n-1} - x q_{n-1}}{q_n x - p_n} - a_{n+1} = \frac{-x(q_{n+1} + a_{n+1} q_n) + (p_{n-1} + p_n a_{n+1})}{q_n x - p_n}$$

(3)

$$x_0 \dots x_n = x_0 \prod_{i=1}^n \frac{q_i x - p_i}{p_{i-1} - x q_{i-1}} = (-1)^{n-1} \frac{x_0}{p_0 - x q_0} (q_n x - p_n) = (-1)^n (q_n x - p_n)$$

(4) Invertendo la (2)

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{x_n p_{n-1} + p_n}{q_n + x_n q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{x_n (p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1})}{q_n (q_n + x_n q_{n-1})}$$

e dalla (1) segue la tesi.  $\square$

**Corollario 2.1.2.** *I convergenti  $\{\frac{p_n}{q_n}\}$  con  $n$  dispari formano una successione decrescente, quelli con  $n$  pari una successione crescente e inoltre*

$$\lim_{\substack{n \equiv 0 \\ \text{mod } 2}} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{\substack{n \equiv 1 \\ \text{mod } 2}} \frac{p_n}{q_n} = x$$

Si è detto che le frazioni continue forniscono le migliori approssimazioni razionali a un dato numero reale; precisiamo questo fatto.

**Definizione 2.1.1.** La frazione  $\frac{a}{b}$  è una buona approssimazione di  $x \in \mathbb{R}$  se  $\forall \frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}, d \leq b$ , si ha  $|bx - a| < |dx - c|$ .

**Osservazione.** Se  $\frac{a}{b}$  è una buona approssimazione di  $x$ , allora per ogni  $d \leq b$  si ha  $|x - \frac{a}{b}| < |x - \frac{c}{d}|$ .

**Lemma 2.1.3.** Ogni buona approssimazione  $\frac{a}{b}$  di  $x \in \mathbb{R}$  è un convergente di  $x$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\frac{a}{b}$  una buona approssimazione. Poichè  $|x - a_0| \geq |x - \frac{a}{b}|$  allora  $\frac{a}{b} \geq \frac{p_0}{q_0}$ , che è il minimo dei convergenti. Poichè i convergenti pari tendono a  $x$  crescendo e quelli dispari vi tendono decrescendo, se  $\frac{a}{b}$  non fosse un convergente avremmo due casi:

- $\frac{a}{b}$  è compreso fra due convergenti  $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$  e  $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ .

Allora

$$\frac{1}{bq_{k-1}} \leq \left| \frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| < \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| = \frac{1}{q_k q_{k-1}}$$

quindi  $b > q_k$ . Si ha inoltre  $|x - \frac{a}{b}| \geq \left| \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{a}{b} \right| \geq \frac{1}{bq_{k+1}} \Rightarrow |bx - a| \geq \frac{1}{q_{k+1}}$  e d'altronde

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} \Rightarrow |q_k x - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}}$$

Dal momento che  $q_k < b$ , ciò contraddice il fatto che  $\frac{a}{b}$  sia una buona approssimazione.

- $\frac{a}{b} > \frac{p_1}{q_1}$ ; allora

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| > \left| \frac{p_1}{q_1} - \frac{a}{b} \right| \geq \frac{1}{bq_1} \Rightarrow |bx - a| > \frac{1}{q_1} \geq 1$$

il che è assurdo perchè per la proprietà di buona approssimazione deve valere  $|bx - a| = \min_{h \in \mathbb{Z}} |bx - h|$

□

**Lemma 2.1.4.** Se  $\frac{p_k}{q_k}$  è un convergente di  $x$ , allora  $\forall \frac{p}{q}, q \leq q_k$ , si ha  $|q_k x - p_k| \leq |qx - p|$ .

*Dimostrazione.* Sia  $N = \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2, 0 < q \leq q_k \text{ t.c. } |q_k x - p_k| > |qx - p|\}$ . Se  $N \neq \emptyset$ , possiamo considerare l'elemento  $(\bar{p}, \bar{q})$  per cui l'espressione  $|qx - p|$  assume valore minimo. Allora per il lemma precedente  $\frac{\bar{p}}{\bar{q}}$  è un convergente  $\frac{p_i}{q_i}$  per un qualche  $i \leq k$ . Se  $i < k$ ,

$$\left| x - \frac{\bar{p}}{\bar{q}} \right| > \frac{1}{q_i(q_i + q_{i+1})} \Rightarrow |q_i x - p_i| > \frac{1}{q_i + q_{i+1}} \geq \frac{1}{q_{k-1} + q_k}$$

(dove si è usato  $a_{i+1} \leq \frac{1}{x_i} \leq a_{i+1} + 1$ ). Si ha  $|q_k x - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}}$  e  $|q_i x - p_i| \leq |q_k x - p_k|$ , da cui  $q_{k+1} < q_k + q_{k-1}$ , che è assurdo. □

**Teorema 2.1.5.** Sia  $x = [a_0, a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Se la successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è limitata, allora esiste  $C > 0$  tale che la disuguaglianza

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^2}$$

non ha soluzioni  $(p, q)$ . Se invece  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è limitata, l'equazione ha infinite soluzioni per ogni  $C > 0$ .

Lo sviluppo in frazione continua ha un'interessante interpretazione dinamica: consideriamo infatti la trasformazione

**Definizione 2.1.2.** Si chiama mappa di Gauss l'applicazione  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tale mappa è di classe  $C^\infty$  su ciascuno degli intervalli  $I_j \left( \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right]$ , (infatti  $T|_{I_j}(x) = \frac{1}{x} - j$ ). Al variare di  $j$  fra gli interi positivi, gli  $I_j$  formano una partizione di  $(0, 1]$ ; dato  $x \in [0, 1]$  ponendo

$$\begin{aligned} x_n &= T^n(x) \\ a_0 &= 0 \\ a_{n+1} &= \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor \end{aligned}$$

si ottengono i coefficienti  $a_n$  dello sviluppo in frazione continua di  $x$ ; notiamo inoltre che

$$a_{n+1} = j \Leftrightarrow T^n(x) \in I_j$$

quindi i coefficienti  $a_n$ , detti anche *quozienti parziali*, indicano i rami su cui si trovano gli elementi dell'orbita di  $x$  per l'azione della  $T$ . Infine, l'immagine di ogni intervallo  $I_j$  è  $[0, 1)$ , quindi l'esistenza di una misura di probabilità invariante è assicurata dal teorema 1.4.1; studieremo più in dettaglio questa misura nel capitolo 3.

## 2.2 Le $\alpha$ -frazioni continue

La descrizione dello sviluppo in frazione continua come iterazione della mappa di Gauss rende esplicita la possibilità di generalizzazioni. In tal caso infatti ad ogni iterazione la  $T$  sceglie un  $c \in \mathbb{Z}$  e agisce con  $x \mapsto \frac{1}{x} - c$ ; nel caso della mappa di Gauss si aveva  $c = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ . In generale possiamo associare a ogni  $x$  una successione  $[(\epsilon_1, a_1), (\epsilon_2, a_2), \dots]$  con  $\epsilon_n \in \{+1, -1\}$ ,  $a_n \in \mathbb{Z}$  e ottenere uno sviluppo del tipo

$$x = a_0 + \frac{\epsilon_1}{a_1 + \frac{\epsilon_2}{a_2 + \dots}}$$

In questo modo l'orbita di  $x$  è definita da

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = \frac{\epsilon_{n+1}}{x_n} - a_{n+1} \end{cases}$$

e si può generalizzare il concetto di convergente tramite le formule

**Definizione 2.2.1.** *Si definiscono ricorsivamente*

$$\begin{array}{lll} p_{-1} = 1 & p_0 = a_0 & p_{n+1} = \epsilon_{n+1}p_{n-1} + a_{n+1}p_n \\ q_{-1} = 0 & q_0 = 1 & q_{n+1} = \epsilon_{n+1}q_{n-1} + a_{n+1}q_n \end{array}$$

**Proposizione 2.2.1.** *Valgono le seguenti relazioni:*

(1)

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n \prod_{j=1}^n \epsilon_j \quad \forall n \geq 1$$

(2)

$$x_n = \frac{q_n x - p_n}{p_{n-1} - x q_{n-1}} \quad \forall n \geq 1$$

(3)

$$x_0 x_1 \cdots x_n = (-1)^n (q_n x - p_n) \quad \forall n \geq 0$$

(4)

$$x - \frac{p_n}{q_n} = (-1)^n \prod_{j=1}^{n-1} \epsilon_j \frac{x_n}{q_n (q_n + x_n q_{n-1})} \quad \forall n \geq 1$$

Lo schema introdotto consente di formulare numerose generalizzazioni dell'algoritmo classico di sviluppo in frazione continua; in questo senso ogni algoritmo corrisponde alla scelta di opportuni coefficienti  $[(\epsilon_1, a_1), (\epsilon_2, a_2), \dots]$  da associare ad  $x$ . In questo lavoro di tesi ci si concentrerà su due casi particolari ideati da alcuni matematici giapponesi negli anni '80, e per questo spesso noti in letteratura come *frazioni continue giapponesi*. Diamo la prima

**Definizione 2.2.2.** *Sia  $\alpha \in [0, 1]$ . Per ogni  $x \in [\alpha - 1, \alpha]$  si considera*

$$\epsilon_n(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x_{n-1} \geq 0 \\ -1 & \text{se } x_{n-1} < 0 \end{cases}$$

$$a_n(x) = \left\lfloor \left| \frac{1}{x_{n-1}} \right| + 1 - \alpha \right\rfloor$$

Chiameremo tale sviluppo  $\alpha$ -frazione continua di Nakada (cfr.[17]). Esso si può ottenere dalle iterazioni della mappa  $T_\alpha : [\alpha - 1, \alpha] \rightarrow [\alpha - 1, \alpha]$

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} \left| \frac{1}{x} \right| - \left\lfloor \left| \frac{1}{x} \right| + 1 - \alpha \right\rfloor & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che per  $\alpha = 1$  si ritrova la mappa di Gauss; cambiare il parametro  $\alpha$  corrisponde a prendere  $[\alpha - 1, \alpha]$  come dominio fondamentale per la traslazione  $x \mapsto x + 1$  (si noti che le trasformazioni che producono lo sviluppo in frazione continua appartengono al *gruppo modulare*  $PSL(2, \mathbb{Z})$  e che questo è generato dai due elementi  $x \mapsto x + 1$  e  $x \mapsto -\frac{1}{x}$ ).

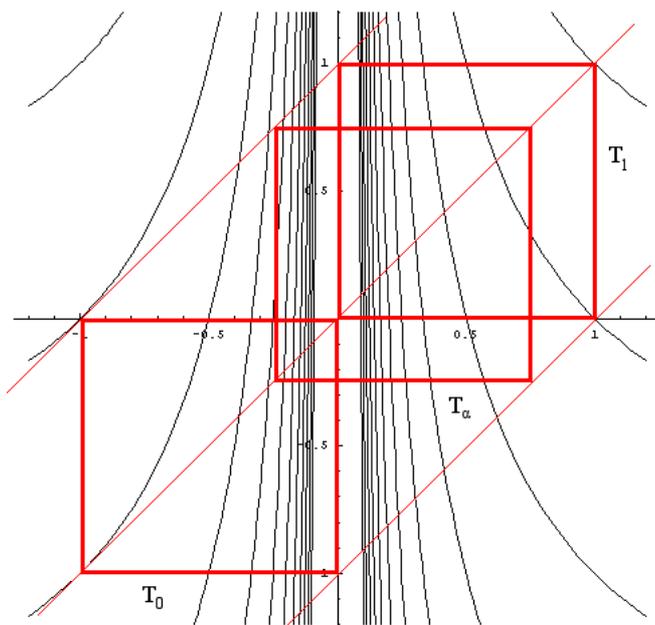


Figura 2.1: La famiglia delle  $T_\alpha$

La mappa  $T_\alpha$  coincide con la funzione  $x \mapsto \frac{1}{x} - j$  sugli intervalli

$$I_j^+ = \left( \frac{1}{j+\alpha}, \frac{1}{j-1+\alpha} \right] \quad (j \in \mathbb{Z}, j > j_M)$$

$$I_{j_M}^+ = \left( \frac{1}{j_M+\alpha}, \alpha \right]$$

e con la funzione  $x \mapsto -\frac{1}{x} - j$  sugli intervalli

$$I_j^- = \left[ -\frac{1}{j+\alpha-1}, -\frac{1}{j+\alpha} \right) \quad (j \in \mathbb{Z}, j < j_m)$$

$$I_{j_m}^- = \left[ \alpha - 1, -\frac{1}{j_m+\alpha} \right)$$

con

$$j_M = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} + 1 - \alpha \right\rfloor \quad j_m = \left\lceil \frac{1}{1-\alpha} + 1 - \alpha \right\rceil$$

Il primo risultato fondamentale è che anche in questo caso la successione dei convergenti converge a  $x$ :

**Proposizione 2.2.2.** Sia  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Per ogni  $x \in [\alpha - 1, \alpha]$  irrazionale,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n,\alpha}(x)}{q_{n,\alpha}(x)} = x$$

*Dimostrazione.* Si utilizza il seguente

**Lemma 2.2.3.** Per ogni  $n \geq 1$ , per ogni  $x \in [\alpha - 1, \alpha]$  si ha

$$q_{\alpha,n+1}(x) > q_{\alpha,n}(x) \quad (\text{quindi } \lim_{n \rightarrow \infty} q_{\alpha,n}(x) = \infty)$$

*Dimostrazione.* Per induzione; se  $\epsilon_{\alpha,n+1} = +1$  allora  $a_{\alpha,n+1} \geq 1$  e  $q_{\alpha,n+1} \geq q_{\alpha,n-1} + q_{\alpha,n} > q_{\alpha,n}$ . Se  $\epsilon_{\alpha,n+1} = -1$  allora  $a_{\alpha,n+1} \geq 2$  (perchè  $j_M \geq 2$ ) e  $q_{\alpha,n+1} \geq 2q_{\alpha,n} - q_{\alpha,n-1} \geq q_{\alpha,n} + 1$ .  $\square$

Dalle stime  $|x_n| \leq 1$ ,  $q_{\alpha,n} + x_n q_{\alpha,n-1} \geq \alpha q_{\alpha,n}$  si ottiene per il punto (4) della proposizione 2.2.1

$$\left| x - \frac{p_{\alpha,n}}{q_{\alpha,n}} \right| = \frac{|x_n|}{q_{\alpha,n}(q_{\alpha,n} + x_n q_{\alpha,n-1})} \leq \frac{1}{\alpha q_{\alpha,n}^2}$$

$\square$

L'algoritmo di Nakada permette per  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  di approssimare  $x$  tramite frazioni continue più velocemente che nel caso classico; questo è dovuto al fatto che i convergenti sono una sottosuccessione della successione dei convergenti determinati dall'algoritmo classico.

**Proposizione 2.2.4.** ([16], lemma 1.8) Fissato  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , sia  $k^\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  la funzione definita induttivamente da  $k^\alpha(-1) = -1$  e

$$k^\alpha(n+1) = \begin{cases} k^\alpha(n) + 1 & \text{se } x_{n+1} \geq 0 \\ k^\alpha(n) + 2 & \text{se } x_{n+1} < 0 \end{cases}$$

Allora  $k^\alpha$  è una funzione strettamente crescente e per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{p_{n,\alpha}}{q_{n,\alpha}} = \frac{p_{k^\alpha(n)}}{q_{k^\alpha(n)}}$$

dove i  $p_k/q_k$  sono i convergenti dell'algoritmo classico. Inoltre se  $k^\alpha(n+1) = k^\alpha(n) + 2$ , vale la relazione  $q_{k^\alpha(n+1)} = q_{k^\alpha(n)+2} = q_{k^\alpha(n)+1} + q_{k^\alpha(n)}$ .

Nel seguito della tesi studieremo la mappa  $T_\alpha$  dal punto di vista della teoria ergodica; in particolare dimostreremo che per  $\alpha \in (0, 1]$  le  $T_\alpha$  hanno un'unica misura di probabilità invariante e che questa è ergodica. Assumendo questi fatti, il seguente risultato mette in relazione l'entropia di Kolmogorov-Sinai di  $T_\alpha$  con il tasso di crescita delle  $q_{\alpha,n}$ .

**Proposizione 2.2.5.** L'entropia della mappa  $T_\alpha$  è data da

$$h(T_\alpha) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log q_{\alpha,n} \quad (2.4)$$

per  $\mu_\alpha$ -q.o.  $x \in [\alpha - 1, \alpha]$ , dove  $\mu_\alpha$  è la misura invariante per  $T_\alpha$ .

*Dimostrazione.* Per il punto (3) della proposizione 2.2.1

$$|x_0 x_1 \dots x_n| = q_{\alpha,n} \left| x - \frac{p_{\alpha,n}}{q_{\alpha,n}} \right|$$

e per il punto (4)

$$\frac{|x_n|}{2q_{\alpha,n}^2} \leq \left| x - \frac{p_{\alpha,n}}{q_{\alpha,n}} \right| = \frac{|x_n|}{q_{\alpha,n}(q_{\alpha,n} + q_{\alpha,n-1}x_n)} \leq \frac{1}{\alpha q_{\alpha,n}^2}$$

quindi

$$\frac{1}{n}(\log q_{\alpha,n} + \log \alpha) \leq -\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \log |x_i| \leq \frac{1}{n}(\log q_{\alpha,n+1} + \log 2)$$

e per il teorema di Birkhoff nel caso ergodico

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log q_{\alpha,n} = - \int_{[\alpha-1, \alpha]} \log |x| d\mu_\alpha$$

per  $\mu_\alpha$ -q.o.  $x \in [\alpha-1, \alpha]$ . Per la formula di Rohlin  $h(T_\alpha) = \int_{[\alpha-1, \alpha]} \log |T'_\alpha| d\mu_\alpha = 2 \int_{[\alpha-1, \alpha]} \log |x| d\mu_\alpha$ , il che implica la tesi.  $\square$

**Osservazione.** Grazie alla proposizione precedente possiamo trovare un'ulteriore interpretazione per l'entropia delle frazioni continue. Se invece di sviluppare un numero reale in frazione continua utilizziamo la consueta rappresentazione in base  $b$ , la conoscenza di  $n$  cifre identifica il numero di partenza a meno di un errore che possiamo stimare con  $\Delta_n = \frac{1}{b^n}$ ; in questo caso si ha che  $\log b = -\frac{1}{n} \log \Delta_n$ . Di conseguenza il logaritmo della base è stimato dalla velocità di convergenza dell'algoritmo di approssimazione. Nel caso delle frazioni continue al passo  $n$ -esimo l'approssimante è  $\frac{p_n}{q_n}$  e  $\Delta_n = \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|$  è stimabile con  $\frac{1}{q_n^2}$ , quindi  $-\frac{1}{n} \log \Delta_n \cong \frac{2}{n} \log q_n$ . In conclusione se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \log q_n$  esiste, questo stima il logaritmo della base  $b$  per cui lo sviluppo in frazione continua e lo sviluppo in base  $b$  codificano la stessa quantità di informazione a parità di numero di cifre.

## 2.2.1 Sviluppo in frazione continua per eccesso

La mappa ottenuta per  $\alpha = 0$  produce uno sviluppo del tipo

$$x = a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \dots}}$$

con gli  $a_i$  positivi. Il fatto che  $T_0$  abbia un punto fisso indifferente (cioè con  $|T'_0(x)| = 1$ ) in  $x = -1$  rende tale applicazione piuttosto diversa dal punto di vista dinamico dalle  $T_\alpha$  con  $\alpha > 0$  (ad esempio non esiste una misura invariante finita assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue); nel resto della tesi ci concentreremo sul caso  $\alpha > 0$ .

## 2.2.2 Le frazioni continue di Ito

La seconda generalizzazione della mappa di Gauss che prenderemo in considerazione è la seguente:

**Definizione 2.2.3.** Sia  $\alpha \in [0, 1]$ . Per ogni  $x \in [\alpha - 1, \alpha]$ , lo sviluppo ottenuto dalle iterazioni della mappa  $S_\alpha : [\alpha - 1, \alpha] \rightarrow [\alpha - 1, \alpha]$

$$S_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} + 1 - \alpha \rfloor & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

si chiama  $\alpha$ -frazione continua di Ito ([27]). Per ogni  $x$  valgono le formule

$$\begin{aligned} \epsilon_n(x) &= +1 \quad \forall n \\ a_n(x) &= \lfloor \frac{1}{x_{n-1}} + 1 - \alpha \rfloor \end{aligned}$$

**Osservazione.** Notiamo che a meno di un insieme di misura nulla vale l'identità  $S_\alpha(-x) = -S_{1-\alpha}(x)$ , quindi  $S_\alpha$  e  $S_{1-\alpha}$  sono coniugate; è sufficiente pertanto considerare i valori di  $\alpha$  compresi fra  $\frac{1}{2}$  e 1.

Per tali sviluppi vale un analogo della proposizione 2.2.4:

**Lemma 2.2.6.** ([27], 2.2) Per ogni intero  $n \geq 0$ , esiste un intero  $m \geq n$  tale che vale uno dei due casi:

- $p_{n,\alpha} = \pm p_m \quad q_{n,\alpha} = \pm q_m$
- $p_{n,\alpha} = \pm(p_{m+1} + p_m) \quad q_{n,\alpha} = \pm(q_{m+1} + q_m)$

dove  $p_{n,\alpha}$  e  $q_{n,\alpha}$  sono determinati da  $S_\alpha$  mentre  $p_m$  e  $q_m$  sono determinati dalla mappa di Gauss.

**Corollario 2.2.7.** Per ogni  $x \in [\alpha - 1, \alpha]$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n,\alpha}}{q_{n,\alpha}} = x$ .

## Capitolo 3

# Estensione naturale e densità invariante

### 3.1 I sistemi duali

I primi articoli in cui sono state definite le trasformazioni di frazione continua giapponesi contenevano il calcolo esplicito della densità invariante per  $\alpha$  appartenente ad alcuni intervalli dello spazio dei parametri; tale calcolo viene eseguito trovando una particolare realizzazione dell'estensione naturale di questi sistemi dinamici, basata sul concetto di *sistema duale*.

**Definizione 3.1.1.** *Dato un sistema fibrato  $(X, T)$  con alfabeto  $I$ , il sistema fibrato  $(X^\#, T^\#)$  con alfabeto  $I$  si dice duale di  $(X, T)$  se per ogni  $(i_1, \dots, i_n) \in I^n$  vale la condizione*

$$B(i_1, \dots, i_n) \text{ è ammissibile per } T \Leftrightarrow B^\#(i_n, \dots, i_1) \text{ è ammissibile per } T^\#$$

dove i  $B^\#(i_n, \dots, i_1)$  sono i cilindri per  $T^\#$ .

**Notazione.** *Tutti gli elementi che si riferiscono al sistema dinamico  $(X^\#, T^\#)$  saranno denotati da  $\#$ ; si ha quindi  $k^\# : X^\# \rightarrow I$  la funzione di rappresentazione,  $B^\#(i_1, \dots, i_n)$  i cilindri. Dato  $k \in I$ , denotiamo con  $V_k : T(B(k)) \rightarrow B(k)$  le inverse delle restrizioni di  $T$  ai cilindri di rango 1 e allo stesso modo siano  $V_k^\#$  le inverse locali di  $T^\#$ .*

Sia  $\mu$  una misura sulla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}$  generata dai cilindri del sistema  $(X, T)$ . Allora possiamo definire una funzione  $\mu^\#$   $\sigma$ -additiva sui cilindri di  $X^\#$  mediante la formula

$$\mu^\#(B^\#(i_n, \dots, i_1)) = \mu(B(i_1, \dots, i_n))$$

E' di immediata verifica il

**Lemma 3.1.1.** *Se  $\mu$  è invariante per  $T$ , allora  $\mu^\#$  può essere estesa a una misura sulla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}_\#$  invariante per  $T^\#$ .*

La nostra estensione naturale sarà definita su un sottoinsieme di  $X \times X^\#$ ; l'idea è che per ogni  $x \in X$  si selezionano gli elementi di  $X^\#$  che corrispondono alle possibili storie passate di  $x$ . Formalmente dato  $x \in X$  diamo la

**Definizione 3.1.2.**

$$D(x) = \{y \in X^\# \mid \forall n \geq 1 \ y \in B^\#(i_1, \dots, i_n) \Leftrightarrow T^{-n}(x) \cap B(i_n, \dots, i_1) \neq \emptyset\}$$

Consideriamo il seguente sistema dinamico:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \{(x, y) \mid x \in X, y \in D(x)\} \\ \bar{T} : \bar{X} &\rightarrow \bar{X} \\ (x, y) &\mapsto (T(x), V_{k(x)}^\#(y)) \end{aligned}$$

Questo sistema nei casi che ci interesseranno ci dà una rappresentazione dell'estensione naturale isomorfa a quella fornita nel capitolo 1.

**Proposizione 3.1.2.** *Supponiamo che valga la proprietà:*

*Per ogni successione  $(i_n) \in I^\mathbb{N}$ , se  $B^\#(i_0, \dots, i_r) \neq \emptyset$  per ogni  $r$ , allora  $\bigcap_{i=1}^\infty B^\#(i_0, \dots, i_r)$  ha esattamente un elemento.*

Allora  $\bar{X}$  è isomorfo a  $\tilde{X}$ .

*Dimostrazione.* Definiamo  $\psi : \bar{X} \rightarrow \tilde{X}$

$$\psi(x, y) = (x, V_{k^\#(y)}x, V_{k^\#(T^\#y)}(V_{k^\#(y)}x), \dots)$$

L'immagine è effettivamente contenuta in  $\tilde{X}$  per la definizione di  $D(x)$ ; il fatto che commuti con la dinamica segue dall'identità

$$\begin{aligned} T \circ V_{k^\#((T^\#)^i(y))} \circ \dots \circ V_{k^\#(y)} &= V_{k^\#((T^\#)^{i-1}(y))} \circ \dots \circ V_{k^\#(y)} = \\ &= V_{k^\#((T^\#)^i(V_{k(x)}^\#y))} \circ \dots \circ V_{k^\#(V_{k(x)}^\#y)} \circ T \end{aligned}$$

Il fatto che sia un isomorfismo deriva dall'esistenza dell'inversa  $\eta : \tilde{X} \rightarrow \bar{X}$

$$\eta(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots) = (x, \bigcap_{i=1}^\infty B^\#(k(x^{(1)}), k(x^{(2)}), \dots, k(x^{(i)})))$$

che è ben definita per l'ipotesi iniziale. □

Restringiamoci ora al caso in cui  $X$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$  e  $T$  sia differenziabile a tratti. Il vantaggio della costruzione di  $\bar{X}$  risiede nel fatto che, se riusciamo a rappresentare anche il duale  $X^\#$  come sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ , allora  $\bar{X}$  sarà un sottoinsieme del piano, quindi avremo trovato una realizzazione geometrica dell'estensione naturale.

**Esempio.**

Si considera  $X = [0, 1)$  e  $T : X \rightarrow X$

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

che diventa un sistema fibrato su  $I = \{0, 1\}$  ponendo  $k(x) = [2x]$ . Allora le sequenze ammissibili sono tutte e sole quelle che non contengono infiniti 1 consecutivi, quindi tutti i cilindri di qualunque rango finito sono ammissibili e si può prendere  $X^\# = X$ ,  $T^\# = T$ . Si ottiene come estensione naturale  $\bar{T} : [0, 1)^2 \rightarrow [0, 1)^2$

$$\bar{T}(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y) & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ (2x - 1, \frac{y+1}{2}) & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

la cosiddetta *mappa del panettiere*.

## 3.2 Calcolo esplicito della densità invariante

Se si riesce a ricavare una rappresentazione geometrica dell'estensione naturale si ha anche un'utile strumento per il calcolo della densità invariante: supponiamo infatti di non conoscere una misura invariante su  $X$  nè su  $X^\#$ , ma di avere due misure di probabilità  $\lambda$  e  $\lambda^\#$  rispettivamente su  $X$  e su  $X^\#$ . Supponiamo inoltre che su ogni cilindro di rango 1 le mappe  $T$  e  $T^\#$  siano almeno a tratti derivabili.

**Definizione 3.2.1.** Una funzione misurabile  $K : X \times X^\# \rightarrow \mathbb{R}$  è detta nucleo se

(i)  $K \geq 0$

(ii)  $K(Tx, y)|T'x| = K(x, T^\#y)|(T^\#)'y|$  per ogni  $x \in X$ ,  $y \in X^\#$ .

**Proposizione 3.2.1.** Se  $\bar{X}$  è l'estensione naturale di  $X$  e  $K$  un nucleo, nella notazione precedente si ha che

$$\bar{\mu}(E) = \int_E K(x, y) d\lambda(x) d\lambda^\#(y)$$

è una misura invariante per la mappa  $\bar{T}$  e

$$\rho(x) = \int_{D(x)} K(x, y) d\lambda^\#(y)$$

è una densità invariante (rispetto alla misura  $\lambda$ ) per la mappa  $T$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo che per ogni  $E \in \bar{\mathcal{A}}$

$$\int_{\bar{T}^{-1}E} K(x, y) d\lambda(x) d\lambda^\#(y) = \int_{\bar{X}} \chi_E(\bar{T}(x, y)) K(x, y) d\lambda(x) d\lambda^\#(y) =$$

$$= \int_{\bar{X}} \chi_E(T(x)) K(Tx, V_{k(x)}^\# y) \frac{|T'(x)| d\lambda(x) d\lambda^\#(y)}{|(T^\#)'(V_{k(x)}^\# y)|} = \int_E K(x, y) d\lambda(x) d\lambda^\#(y)$$

e inoltre per ogni  $E \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \int_E \rho(x) d\lambda(x) &= \int_{\pi^{-1}E} K(x, y) d\lambda(x) d\lambda^\#(y) = \int_{\bar{T}^{-1}(\pi^{-1}E)} K(x, y) d\lambda(x) d\lambda^\#(y) = \\ &= \int_{\pi^{-1}(T^{-1}E)} K(x, y) d\lambda(x) d\lambda^\#(y) = \int_{T^{-1}E} \rho(x) d\lambda(x) \end{aligned}$$

□

### Esempio.

Consideriamo la mappa di Gauss  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$T(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{x}\} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

con cilindri  $B(i) = \left(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right]$ ,  $i \geq 1$ . In questo caso si nota che tutti i cilindri di qualunque rango sono ammissibili, quindi lo sono anche quelli in cui l'ordine degli indici è invertito; di conseguenza il sistema è duale di se stesso, cioè la scelta  $(X^\#, T^\#) = (X, T)$  rispetta la definizione di duale e abbiamo  $D(x) = [0, 1]$  per ogni  $x \in [0, 1]$ . Si verifica inoltre che la funzione  $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$K(x, y) = \frac{1}{(1 + xy)^2}$$

soddisfa la definizione di nucleo, quindi otteniamo immediatamente la densità invariante

$$h(x) = \int_0^1 \frac{1}{(1 + xy)^2} dy = \left[ -\frac{1}{x} \frac{1}{1 + xy} \right]_0^1 = \frac{1}{1 + x}$$

Poichè inoltre

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x} dx = \log 2$$

normalizzando otteniamo la misura di probabilità invariante per la mappa di Gauss

$$\mu(E) = \frac{1}{\log 2} \int_E \frac{1}{1 + x} dx$$

## 3.3 Estensione naturale e flusso geodetico sulla superficie modulare

E' possibile ritrovare la rappresentazione bidimensionale dell'estensione naturale per la mappa di Gauss grazie ad una costruzione geometrica, che lega la dinamica della mappa di Gauss al flusso geodetico sulla superficie modulare

$$M = \frac{\mathcal{H}}{PSL(2, \mathbb{Z})}$$

quoziente del semipiano  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$  per l'azione del *gruppo modulare*

$$PSL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

Tale gruppo infatti agisce naturalmente sulla *sfera di Riemann*  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  mediante gli *automorfismi di Möbius*

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1)$$

e grazie all'identità

$$\Im(g(z)) = \frac{\Im z}{|cz + d|^2}$$

manda il semipiano superiore in se stesso, per cui agisce sul quoziente  $M$ . Se inoltre su  $\mathcal{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$  definiamo una metrica iperbolica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

otteniamo che tali trasformazioni sono isometrie e abbiamo una metrica sul quoziente, che risulta essere una varietà riemanniana di curvatura costante negativa e area finita. Rispetto alla metrica iperbolica le geodetiche su  $\mathcal{H}$  sono gli archi di circonferenze con centro sull'asse reale e le semirette verticali; sul fibrato tangente unitario  $T_1\mathcal{H} = \mathcal{H} \times S^1$  si può quindi definire il flusso geodetico  $\Phi : \mathbb{R} \times T_1\mathcal{H} \rightarrow T_1\mathcal{H}$

$$\Phi(t, (x, \vec{v}_x)) = (y, \vec{v}_y)$$

dove la geodetica tangente a  $\vec{v}_x$  nel punto  $x$  al tempo 0 passa al tempo  $t$  nel punto  $y$  con vettore tangente  $\vec{v}_y$ ; questa costruzione si può trasferire sul quoziente ottenendo un flusso geodetico sul fibrato tangente unitario  $T_1M$  alla superficie modulare  $M$ . Dimosteremo che una sezione di Poincaré di tale flusso è in sostanza isomorfa all'estensione naturale per la mappa di Gauss. Il nostro approccio seguirà [25].

Tracciamo su  $\mathcal{H}$  la semiretta  $\Re z = 0$  e tutti i suoi trasformati per l'azione di  $PSL(2, \mathbb{Z})$ ; otteniamo una suddivisione del semipiano in un numero numerabile di regioni che hanno per bordi dei triangoli geodetici e vengono trasportate l'una nell'altra dall'azione di  $PSL(2, \mathbb{Z})$ . Tale suddivisione è detta *tassellazione di Farey*<sup>1</sup>.

Sia  $\gamma$  una geodetica (orientata) su  $\mathcal{H}$  non contenuta in uno dei bordi della tassellazione e  $x$  un punto su di essa. La traiettoria di  $x$  nel futuro sarà divisa in segmenti dalle linee della tassellazione; ognuno di questi segmenti dividerà la

<sup>1</sup>Si verifica che la tassellazione di Farey è l'unione di:

- tutte le semirette verticali  $\{\Re z = k\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- tutte le circonferenze geodetiche che intersecano l'asse reale in due elementi consecutivi di una qualche *successione di Farey*  $F_n = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : |p|, |q| \leq n\}$

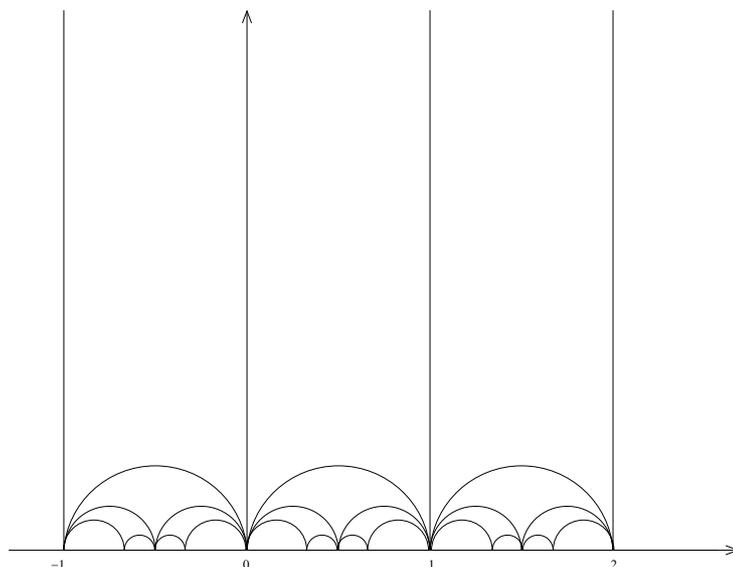


Figura 3.1: La tassellazione di Farey

regione della tassellazione in due parti. A meno che il segmento non vada a finire in un vertice della tassellazione, una delle due parti comprende un solo vertice del triangolo geodetico e l'altra ne comprende 2; in questo caso associamo al segmento di geodetica la lettera  $L$  se la parte con un solo vertice si trova alla sinistra rispetto al verso di percorrenza della geodetica e la lettera  $R$  se si trova alla destra. Se la geodetica non interseca mai vertici della tassellazione (che corrispondono ai punti razionali dell'asse reale e al punto all'infinito) allora si può associare alla parte di  $\gamma$  che corrisponde alla traiettoria di  $x$  nel futuro una successione di simboli in  $\{L, R\}^{\mathbb{N}}$ ; potendo fare lo stesso anche per la parte di geodetica associata al passato, si ha che ad ogni  $x \in \mathcal{H}$  e ad ogni geodetica  $\gamma$  che passa per  $x$  e non interseca mai i vertici della tassellazione si può associare una successione bi-infinita in  $\{L, R\}^{\mathbb{Z}}$ . Poichè il gruppo modulare agisce su  $\mathbb{H}$  tramite diffeomorfismi che preservano l'orientazione e mandano la tassellazione in sè, allora tutti i sollevamenti ad  $\mathcal{H}$  di una geodetica  $\bar{\gamma}$  su  $M$  avranno la stessa codifica, il che ci permette di definire una codifica per le geodetiche su  $M$ .

Siamo ora pronti per definire la sezione di Poincarè che ci interessa: consideriamo  $S \subseteq M$  la proiezione della semiretta  $\{\Re z = 0\}$  su  $M$  e sia  $x \in S$ ,  $\vec{v}_x \in T_x M$ ; diremo che la geodetica  $\gamma$  *cambia tipo* in  $x$  se i due segmenti di  $\gamma$  tagliati dalla tassellazione di Farey e contenenti  $x$  (uno nel futuro e uno nel passato) hanno codifica diversa.

Sia ora

$$X = \{\vec{v}_x \in X \mid \vec{v}_x \text{ ha punto base } x \in S, \gamma(\vec{v}_x) \text{ cambia tipo in } x\}$$

Per descrivere più semplicemente la dinamica che ci interessa, è sufficiente con-

siderare un sottoinsieme di  $X$  che ne differisce per un insieme a misura nulla: prendiamo quindi come sezione

$$X^* = \{(x, \vec{v}_x) \in T_1M \mid \gamma(\vec{v}_x) \text{ interseca l'asse reale in } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

Su  $X^*$  il flusso geodetico definisce naturalmente una *mappa di primo ritorno*  $P : X^* \rightarrow X^*$  di cui siamo interessati a descrivere la dinamica: esplicitamente possiamo utilizzare come coordinate per definire una geodetica i due punti di intersezione  $\gamma_{-\infty}$  e  $\gamma_{\infty}$  della geodetica  $\gamma$  con l'asse reale, corrispondenti rispettivamente ai limiti dell'orbita per  $t \rightarrow -\infty$  e  $t \rightarrow \infty$ .

**Proposizione 3.3.1.** ([25], Th.A)

*Definita*

$$A = \{(\eta, \xi) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid \eta \text{ e } \xi \text{ hanno segno opposto, } |\xi| \geq 1, 0 < |\eta| \leq 1\}$$

la mappa  $i : A \rightarrow X^*$

$$(x, \vec{v}_x) \mapsto (\gamma(\vec{v}_x)_{-\infty}, \gamma(\vec{v}_x)_{\infty})$$

è un omeomorfismo.

In questo sistema di coordinate la mappa di primo ritorno si scrive come  $R : A \rightarrow A$  con

$$R(\eta, \xi) = \begin{cases} \left( -\frac{1}{\eta - \lfloor \xi \rfloor}, -\frac{1}{\xi - \lfloor \xi \rfloor} \right) & \text{se } \xi > 1 \\ \left( -\frac{1}{\eta + \lceil \xi \rceil}, -\frac{1}{\xi + \lceil \xi \rceil} \right) & \text{se } \xi < -1 \end{cases}$$

A questo punto con il cambio di coordinate  $x = \frac{1}{|\xi|}$ ,  $y = \eta$  si trova che la  $R$  è coniugata a  $\tilde{R} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  con  $\tilde{A} = [0, 1] \times [-1, 1]$  e

$$\tilde{R}(x, y) = \left( \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \frac{-1}{y + \text{Sign}(y) \lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \right)$$

e detta  $\pi : \tilde{A} \rightarrow [0, 1]^2$  la proiezione  $\pi(x, y) = (x, |y|)$  si ha il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{R}} & \tilde{A} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ [0, 1]^2 & \xrightarrow{\bar{T}_1} & [0, 1]^2 \end{array}$$

dove  $\bar{T}_1$  è l'estensione naturale per la mappa di Gauss definita nella sezione precedente. Ora, la misura di Liouville su  $T_1M$  associata alla metrica iperbolica su  $\mathcal{H}$  è invariante per il flusso geodetico<sup>2</sup>; trasportando questa misura su  $[0, 1]^2$  otteniamo su questo spazio una misura invariante per  $\bar{T}_1$  assolutamente continua rispetto a Lebesgue; per l'ergodicità, questa deve coincidere a meno di una costante moltiplicativa con la misura invariante su  $[0, 1]^2$  definita dal nucleo  $K(x, y)$ . Ciò dimostra il seguente

<sup>2</sup>E' un classico risultato di Hopf [7] che tale misura è ergodica per il flusso geodetico.

**Teorema 3.3.2.** *L'estensione naturale  $\bar{T}_1 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$  della mappa di Gauss è, a meno del semiconiugio  $\pi$ , isomorfa al sistema dinamico dato dalla mappa di primo ritorno  $P$  del flusso geodetico sulla sezione  $X^* \subseteq T_1M$ .*

**Corollario 3.3.3.** *La misura invariante per la mappa di Gauss si può ottenere integrando la misura invariante per il flusso geodetico su  $T_1M$ .*

### 3.4 Calcolo dell'estensione naturale per la mappa di Nakada

La costruzione del sistema duale permette di trovare, nel caso della mappa di Nakada per  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$  una rappresentazione esplicita dell'estensione naturale, da cui si possono immediatamente ricavare la densità invariante e l'entropia.

**Teorema 3.4.1.** (Nakada, [17])

(i) Sia  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \alpha \leq 1$ . Allora ponendo

$$D(x) = \begin{cases} [0, \frac{1}{2}] & \text{se } x \in [\alpha - 1, \frac{1-\alpha}{\alpha}] \\ [0, 1] & \text{se } x \in (\frac{1-\alpha}{\alpha}, \alpha] \end{cases}$$

$$\bar{X}_\alpha = \{(x, y) \mid x \in [\alpha - 1, \alpha], y \in D(x)\}$$

la mappa  $\bar{T}_\alpha : \bar{X}_\alpha \rightarrow \bar{X}_\alpha$

$$\bar{T}(x, y) = \left( T_\alpha(x), \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1 - \alpha + \text{Sign}(x)y} \right)$$

definisce una rappresentazione dell'estensione naturale di  $T_\alpha$  su  $\bar{X}_\alpha$ .

(ii) Sia  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Allora ponendo

$$D(x) = \begin{cases} [0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}] & \text{se } x \in [\alpha - 1, \frac{1-2\alpha}{\alpha}] \\ [0, \frac{1}{2}] & \text{se } x \in (\frac{1-2\alpha}{\alpha}, \frac{2\alpha-1}{1-\alpha}) \\ [0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}] & \text{se } x \in [\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}, \alpha] \end{cases}$$

la mappa  $\bar{T}_\alpha : \bar{X}_\alpha \rightarrow \bar{X}_\alpha$  definita al punto precedente dà una rappresentazione dell'estensione naturale di  $T_\alpha$  su  $\bar{X}_\alpha$ .

(iii) ([15]) Sia  $\sqrt{2} - 1 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ . Allora ponendo

$$D(x) = \begin{cases} \left[ 0, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right] & \text{se } x \in \left[ \alpha - 1, \frac{2\alpha-1}{1-\alpha} \right) \\ \left[ 0, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right] & \text{se } x \in \left[ \frac{2\alpha-1}{1-\alpha}, \frac{1-2\alpha}{\alpha} \right) \\ \left[ 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right] & \text{se } x \in \left[ \frac{1-2\alpha}{\alpha}, \alpha \right] \end{cases}$$

la mappa  $\bar{T}_\alpha : \bar{X}_\alpha \rightarrow \bar{X}_\alpha$  definita al punto (i) dà una rappresentazione dell'estensione naturale di  $T_\alpha$  su  $\bar{X}_\alpha$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo il caso  $\alpha \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$ . Fissato  $\alpha$ , è immediato verificare che  $a_{\alpha,1}(\alpha) = 1$ ,  $a_{\alpha,2}(\alpha) \geq 2$ ,  $a_{\alpha,1}(\alpha - 1) = -(a_{\alpha,2}(\alpha) + 1)$ ,  $T_\alpha^2(\alpha) = T_\alpha(\alpha - 1)$ . Sia  $r = a_{\alpha,2}(\alpha)$ ,  $z = T_\alpha^2(\alpha)$ . Definiamo la partizione di  $D(x)$

$$Q_x = \begin{cases} \{B^\#(k, x), k \geq 2 \vee k \leq -r - 1\} & \text{se } x \in \left[\alpha - 1, \frac{1-\alpha}{\alpha}\right] \\ \{B^\#(k, x), k \geq 1 \vee k \leq -r - 1\} & \text{se } x \in \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}, \alpha\right) \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} B^\#(k, x) &= \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right) && \text{se } r > k > 0 \\ B^\#(r, x) &= \begin{cases} \left(\frac{1}{r+\frac{1}{2}}, \frac{1}{r}\right) & \text{se } x \geq z \\ \left(\frac{1}{r+1}, \frac{1}{r}\right) & \text{se } x < z \end{cases} \\ B^\#(r+1, x) &= \left(\frac{1}{r+1+\frac{1}{2}}, \frac{1}{r+1}\right) \\ B^\#(k, x) &= \left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}}, \frac{1}{k}\right) && \text{se } k > r+1 \\ B^\#(-r-1, x) &= \begin{cases} \left(\frac{1}{r+1}, \frac{1}{r+\frac{1}{2}}\right) & \text{se } x \geq z \\ \emptyset & \text{se } x < z \end{cases} \\ B^\#(-k, x) &= \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k-\frac{1}{2}}\right) && \text{se } k > r+1 \end{aligned}$$

A questo punto ponendo

$$\Delta_{(k,\pm)} = \{(x, y) \in \bar{X}_\alpha \mid x \in I_k^\pm\}$$

$$\tilde{\Delta}_k = \{(x, y) \in \bar{X}_\alpha \mid y \in B^\#(k, x)\}$$

si verifica caso per caso che la  $T_\alpha$  mappa l'interno di  $\Delta_{(k,\pm)}$  bigettivamente nell'interno di  $\tilde{\Delta}_{\pm k}$ ; si noti che il motivo per cui tutti i “pezzi” si ricompongono perfettamente a formare l'unione di due rettangoli è che le immagini di  $\Delta_{(r,+)} = \left[\frac{1}{r+\alpha}, \frac{1-\alpha}{\alpha}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1}{r-1+\alpha}\right] \times [0, 1]$  e  $\Delta_{(-r-1)} = \left[\alpha - 1, -\frac{1}{r+1+\alpha}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$  si “incastrano” a formare il rettangolo  $[\alpha - 1, \alpha] \times \left[\frac{1}{r+1}, \frac{1}{r}\right]$ , il che a sua volta deriva dal fatto che  $z = T_\alpha^2(\alpha) = T_\alpha(\alpha - 1)$ .  $\square$

**Corollario 3.4.2.** Per  $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , una densità invariante  $\rho_\alpha$  per la mappa  $T_\alpha$  è

- Se  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \alpha \leq 1$

$$\rho_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log(1+\alpha)} \frac{1}{x+2} & \text{se } x \in \left[\alpha - 1, \frac{1-\alpha}{\alpha}\right] \\ \frac{1}{\log(1+\alpha)} \frac{1}{x+1} & \text{se } x \in \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}, \alpha\right) \end{cases}$$

- Se  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\rho_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log \frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{1}{x + \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1} & \text{se } x \in \left[\alpha - 1, \frac{1-2\alpha}{\alpha}\right] \\ \frac{1}{\log \frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{1}{x+2} & \text{se } x \in \left(\frac{1-2\alpha}{\alpha}, \frac{2\alpha-1}{1-\alpha}\right) \\ \frac{1}{\log \frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{1}{x + \frac{\sqrt{5}+1}{2}} & \text{se } x \in \left[\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}, \alpha\right] \end{cases}$$

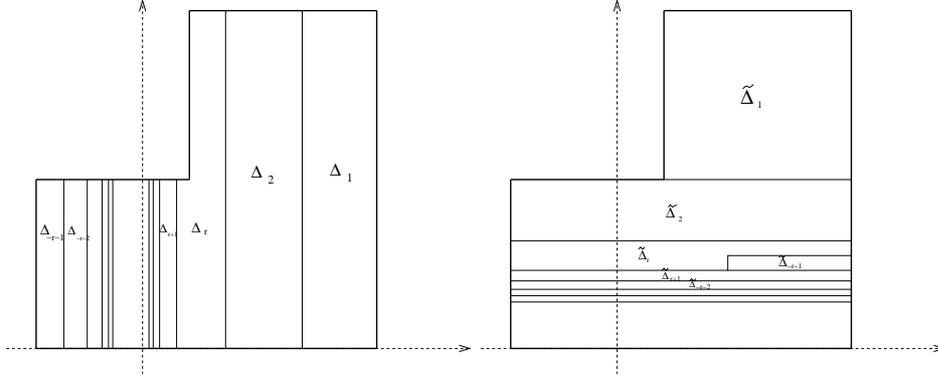


Figura 3.2: L'azione di  $\bar{T}_\alpha$  sui pezzi del dominio

- Se  $\sqrt{2} - 1 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$

$$\rho_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log \frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{1}{x + \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1} & \text{se } x \in \left[ \alpha - 1, \frac{2\alpha-1}{1-\alpha} \right) \\ \frac{1}{\log \frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{1}{x + \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1} + \frac{1}{x + \frac{\sqrt{5}-1}{2}} - \frac{1}{x+2} & \text{se } x \in \left[ \frac{2\alpha-1}{1-\alpha}, \frac{1-2\alpha}{\alpha} \right) \\ \frac{1}{\log \frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{1}{x + \frac{\sqrt{5}+1}{2}} & \text{se } x \in \left[ \frac{1-2\alpha}{\alpha}, \alpha \right] \end{cases}$$

*Dimostrazione.* La funzione  $K(x, y) = \frac{1}{(1+xy)^2}$  soddisfa la definizione di nucleo: di conseguenza per trovare una densità invariante basta integrare lungo  $D(x)$  per ogni  $x \in [\alpha - 1, \alpha]$ ; nel caso  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \alpha \leq 1$  si ottiene

$$\rho_\alpha(x) = \int_{D(x)} \frac{dy}{(1+xy)^2} = \begin{cases} \left[ -\frac{1}{x} \frac{1}{1+xy} \right]_0^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x+2} & \text{se } \alpha - 1 \leq x \leq \frac{1-\alpha}{\alpha} \\ \left[ -\frac{1}{x} \frac{1}{1+xy} \right]_0^1 = \frac{1}{x+1} & \text{se } \frac{1-\alpha}{\alpha} < x \leq \alpha \end{cases}$$

e si procede similmente nell'altro caso.  $\square$

**Corollario 3.4.3.** Per  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$  l'entropia  $h(T_\alpha)$  della mappa  $T_\alpha$  è

$$h(T_\alpha) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{6 \log(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2})} & \text{se } \frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{\pi^2}{6 \log(1+\alpha)} & \text{se } \frac{\sqrt{5}-1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Per la formula di Rohlin

$$h(T_\alpha) = -2 \int_{\alpha-1}^{\alpha} \log |x| \rho_\alpha(x) dx$$

Ora innanzitutto sappiamo che

$$\int_0^1 \frac{\log|x|}{1+x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 x^k \log x dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$$

(la serie è dominata da  $\sum_{k=0}^{\infty} -x^k \log x = \frac{\log x}{x-1} \in L^1([0, 1])$ ) e d'altra parte

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2 \sum_{\substack{k \equiv 0 \\ \text{mod } 2}}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\zeta(2)}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Consideriamo ora la funzione

$$F(\alpha) = \int_{\alpha-1}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{\log|x|}{x+2} dx + \int_{\frac{1-\alpha}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\log|x|}{1+x} dx$$

Per  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \alpha \leq 1$  abbiamo

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \frac{\log|\frac{1-\alpha}{\alpha}|}{2 + \frac{1-\alpha}{\alpha}} \left( -\frac{1}{\alpha^2} \right) - \frac{\log|\alpha-1|}{2+\alpha-1} + \frac{\log|\alpha|}{\alpha+1} - \frac{\log|\frac{1-\alpha}{\alpha}|}{\frac{1-\alpha}{\alpha} + 1} \left( -\frac{1}{\alpha^2} \right) = \\ &= \log \left| \frac{1-\alpha}{\alpha} \right| \left( -\frac{1}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha} \right) = 0 \end{aligned}$$

e si verifica allo stesso modo che per  $\sqrt{2}-1 \leq \alpha \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  vale

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \int_{\alpha-1}^{\alpha} \log|x| \rho_{\alpha}(x) dx \right) = 0$$

quindi per ogni  $\alpha \in [\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1]$

$$h(T_{\alpha}) = -\frac{2}{\log(1+\alpha)} \int_{\alpha-1}^{\alpha} \log|x| h_{\alpha}(x) dx = -\frac{2}{\log(1+\alpha)} \left( -\frac{\pi^2}{12} \right) = \frac{\pi^2}{6 \log(1+\alpha)}$$

e per  $\sqrt{2}-1 \leq \alpha \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$   $h(T_{\alpha}) = h(T_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}) = \frac{\pi^2}{6 \log \frac{\sqrt{5}+1}{2}}$   $\square$

**Osservazione.** Osserviamo che i  $T_{\alpha}$  per  $\alpha \in [\sqrt{2}-1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}]$  hanno tutti la stessa entropia; è stato dimostrato ([12], [18]) che per tali valori di  $\alpha$  le estensioni naturali delle  $T_{\alpha}$  sono isomorfe.

### 3.5 Estensione naturale per la mappa di Ito

Anche per la mappa di Ito il metodo del sistema duale permette di trovare, per alcuni valori di  $\alpha$ , una forma esplicita bidimensionale dell'estensione naturale e di conseguenza densità invariante ed entropia. Tali risultati si possono riassumere nella seguente proposizione (per la dimostrazione vedere [27]).

**Proposizione 3.5.1.** Sia  $g = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ,  $\gamma = \sqrt{2} - 1$ .

- Se  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 2 - \sqrt{2}$ , allora ponendo

$$D(x) = \begin{cases} [-g, 1-g] & \text{se } x \leq S_\alpha(\alpha-1) \\ [g-1, 1-g] & \text{se } S_\alpha(\alpha-1) < x \leq S_\alpha(\alpha) \\ [g-1, g] & \text{se } x > S_\alpha(\alpha) \end{cases}$$

$$\bar{X}_\alpha = \{(x, y) \mid x \in [\alpha-1, \alpha], y \in D(x)\}$$

la mappa  $\bar{S}_\alpha : \bar{X}_\alpha \rightarrow \bar{X}_\alpha$

$$\bar{S}_\alpha(x, y) = \left( S_\alpha(x), \frac{1}{y + \lfloor \frac{1}{x} + 1 - \alpha \rfloor} \right)$$

definisce una rappresentazione dell'estensione naturale di  $S_\alpha$  su  $\bar{X}_\alpha$ .

- Se  $2 - \sqrt{2} < \alpha \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , definendo

$$m_1(x) = \begin{cases} 1-g & \text{se } x \leq S_\alpha(\alpha) \\ 1-\gamma & \text{se } S_\alpha(\alpha) < x \leq S_\alpha^2(\alpha-1) \\ g & \text{se } x > S_\alpha^2(\alpha-1) \end{cases}$$

$$m_2(x) = \begin{cases} -\gamma & \text{se } x < S_\alpha^2(\alpha) \\ g-1 & \text{se } S_\alpha^2(\alpha) \leq x \leq S_\alpha(\alpha-1) \\ \frac{\gamma-1}{2} & \text{se } x > S_\alpha(\alpha-1) \end{cases}$$

$$D(x) = [m_2(x), m_1(x)]$$

$$\bar{X}_\alpha = \{(x, y) \mid x \in [\alpha-1, \alpha], y \in D(x)\}$$

la mappa  $\bar{S}_\alpha : \bar{X}_\alpha \rightarrow \bar{X}_\alpha$  la mappa  $\bar{S}_\alpha : \bar{X}_\alpha \rightarrow \bar{X}_\alpha$  definita al punto precedente dà una rappresentazione dell'estensione naturale di  $S_\alpha$ .

Analogamente al caso della mappa questo risultato ci permette di ottenere la densità invariante:

**Corollario 3.5.2.** Per  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 2 - \sqrt{2}]$ , la densità invariante  $f_\alpha$  per la mappa  $S_\alpha$  è

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log(g+2)} \left( \frac{1}{x+g+2} - \frac{1}{x-g-1} \right) & \text{se } \alpha-1 \leq x \leq S_\alpha(\alpha-1) \\ \frac{1}{\log(g+2)} \left( \frac{1}{x+g+2} - \frac{1}{x-g-2} \right) & \text{se } S_\alpha(\alpha-1) \leq x \leq S_\alpha(\alpha) \\ \frac{1}{\log(g+2)} \left( \frac{1}{x+g+1} - \frac{1}{x-g-2} \right) & \text{se } S_\alpha(\alpha) < x < \alpha \end{cases}$$

Formule simili alla precedente si trovano anche per  $\alpha \in [2 - \sqrt{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}]$ ; per una descrizione esplicita si veda [27].

**Corollario 3.5.3.** Per  $\alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}]$  l'entropia  $h(S_\alpha)$  della mappa  $S_\alpha$  è

$$h(S_\alpha) = \frac{\pi^2}{6 \log(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2})}$$

indipendente dal valore di  $\alpha$ .

**Osservazione.** Fissato  $\alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}]$  la mappa di Nakada  $T_\alpha$  e quella di Ito  $S_\alpha$  hanno la stessa entropia.

### 3.6 Applicazioni

La conoscenza della misura invariante per la mappa di Gauss e per le  $T_\alpha$  tramite il teorema di Birkhoff ci permette di conoscere la distribuzione dei quozienti parziali in dettaglio. Vediamo alcuni esempi.

**Proposizione 3.6.1.** La frequenza delle cifre nello sviluppo in frazione continua standard di un  $x \in [0, 1]$  è data da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}\{k \mid a_k = i, 1 \leq k \leq n\}}{n} = \frac{1}{\log 2} \log \left( 1 + \frac{1}{i(i+2)} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}\{k \mid i \leq a_k \leq j, 1 \leq k \leq n\}}{n} = \frac{1}{\log 2} \log \frac{(i+1)(j+1)}{i(j+2)}$$

per quasi ogni  $x$ .

*Dimostrazione.* Si noti che  $a_k(x) = i \Leftrightarrow T_1^k(x) \in (\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$ , quindi applicando il teorema di Birkhoff nel caso ergodico all'osservabile  $\chi_{(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]}$  si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}\{k \mid a_k = i, 1 \leq k \leq n\}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]} \circ T_1^k(x) = \frac{1}{\log 2} \int_{\frac{1}{i+1}}^{\frac{1}{i}} \frac{dx}{1+x}$$

per quasi ogni  $x$  rispetto alla misura invariante; poichè la densità di tale misura è limitata dal basso, allora il risultato vale anche per quasi ogni  $x$  rispetto alla misura di Lebesgue.  $\square$

**Proposizione 3.6.2.** ([19], 1990) Siano dati interi  $l, m$  con  $m \geq 1$ ,  $0 \leq l \leq m-1$ . Allora per i quozienti parziali dell'aritmo standard vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}\{k \mid a_k \equiv l \pmod{m}, 1 \leq k \leq n\}}{n} = \frac{1}{\log 2} \log \left( \frac{\Gamma(\frac{l}{m})\Gamma(\frac{l+2}{m})}{\Gamma^2(\frac{l+1}{m})} \right)$$

per quasi ogni  $x$  rispetto alla misura di Lebesgue.

*Dimostrazione.* Siano  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C} \setminus \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq 1\}$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Per  $-z \notin \mathbb{N}$  vale il prodotto di Eulero

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

e applicando questo a  $-\alpha_i, -\beta_i$

$$\prod_{i=1}^r \frac{\Gamma(-\beta_i)}{\Gamma(-\alpha_i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^r \frac{(1-\alpha_i)(2-\alpha_i)\dots(n+1-\alpha_i)}{(1-\beta_i)(2-\beta_i)\dots(n+1-\beta_i)} n^{\alpha_i-\beta_i}$$

di conseguenza se  $\sum_{i=1}^r \alpha_i = \sum_{i=1}^r \beta_i$  allora

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n-\alpha_1)\dots(n-\alpha_r)}{(n-\beta_1)\dots(n-\beta_r)} = \prod_{i=1}^r \frac{\Gamma(1-\beta_i)}{\Gamma(1-\alpha_i)} \quad (3.1)$$

Per la proposizione precedente si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}\{k \mid a_k \equiv l \pmod{l}, 1 \leq k \leq n\}}{n} = \frac{1}{\log 2} \sum_{p=0}^{\infty} \log \left( 1 + \frac{1}{(pm+l)(pm+l+2)} \right)$$

riscrivendo e utilizzando il logaritmo della (3.1)

$$= \frac{1}{\log 2} \sum_{p=1}^{\infty} \log \left( \frac{(p - \frac{m-l-1}{m})^2}{(p - \frac{m-l}{m})(p - \frac{m-l-2}{m})} \right) = \frac{1}{\log 2} \log \left( \frac{\Gamma(1 - \frac{m-l}{m})\Gamma(1 - \frac{m-l-2}{m})}{\Gamma^2(1 - \frac{m-l-1}{m})} \right)$$

□

Per  $m = 2, l = 1$  troviamo che la frequenza delle cifre dispari è

$$\frac{1}{\log 2} \log \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma^2(1)} = \frac{\log \pi}{\log 2} - 1 \cong 0,6514$$

Un altro esempio: la frequenza delle cifre congrue a 1 modulo 4 è

$$\frac{1}{\log 2} \log \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma^2(1/2)} = \frac{1}{2}$$

La seguente proposizione generalizza un classico risultato di Khintchine ([10]):

**Proposizione 3.6.3.** Sia  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$  e siano  $a_k$  i quozienti parziali dell' $\alpha$ -sviluppo di Nakada. Allora per quasi ogni  $x$  esistono i limiti:

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = +\infty$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} < +\infty$$

*Dimostrazione.* Poichè esistono  $C_1$  e  $C_2$  tali che  $0 < C_1 \leq \rho_\alpha(x) \leq C_2$  per ogni  $x \in [\alpha - 1, \alpha]$ , allora per  $k \rightarrow \infty$

$$\int_{\frac{1}{k+\alpha}}^{\frac{1}{k-1+\alpha}} \rho_\alpha(x) dx \asymp \frac{1}{k^2} \quad (3.2)$$

e lo stesso vale per  $\int_{-\frac{1}{k-1+\alpha}}^{-\frac{1}{k+\alpha}} \rho_\alpha(x) dx$ . Per dimostrare (1) prendiamo

$f = \sum_k k \left( \chi_{[-\frac{1}{k-1+\alpha}, -\frac{1}{k+\alpha}]} + \chi_{(\frac{1}{k+\alpha}, \frac{1}{k-1+\alpha}]} \right)$  Sappiamo per la (3.2) che  $\int_{\alpha-1}^{\alpha} f(x) \rho_\alpha(x) dx = +\infty$ . Se ora  $f_N = f \chi_{\{f \leq N\}} \in L^1(\mu_\alpha)$  si ha che per il teorema di Birkhoff

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_N \circ T_\alpha^k = \int_{\alpha-1}^{\alpha} f_N(x) \rho_\alpha(x) dx$$

e per il teorema di convergenza monotona  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\alpha-1}^{\alpha} f_N(x) \rho_\alpha(x) dx = +\infty$ .

(2) Presa  $f = \sum_k \log k \left( \chi_{[-\frac{1}{k-1+\alpha}, -\frac{1}{k+\alpha}]} + \chi_{(\frac{1}{k+\alpha}, \frac{1}{k-1+\alpha}]} \right) \in L^1(\mu_\alpha)$ , per il teorema di Birkhoff

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \exp \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log a_k \right)$$

converge. □

Nel caso dell'algorithm standard si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = K_0 = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{k(k+2)} \right)^{\log k / \log 2} \cong 2.685\dots$$

La costante  $K_0$  è nota come *costante di Khintchine*; si può esprimere anche come  $K_0 = \exp \left( \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{\log \lfloor 1/t \rfloor}{1+t} dt \right)$ .

## Capitolo 4

# Decomposizione spettrale e teoremi limite

Scopo di questo capitolo è dimostrare il teorema del limite centrale per osservabili a variazione limitata nei sistemi definiti dalle mappe di Nakada  $T_\alpha$ . Questo risultato è originale e si basa sulla decomposizione spettrale dell'operatore di Perron-Frobenius, generalizzando risultati ottenuti per mappe monotone a tratti dell'intervallo che soddisfano condizioni di tipo Markov ([13], [6], [23]). La prima parte del capitolo espone i risultati di decomposizione spettrale necessari a ottenere il teorema del limite centrale per un'opportuna classe  $\mathfrak{C}$  di trasformazioni monotone a tratti dell'intervallo, identificata da A. Broise ([2]); nella seconda parte si dimostra che le mappe di Nakada  $T_\alpha$  per  $\alpha \in (0, 1)$  appartengono a questa classe, quindi anche per esse vale il teorema del limite centrale.

### 4.1 L'operatore di Perron-Frobenius

Nella ricerca di misure invarianti per le trasformazioni definite su un intervallo è utile introdurre l'operatore di Perron-Frobenius, il che permette di utilizzare teoremi dell'analisi funzionale. Nel nostro caso, seguendo l'approccio di Lasota e Yorke ([13]), faremo agire tale operatore sullo spazio delle funzioni a variazione limitata. Ricordiamo la

**Definizione 4.1.1.** *Sia  $I$  un intervallo chiuso e limitato di  $\mathbb{R}$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione. Data una suddivisione  $\mathcal{P}$  di  $I = [a, b]$  in un numero finito di intervalli, si definisce*

$$\text{Var}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i+1})|$$

dove  $a = a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$  sono gli estremi degli intervalli della suddivisione. Si pone

$$\text{Var}_I f = \sup_{\mathcal{P}} \text{Var}(f, \mathcal{P})$$

il sup su tutte le suddivisioni dell'intervallo e si definisce

$$V = \{f \in L^1(I, \mathbb{C}) \mid \exists g : I \rightarrow \mathbb{C} \text{ t.c. } f = g \text{ q.o. e } \text{Var}_I g < \infty\}$$

Ricordiamo qualche proprietà fondamentale della variazione totale:

**Proposizione 4.1.1.** *Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione. Allora valgono:*

1.

$$\text{Var}_{[a,b]} f = \text{Var}_{[a,c]} f + \text{Var}_{[c,b]} f \quad \forall a < c < b$$

2.

$$\text{Var}_I (f + g) \leq \text{Var}_I (f) + \text{Var}_I (g)$$

3.

$$\sup_{x \in I} |f(x)| \leq \text{Var}_I f + \frac{1}{m(I)} \int_I |f(x)| dx$$

4.

$$\text{Var}_{[a,b]} f \geq |f(a)| + |f(b)| - 2 \inf_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

*Dimostrazione.* 1. e 2. sono immediati.

3. Per ogni  $x, y \in I$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y)| \leq \text{Var}_I f + |f(y)|$$

facendo il sup su  $x \in I$  e integrando in  $dy$  si ha la tesi.

4. Per ogni  $x \in I$

$$\text{Var}_{[a,b]} f \geq |f(a) - f(x)| + |f(b) - f(x)| \geq |f(a)| + |f(b)| - 2|f(x)|$$

□

**Proposizione 4.1.2.** *Lo spazio  $V_I$  con la norma  $\| \cdot \|_v$  data da*

$$\|f\|_v = \text{Var}_I f + \|f\|_1$$

*è uno spazio di Banach.*

Il seguente risultato di compattezza ci tornerà utile in seguito

**Teorema 4.1.3.** (Helly) *Sia  $I$  un intervallo limitato e  $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq BV(I)$  una successione di funzioni per cui esistono  $K_1, K_2 \geq 0$  tali che:*

$$1. \sup_I |\rho_n| \leq K_1 \quad \forall n$$

$$2. \text{Var}_I \rho_n \leq K_2 \quad \forall n$$

Allora esiste una sottosuccessione  $\rho_{n_k}$  e una funzione  $\rho \in BV(I)$  tale che  $\rho_{n_k} \rightarrow \rho$  in  $L^1$  e quasi ovunque, e

$$\sup_I |\rho| \leq K_1 \quad \text{Var}_I \rho \leq K_2$$

Supponiamo ora di avere una dinamica  $T : I \rightarrow I$ ; sulle osservabili risulta naturalmente definito l'operatore

$$\tilde{T} : L^1(I, \mathbb{C}) \rightarrow L^1(I, \mathbb{C})$$

$$g \mapsto g \circ T$$

Per studiare le proprietà dinamiche delle misure su  $I$  è però più interessante definire

**Definizione 4.1.2.** L'operatore di Perron-Frobenius  $\Phi_T : L^1(I, \mathbb{C}) \rightarrow L^1(I, \mathbb{C})$  è l'operatore aggiunto di  $\tilde{T}$  rispetto alla dualità  $L^1 - L^\infty$ , cioè l'unico operatore per cui

$$\int_I \Phi_T(f) \cdot \bar{g} dm = \int_I f \cdot (\bar{g} \circ T) dm \quad \forall f \in L^1(I, \mathbb{C}), \forall g \in L^\infty(I, \mathbb{C})$$

**Proposizione 4.1.4.**  $\Phi_T$  gode delle seguenti proprietà:

1.  $\Phi_T$  è un operatore lineare e continuo di  $L^1(m)$
2.  $\Phi_T$  è positivo, da cui  $|\Phi_T(f)| \leq \Phi_T(|f|)$
3.  $\|\Phi_T\|_1 \leq 1$
4.  $\int_I \Phi_T(f) dm = \int_I f dm$  per ogni  $f \in L^1(m)$ .
5.  $\Phi_{T^n} = (\Phi_T)^n$
6.  $\Phi_T f = f$  se e solo se la misura  $f dm$  è invariante per  $T$ .

*Dimostrazione.* Seguono quasi tutte immediatamente dalla definizione: vediamo (3) e (6).

3.

$$\begin{aligned} \|\Phi_T f\|_1 &= \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \left| \int_I \Phi_T f \cdot g dm \right| \leq \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \int_I |f| \cdot |g \circ T| dm \\ &\leq \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \|f\|_1 \|g \circ T\|_\infty \leq \|f\|_1 \end{aligned}$$

6.  $f dm$  è invariante se e solo se per ogni  $g \in L^\infty(I)$  si ha  $\int_I g \circ T \cdot f dm = \int_I g \cdot f dm$  se e solo se  $\int_I \Phi_T(f) \cdot g dm = \int_I f \cdot g dm$

□

## 4.2 Il teorema di Ionescu-Tulcea e Marinescu

Si è visto nella sezione precedente che le misure invarianti per  $T$  assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue corrispondono esattamente ai punti fissi dell'operatore di Perron-Frobenius. Questo è il primo indizio del fatto che la conoscenza della decomposizione spettrale dell'operatore  $\Phi_T$  può servire a determinare le proprietà dinamiche del sistema. Lo strumento fondamentale per questo approccio è il

**Teorema 4.2.1.** *Siano  $(\mathfrak{Y}, \|\cdot\|_{\mathfrak{Y}})$  e  $(\mathfrak{L}, \|\cdot\|_{\mathfrak{L}})$  due spazi di Banach con  $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{L}$ , che soddisfino la seguente ipotesi:*

- (a) *se  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  è una successione di elementi di  $\mathfrak{Y}$  che converge in  $\mathfrak{L}$  a  $f \in \mathfrak{L}$  e se esiste  $C > 0$  tale per cui per ogni  $n \geq 0$  si ha  $\|f_n\|_{\mathfrak{Y}} \leq C$ , allora  $f \in \mathfrak{Y}$  e  $\|f\|_{\mathfrak{Y}} \leq C$*

Sia ora  $\Phi : \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}$  un operatore lineare continuo che manda  $\mathfrak{Y}$  in sé e che verifica le condizioni:

- (b)

$$\sup_{\{n \geq 0, f \in \mathfrak{Y}, \|f\|_{\mathfrak{L}} \leq 1\}} \|\Phi^n(f)\|_{\mathfrak{L}} < \infty$$

- (c) *Esiste  $n_0 \geq 0$ ,  $\alpha < 1$  e  $\beta < \infty$  tale che*

$$\|\Phi^{n_0}(f)\|_{\mathfrak{Y}} \leq \alpha \|f\|_{\mathfrak{Y}} + \beta \|f\|_{\mathfrak{L}}$$

- (d) *se  $S$  è un insieme limitato di  $(\mathfrak{Y}, \|\cdot\|_{\mathfrak{Y}})$ , allora  $\Phi^{n_0}(S)$  è relativamente compatto in  $(\mathfrak{L}, \|\cdot\|_{\mathfrak{L}})$ .*

Allora  $\Phi$  ha al più un numero finito di autovalori di modulo 1:  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  e  $\Phi$  si scrive allora:

$$\Phi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \Phi_i + \Psi$$

dove i  $\Phi_i$  sono operatori lineari limitati di  $\mathfrak{Y}$ ; i  $\Phi_i(\mathfrak{Y})$  sono di dimensione finita e contenuti dentro  $\mathfrak{Y}$ .  $\Psi$  è un operatore lineare limitato di  $\mathfrak{Y}$  di raggio spettrale  $\rho(\Psi) < 1$  in  $(\mathfrak{Y}, \|\cdot\|_{\mathfrak{Y}})$ . Inoltre si ha:

$$\Psi \Phi_i = \Phi_i \Psi = 0$$

$$\Phi_i \Phi_j = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

$$\Phi_i^2 = \Phi_i$$

e si può allora scrivere

$$\Phi^n = \sum_{i=1}^p \lambda_i^n \Phi_i + \Psi^n \quad \forall n > 0$$

Per la dimostrazione del teorema di veda [9] o [2]; per i nostri scopi sarà inoltre utile riportare la costruzione degli operatori  $\Phi_\lambda$ : per ogni  $f \in V_I$

$$\Phi_\lambda(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k(f) \quad (4.1)$$

dove la convergenza è in norma  $L^1$ .

### 4.3 Una classe di trasformazioni espansive

Imponendo alcune limitazioni sulla mappa  $T$  si otterranno proprietà molto interessanti per l'operatore di Perron-Frobenius. Sia  $\mathfrak{D}$  l'insieme delle funzioni da  $I$  in se stesso che verificano la condizione:

- Esiste una partizione di  $I$  in un numero finito o numerabile di intervalli  $(I_j)_{j \in J}$  tale che per ogni  $j$ ,  $T|_{I_j}$  si estende a una funzione di classe  $C^1$  e strettamente monotona su  $\bar{I}_j$ .

Si nota che se  $T \in \mathfrak{D}$ , allora:

- Esiste una partizione, tra tutte quelle che soddisfano la condizione precedente, che è la meno fine; la si chiamerà *partizione associata a  $T$*  e la si indicherà con  $J$
- Per ogni intero  $k > 0$ ,  $T^k$  appartiene ancora a  $\mathfrak{D}$  e la partizione associata a  $T^k$  è un raffinamento della partizione associata a  $T$ ; la si indicherà con  $J_k$ .

**Osservazione.** Con queste ipotesi, si può scrivere esplicitamente l'operatore di Perron-Frobenius come:

$$\Phi_T f = \sum_{j \in J} \frac{f \circ \sigma_j}{|T' \circ \sigma_j|} \chi_{T(I_j)} \quad (4.2)$$

dove  $\sigma_j : T(I_j) \rightarrow I_j$  è l'inverso della restrizione di  $T$  a  $I_j$ . Tale formula, nel caso  $\Phi_T f = f$  è nota come equazione di Kuzmin.

Possiamo ora definire la classe  $\mathfrak{C}$  di trasformazioni con cui lavoreremo:

**Definizione 4.3.1.** Indichiamo con  $\mathfrak{C}$  l'insieme degli elementi  $\mathfrak{D}$  che soddisfano le condizioni seguenti:

1. La restrizione di  $T$  a ciascun  $I_j$  elemento della partizione associata a  $T$  è strettamente monotona e si estende a una funzione di classe  $C^2$  su  $\bar{I}_j$ .
2. Esiste un intero  $n_0 > 0$  tale che

$$\gamma = \inf_{j \in J_{n_0}} \inf_{x \in I_j} |(T^{n_0})'(x)| > 2$$

3. Per ogni  $k > 0$ ,

$$\inf_{j \in J_k} m(T^k(\bar{I}_j)) > 0$$

4.

$$\sup_{j \in J_{n_0}} \sup_{x \in I_j} \left| \frac{(T^{n_0})''(x)}{[(T^{n_0})'(x)]^2} \right| = K < \infty$$

L'importanza di questa classe di funzioni risiede nel fatto che l'operatore di Perron-Frobenius ad esse associato rispetta le ipotesi del teorema di Ionescu-Tulcea e Marinescu. Infatti:

**Proposizione 4.3.1.** *Prendiamo come  $\mathfrak{L}$  lo spazio  $L^1(I)$  con norma  $L^1$  e come  $\mathfrak{V}$  lo spazio  $V_I$  con norma  $\|f\|_v = \text{Var}_I f + \|f\|_1$  e sia  $T : I \rightarrow I$  un'applicazione in  $\mathfrak{C}$ . Allora l'operatore  $\Phi_T$  soddisfa le ipotesi del teorema di Ionescu-Tulcea e Marinescu.*

*Dimostrazione.* (a) Mostriamo innanzitutto che  $A = \{f \in L^1(m) \mid \|f\|_v \leq C\}$  è compatto nella topologia  $L^1$ . Infatti data una successione  $\{\phi_n\}_{n \geq 0}$  di elementi di  $A$  si ha che esistono, dal momento che tali funzioni sono a variazione limitata,  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  misure con segno tali che  $\phi_n(x) = \mu_n[a, x]$  per ogni  $x \in I$ , dove  $a$  è l'estremo sinistro dell'intervallo  $I$ . Ora, queste misure si possono pensare come elementi del duale dello spazio delle funzioni continue su  $I$  grazie al teorema di Riesz-Markov. In tale spazio la norma di queste misure, che è la loro variazione totale, è equilimitata poichè  $\text{Var} \mu_n = \text{Var} \phi_n \leq \text{Var} \phi_n + \|\phi_n\|_1 \leq C$ . Di conseguenza per il teorema di Alaoglu-Banach esiste una sottosuccessione  $\{\mu_{n_k}\}_{k \geq 0}$  che converge debolmente- $\star$  a una misura con segno  $\mu$ , che per la semicontinuità della variazione totale soddisfa  $|\mu| \leq C$ . Ora, definita  $\phi(x) = \mu[a, x]$  si ha che  $\phi$  è a variazione limitata e  $\text{Var} \phi = |\mu| \leq C$ .

(b) Per la proprietà 3 del Perron-Frobenius si ha  $\|\Phi_T^n f\|_1 \leq \|f\|_1$ , quindi  $\sup_{n \geq 0} \{\|\Phi_T^n f\|_1, f \in BV(I) \cap L^1(m), \|f\|_1 \leq 1\} \leq 1$ .

(c) L'operatore di Perron-Frobenius associato a  $T^{n_0}$  si scrive esplicitamente come:

$$\Phi_T^{n_0} f(x) = \sum_{j \in J_{n_0}} f(\sigma_j x) \frac{1}{|(T^{n_0})'(\sigma_j x)|} \chi_{T^{n_0}(\bar{I}_j)}(x)$$

dove  $\{I_j\}_{j \in J_{n_0}}$  è la partizione associata a  $T^{n_0}$ ,  $\sigma_j$  l'inversa della restrizione di  $T^{n_0}$  a  $I_j$ . Dato  $f$  un elemento di  $V$  fissato, calcoliamo la variazione di  $\Phi_T^{n_0} f$ :

$$\text{Var}_I \Phi_T^{n_0} f \leq \sum_{j \in J_{n_0}} \text{Var}_I \left[ \frac{f(\sigma_j x)}{|(T^{n_0})'(\sigma_j x)|} \chi_{T^{n_0}(\bar{I}_j)} \right]$$

Sia ora  $T^{n_0}(\bar{I}_j) = [a_j, b_j]$ . Abbiamo

$$\text{Var}_I \left[ \frac{f \circ \sigma_j}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j|} \chi_{[a_j, b_j]} \right] \leq \text{Var}_{[a_j, b_j]} \left[ \frac{f \circ \sigma_j}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j|} \right] + \left| \frac{f(\sigma_j a_j)}{(T^{n_0})'(\sigma_j a_j)} \right| + \left| \frac{f(\sigma_j b_j)}{(T^{n_0})'(\sigma_j b_j)} \right|$$

Inoltre per la proprietà 4 della variazione totale

$$\left| \frac{f(\sigma_j a_j)}{(T^{n_0})'(\sigma_j a_j)} \right| + \left| \frac{f(\sigma_j b_j)}{(T^{n_0})'(\sigma_j b_j)} \right| \leq \text{Var}_{[a_j, b_j]} \left( \frac{f \circ \sigma_j}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j|} \right) + 2 \inf_{[a_j, b_j]} \left| \frac{f \circ \sigma_j}{(T^{n_0})' \circ \sigma_j} \right|$$

e

$$\inf_{[a_j, b_j]} \left| \frac{f \circ \sigma_j}{(T^{n_0})' \circ \sigma_j} \right| \leq \frac{1}{b_j - a_j} \int_{[a_j, b_j]} \left| \frac{f(\sigma_j x)}{(T^{n_0})'(\sigma_j x)} \right| dx = \frac{1}{m(T^{n_0}(\bar{I}_j))} \int_{\bar{I}_j} |f(x)| dx$$

Per la condizione 3 che definisce la classe  $\mathfrak{C}$  si ha che esiste  $\delta > 0$  tale che  $\inf_{j \in J_{n_0}} m(T^{n_0}(\bar{I}_j)) = \delta > 0$ , quindi mettendo insieme le stime ottenute

$$\text{Var}_I \Phi_T^{n_0}(f) \leq 2 \sum_{j \in J_{n_0}} \text{Var}_{[a_j, b_j]} \left( \frac{f \circ \sigma_j}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j|} \right) + \frac{2}{\delta} \|f\|_1$$

Poichè  $(T^{n_0})'$  ha sempre lo stesso segno su  $[a_j, b_j]$ , allora

$$\text{Var}_{[a_j, b_j]} \left[ \frac{f \circ \sigma_j}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j|} \right] = \text{Var}_{[a_j, b_j]} \left[ \frac{f \circ \sigma_j}{(T^{n_0})' \circ \sigma_j} \right]$$

Sia ora  $\theta = \{\theta_l\}_{0 \leq l \leq m}$  una suddivisione di  $[a_j, b_j]$  in un numero finito di parti.

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^m \left| \frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j \theta_l) - \frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j \theta_{l-1}) \right| \leq \sum_{l=1}^m |f(\sigma_j \theta_l) - f(\sigma_j \theta_{l-1})| \frac{1}{|(T^{n_0})'(\sigma_j \theta_l)|} + \\ & + \sum_{l=1}^m |f(\sigma_j \theta_{l-1})| \left| \frac{1}{(T^{n_0})'(\sigma_j \theta_l)} - \frac{1}{(T^{n_0})'(\sigma_j \theta_{l-1})} \right| \leq \sup_{1 \leq l \leq m} \left| \frac{1}{(T^{n_0})'(\sigma_j \theta_l)} \right| \sum_{l=1}^m |f(\sigma_j(\theta_l)) - f(\sigma_j(\theta_{l-1}))| + \\ & + \sup_{1 \leq l \leq m} \left| \frac{\frac{1}{(T^{n_0})'(\sigma_j \theta_l)} - \frac{1}{(T^{n_0})'(\sigma_j \theta_{l-1})}}{\sigma_j(\theta_l) - \sigma_j(\theta_{l-1})} \right| \sum_{l=1}^m |f(\sigma_j(\theta_{l-1}))| |\sigma_j(\theta_l) - \sigma_j(\theta_{l-1})| \end{aligned}$$

Ora per la condizione 2 della definizione della classe  $\mathfrak{C}$

$$\sup_{1 \leq l \leq m} \left| \frac{1}{(T^{n_0})'(\sigma_j \theta_l)} \right| \leq \frac{1}{\gamma}$$

e per le condizioni 2 e 4

$$\sup_{1 \leq l \leq m} \left| \frac{\frac{1}{(T^{n_0})'(\sigma_j \theta_l)} - \frac{1}{(T^{n_0})'(\sigma_j \theta_{l-1})}}{\sigma_j(\theta_l) - \sigma_j(\theta_{l-1})} \right| \leq \sup_I \left| \left( \frac{1}{(T^{n_0})'} \right)' \right| \leq \sup_I \left| \frac{(T^{n_0})''}{[(T^{n_0})']^2} \right| \leq K$$

In conclusione ricaviamo la stima per la variazione totale calcolando il limsup sulle suddivisioni  $\theta$  di  $[a_j, b_j]$  quando il diametro della suddivisione tende a 0:

$$\begin{aligned} & \text{Var}_{[a_j, b_j]} \left( \frac{f \circ \sigma_j}{(T^{n_0})' \circ \sigma_j} \right) = \limsup_{|\theta| \rightarrow 0} \sum_{l=1}^m \left| \frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j \theta_l) - \frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j \theta_{l-1}) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{\gamma} \sup_{\theta} \sum_{l=1}^m |f(\sigma_j(\theta_l)) - f(\sigma_j(\theta_{l-1}))| + K \limsup_{|\theta| \rightarrow 0} \sum_{l=1}^m |f(\sigma_j(\theta_{l-1}))| |\sigma_j(\theta_l) - \sigma_j(\theta_{l-1})| \leq \\ & \leq \frac{1}{\gamma} \text{Var}(f) + K \int_{\bar{I}_j} |f| dm \end{aligned}$$

da cui sommando su  $j$

$$\text{Var}_I(\Phi_T^{n_0} f) \leq 2 \left( \frac{1}{\gamma} \text{Var}_I f + K \|f\|_1 \right) + \frac{2}{\delta} \|f\|_1$$

che è la stima che volevamo perchè  $\frac{2}{\gamma} < 1$ . Ovviamente ciò dimostra anche che  $\Phi(V_I) \subseteq V_I$ .

- (d) Se  $S$  è un sottoinsieme limitato in  $BV(I) \cap L^1$ , allora per il punto precedente  $\Phi_T^{n_0}(S)$  è limitato in  $BV(I) \cap L^1$  (ricordiamo  $\|f\|_1 \leq \|f\|_v$ ). Ora, tutti i sottoinsiemi limitati di  $BV(I) \cap L^1$  sono relativamente compatti in  $L^1$ , per la dimostrazione del punto (a). □

## 4.4 Esistenza della misura invariante

Grazie al teorema di Ionescu-Tulcea e Marinescu otteniamo un primo risultato fondamentale per le nostre mappe espansive dell'intervallo (e quindi anche per le frazioni continue giapponesi).

**Proposizione 4.4.1.** *Se la mappa  $T : I \rightarrow I$  appartiene alla classe  $\mathcal{C}$ , allora esiste almeno una misura invariante assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.*

*Dimostrazione.* Le densità di misure invarianti per  $T$  corrispondono come detto ai punti fissi di  $\Phi_T$ , che non solo altro che gli autovettori di autovalore 1. Di conseguenza per la 4.1, ponendo  $f = 1$  si ha che il limite

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \Phi_T^k(1)$$

definisce un elemento di  $V_I$  che appartiene all'autospazio di autovalore 1 per  $\Phi_T$ . Basta dimostrare che tale elemento è non nullo per provare l'esistenza della misura invariante. La proprietà (iv) dell'operatore di Perron-Frobenius implica che

$$\int_I \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \Phi_T^k(1) dm = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \int_I \Phi_T^k(1) dm = 1$$

Di conseguenza poichè queste convergono ad  $h$  in  $L^1$ , si ha che l'integrale delle funzioni converge all'integrale del limite, quindi  $\int_0^1 h dm = 1$ . D'altronde per la positività dell'operatore  $\Phi_T$  si ha  $\Phi_T^k(1) \geq 0$  per ogni  $k \geq 0$  e quindi  $h \geq 0$ , per cui, avendo integrale 1,  $h$  sarà non nulla. □

## 4.5 Ergodicità

Supponiamo che il sistema  $(I, \mathcal{B}, T, hm)$  sia ergodico, il che implica che esiste una sola misura invariante assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue,

cioè 1 è autovalore semplice di  $\Phi_T$ . La decomposizione spettrale dell'operatore di Perron-Frobenius è quindi semplificata:

**Proposizione 4.5.1.** *Supponiamo che 1 sia autovalore semplice dell'operatore di Perron-Frobenius. Gli altri autovalori di modulo 1 sono tutti semplici e sono radici  $p$ -esime dell'unità per un qualche intero  $p$ . Inoltre, esiste una funzione  $v$  di  $L^2(hm)$  di modulo 1 su  $I$  tale che per ogni  $0 < j < p$ ,  $v^j h$  è in  $V_I$ ,  $v^p = 1$  e  $\Phi_T(v^j h) = \lambda^j v^j h$  dove  $\lambda = e^{2\pi i/p}$ . Di conseguenza la decomposizione spettrale si può scrivere, per  $f$  in  $V_I$  e  $k > 0$ ,*

$$\Phi_T^k(f) = \Phi_0(f) + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda^{jk} \Phi_j(f) + \Psi^k(f)$$

dove  $\Phi_j$  è la proiezione di  $V_I$  sullo spazio  $\mathbb{C}v^j h$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo che se esiste  $u \in V_I$  non nulla tale che  $\Phi(u) = \lambda u$  con  $|\lambda| = 1$ ,  $\lambda \neq 1$ , allora esiste  $v \in L^2(hm)$  che non si annulla mai su  $I$  e tale che  $u = vh$ . Sappiamo che  $|\Phi(u)| = |u|$  e per la positività  $|\Phi(u)| \leq \Phi|u|$ , quindi  $\Phi|u| \geq |u| \leq 0$ . Per la proprietà 4 del Perron-Frobenius  $\int_I \Phi|u| dm = \int_I |u| dm$ , quindi  $\Phi|u| = |u|$  q.o. Di conseguenza, essendo l'autovalore 1 semplice e associato all'autovettore  $h$ , normalizzando in modo che  $\int_I |u| dm = 1$  si ha  $|u| = h$ . Si può quindi scrivere  $u = vh$  dove  $v$  è una funzione di modulo 1 tale che

$$\Phi(vh) = \lambda vh$$

Ora si può definire  $P : L^2(hm) \rightarrow L^2(hm)$  come  $P(v) = \frac{\Phi(vh)}{h} \chi_{\{h \neq 0\}}$ . Tale operatore è l'aggiunto di  $\tilde{T}(\tilde{g} = g \circ T)$  nella dualità di  $L^2(hm)$  con se stesso; è inoltre immediato verificare che

$$\|P(v)\|_{L^2(hm)} \leq \|v\|_{L^2(hm)} \quad \forall v \in L^2(hm)$$

Se consideriamo ora l'operatore  $\frac{P}{\lambda}$ , abbiamo che anch'esso ha norma  $L^2(hm)$  minore o uguale a 1 e inoltre ha  $v$  come punto fisso. Poichè in uno spazio di Hilbert i punti fissi di un operatore di norma  $\leq 1$  coincidono con i punti fissi dell'aggiunto e l'aggiunto di  $\frac{P}{\lambda}$  è  $\frac{1}{\lambda} \tilde{T} = \lambda \tilde{T}$ , si ha

$$\lambda v \circ T = v$$

Se  $u_1$  è un altro autovettore di  $\Phi$  con autovalore  $\lambda$ , allora con lo stesso procedimento si trova una  $v_1$  di modulo costante 1 tale che  $\lambda v_1 \circ T = v_1$ , quindi  $(\frac{v_1}{v}) \circ T = \frac{v_1}{v}$ . Di conseguenza

$$\Phi\left(\frac{v_1}{v} \circ T \cdot h\right) = \frac{v_1}{v} h$$

e dal fatto che  $h$  l'autovalore 1 è semplice segue che  $\frac{v_1}{v} h$  è una costante, quindi anche  $\lambda$  è autovalore semplice. Dimostriamo ora che gli autovalori di  $\Phi$  sono le

radici  $p$ -esime dell'unità. Sia  $a \neq 1$  un autovalore di  $\Phi$  di modulo 1 associato a  $vh$  e scriviamo l'operatore in forma esplicita:

$$av(x)h(x) = \sum_{j \in J} v(\sigma_j x) \frac{h(\sigma_j x)}{|T'(\sigma_j x)|} \chi_{T(\bar{I}_j)}(x)$$

Per ogni  $x$  con  $h(x) \neq 0$ ,  $av(x)$  è il baricentro delle  $v(\sigma_j x)$  tali che  $h(\sigma_j x) \chi_{T(\bar{I}_j)}(x) \neq 0$ , e poichè tutti questi hanno modulo 1 dev'essere che per tutti i  $j$  con  $h(\sigma_j x) \chi_{T(\bar{I}_j)}(x) \neq 0$  si ha

$$av(x) = v(\sigma_j x)$$

ed elevando a una potenza intera  $n > 0$

$$a^n v^n(x) = v^n(\sigma_j x)$$

quindi sommando su tutti i rami

$$\Phi(v^n h) = a^n v^n h$$

Ora,  $v^n h \in L^2(hm)$  e  $V_I$  è denso in  $L^2(hm)$ , quindi esistono  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  in  $V_I$  che tendono a  $v^n h$  in norma  $L^1$ . Abbiamo che la successione  $\{\Phi_{a^n}(\phi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  appartiene all'autospazio corrispondente ad  $a^n$  e tende a  $v^n h$ , perchè

$$\|\Phi_{a^n}(\phi_k) - v^n h\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{a^{nj}} \Phi^j(\phi_k - v^n h) \right\|_1 \leq \|\phi_k - v^n h\|_1$$

Da questo segue che almeno uno dei  $\Phi_{a^n}(\phi_k)$  è non nullo, altrimenti anche  $v^n h$  sarebbe la funzione nulla; presa  $\Phi_{a^n}(\phi_k) \neq 0$ , tutti gli altri  $\Phi_{a^n}(\phi_h)$  sono multipli di questo perchè sono autovettori per l'autovalore  $a^n$ , che abbiamo già dimostrato essere semplice. Esistono quindi  $\{\lambda_h\}$  tali che per ogni  $h \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi_{a^n}(\phi_h) = \lambda_h \Phi_{a^n}(\phi_k)$  e poichè  $\{\Phi_{a^n}(\phi_h)\}$  converge,  $\{\lambda_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  dev'essere limitato, quindi anche le norme  $\|\Phi_{a^n}(\phi_h)\|_v$  sono limitate e per la prop. 4.3.1 (a)  $v^n h \in V_I$ . Di conseguenza  $a^n$  è autovalore per  $\Phi_T$  con autovettore  $v^n h$  e, poichè ci sono un numero finito di autovalori, essi devono essere  $\{1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{p-1}\}$  con  $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{p}}$  e gli autovettori sono  $\{h, vh, \dots, v^{p-1}h\}$ . □

## 4.6 Le perturbazioni dell'operatore $\Phi_T$

**Definizione 4.6.1.** Data  $f \in V_I$  a valori reali, dato  $\theta \in \mathbb{C}$ , si definisce l'operatore  $\Phi_f(\theta) : V_I \rightarrow V_I$  con

$$\Phi_f(\theta)(g) = \Phi(\exp(\theta f)g)$$

**Proposizione 4.6.1.** L'operatore  $\Phi_f(\theta)$  verifica le proprietà seguenti:

(1.)  $\Phi_f(0) = \Phi$

(2.) Per ogni  $\theta \in \mathbb{C}$ ,  $\Phi_f(\theta)$  è un operatore continuo su  $V_I$ .

(3.) La funzione  $\theta \mapsto \Phi_f(\theta)$  è analitica.

(4.) Per ogni intero  $n > 0$ , per ogni numero complesso  $\theta$ , si ha  $m$ -quasi ovunque la seguente uguaglianza:

$$\Phi_f^n(\theta)(g) = \Phi^n(\exp(\theta S_n f)g) \quad \text{dove } S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$$

**Proposizione 4.6.2.** *Esiste un numero reale  $a > 0$  tale che se  $|\theta| < a$ , allora per ogni  $n \geq 1$ , per ogni  $g$  in  $V_I$ , si può scrivere*

$$\Phi_f^n(\theta)(g) = \lambda_0^n(\theta)\Phi_0(\theta)(g) + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k^n(\theta)\Phi_k(\theta)(g) + \Psi_f^n(\theta)(g)$$

Inoltre:

- le funzioni  $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$ ,  $\theta \mapsto \lambda_k(\theta)$  e  $\theta \mapsto \Psi_f(\theta)$  sono analitiche in un intorno di  $\theta = 0$ ;
- $\lambda_k(0) = \lambda^k$  e  $\lambda_k(\theta)$  è un autovalore di  $\Phi_f(\theta)$  di modulo maggiore di  $\frac{2+\rho(\Psi)}{3} = \rho_2$ ;
- gli operatori  $\Phi_k(\theta)$  sono delle proiezioni di  $V_I$  sul sottospazio proprio  $V(\lambda_k(\theta)) = \{g \in V_I \mid \Phi_f(\theta)(g) = \lambda_k(\theta)g\}$ , che è di dimensione 1 e  $\Phi_k(0) = \Phi_k$ ,  $(\Phi_0(f) = m(fh)h)$ ;
- l'operatore  $\Psi_f(\theta)$  è un operatore su  $V_I$  di raggio spettrale  $\rho(\Psi_f(\theta)) \leq \rho_2$ ,  $\Psi_f(0) = \Psi$  e per tutti i  $0 \leq k \leq p-1$ :

$$\Psi_f(\theta)\Psi_k(\theta) = \Phi_k(\theta)\Psi_f(\theta) = 0$$

$$e \|\Psi_f^n(\theta)(h)\|_v \leq C\rho_2^{n+1}|\theta|.$$

## 4.7 Il teorema del limite centrale

Finalmente siamo pronti per ottenere il teorema del limite centrale. Si suppone che la trasformazione  $T$  appartenga alla classe  $\mathfrak{C}$ , che  $f$  sia una funzione in  $V_I$  a valori reali. Si supporrà inoltre che  $f$  abbia media nulla rispetto alla misura  $hdm$ . Si studierà il comportamento delle somme di Birkhoff

$$S_N f = \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^k$$

### 4.7.1 Esistenza di una varianza non nulla

**Proposizione 4.7.1.** *Sia  $f \in V_I$  a valori reali t.c.  $\int_I f h dm = 0$ . Allora la successione  $M_N = \int_I \left(\frac{S_N f}{\sqrt{N}}\right)^2 h dm$  converge a un valore reale positivo; detto  $\sigma^2$  il limite, si hanno le seguenti equivalenze:*

$$\begin{aligned} \sigma^2 = 0 &\Leftrightarrow f = u - u \circ T \text{ in } L^2(hm), \text{ con } u \text{ in } L^2(hm) \text{ e } uh \text{ in } V_I \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow fh = uh - u \circ T \cdot h \text{ in } V_I \end{aligned}$$

**Osservazione.** *L'equazione  $f = u - u \circ T$  si ritrova in moltissimi ambiti della teoria dei sistemi dinamici discreti; essa è detta equazione coomologica perchè considerando il gruppo  $G = \{T^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  e il  $G$ -modulo  $M$  delle osservabili, l'operatore  $u \mapsto u - u \circ T$  definito su  $M$  è precisamente, in termini di coomologia dei gruppi, l'operatore di 0-cobordo del complesso  $(G, M)$ .*

*Dimostrazione.* La dimostrazione verrà suddivisa in alcuni lemmi.

**Lemma 4.7.2.** *La successione  $\{M_N\}_{N>0}$  converge.*

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} M_N &= \int_I \left(\frac{S_N f}{\sqrt{N}}\right)^2 h dm = \frac{1}{N} \langle S_N f, S_N f \rangle_{hm} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \langle f \circ T^k, f \circ T^l \rangle_{hm} = \\ &\frac{1}{N} \left[ N \langle f, f \rangle_{hm} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (N-k) \langle f \circ T^k, f \rangle_{hm} \right] = \\ &= -\langle f, f \rangle_{hm} + 2 \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) P^k f, f \right\rangle_{hm} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Sia  $P$  l'operatore aggiunto rispetto alla composizione con  $T$  nello spazio  $L^2(hm)$ , cioè tale che

$$\langle Pf, h \rangle_{hm} = \langle f, g \circ T \rangle_{hm} \quad \text{per ogni } f, g, \text{ in } L^2(hm)$$

Da questa proprietà e dalla definizione di  $\Phi$  si ha che, dato  $f \in V_I$

$$\langle \Phi(fh), g \rangle_m = \langle f, g \circ T \rangle_{hm} = \langle Pf, g \rangle_{hm} = \langle (Pf)h, g \rangle_m$$

per ogni  $g \in V_I \subseteq L^2 \cap L^\infty$  da cui ponendo  $g = \chi_{\{(Pf)h - \Phi(fh) \geq 0\}}$  e  $g = \chi_{\{(Pf)h - \Phi(fh) \leq 0\}}$

$$Pf \cdot h = \Phi(fh) \quad m - \text{q.o.}$$

e ricorsivamente

$$P^k f \cdot h = \Phi^k(fh) \quad m - \text{q.o.}$$

da cui

$$P^k f = \frac{\Phi^k(fh)}{h} \chi_{\{h \neq 0\}} \quad hm - \text{q.o.}$$

$$P^k f = m(fh) \chi_{\{h \neq 0\}} + \sum_{j=2}^p \lambda^{jk} \frac{\Phi_j(fh)}{h} \chi_{\{h \neq 0\}} + \frac{\Psi^k(fh)}{h} \chi_{\{h \neq 0\}}$$

e anche

$$(P^k f)h = m(fh)h + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda^{jk} \Phi_j(fh) + \Psi^k(fh) \quad (4.4)$$

Ora utilizziamo la decomposizione spettrale per dimostrare che  $\{\sum_{k=0}^{N-1} (1 - \frac{k}{N}) P^k f\}_{N>0}$  converge (ricordiamo che per ipotesi  $m(fh) = 0$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} (1 - \frac{k}{N}) P^k f &= \sum_{k=0}^{N-1} (1 - \frac{k}{N}) \left[ \sum_{j=1}^{p-1} \lambda^{jk} \Phi_j(fh) + \Psi^k(fh) \right] \frac{1}{h} \chi_{\{h \neq 0\}} = \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} \left[ \frac{1}{1 - \lambda^j} + \frac{1}{N} \frac{1}{1 - \lambda^j} - \frac{1}{N} \frac{1 - \lambda^{j(N+1)}}{(1 - \lambda^j)^2} \right] \frac{\Phi_j(fh)}{h} \chi_{\{h \neq 0\}} + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Psi^k(fh)}{h} \chi_{\{h \neq 0\}} - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k \frac{\Psi^k(fh)}{h} \chi_{\{h \neq 0\}} \end{aligned}$$

Poichè  $\Psi$  ha raggio spettrale limitato da  $\rho < 1$

$$\left\| \frac{\Psi^k(fh)}{h} \chi_{\{h \neq 0\}} \right\|_{L^1(hm)} \leq \|\Psi^k(fh)\|_v \leq \rho^k \|fh\|_v$$

quindi la serie  $\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Psi^k(fh)}{h} \chi_{\{h \neq 0\}}$  converge e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k \frac{\Psi^k(fh)}{h} \chi_{\{h \neq 0\}} \right\|_{L^1(hm)} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \|fh\|_v \left( \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \right) = 0$$

e si ha la convergenza in  $L^1(hm)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - \frac{k}{N}) P^k f = \left( \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{1 - \lambda^j} \Phi_j(fh) + \sum_{k=0}^{\infty} \Psi^k(fh) \right) \frac{1}{h} \chi_{\{h \neq 0\}}$$

Detta

$$G = \left[ \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{1 - \lambda^j} \Psi_j(fh) + \sum_{k=0}^{\infty} \Psi^k(fh) \right] \frac{1}{h} \chi_{\{h \neq 0\}} \quad (4.5)$$

si ha

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} M_N = 2\langle G, f \rangle_{hm} - \langle f, f \rangle_{hm}$$

□

Supponiamo ora  $\sigma^2 = 0$  e dimostriamo il

**Lemma 4.7.3.** *La successione  $\{S_N f\}_{N>0}$  è uniformemente limitata in  $L^2(hm)$ .*

*Dimostrazione.* Poichè  $\sigma^2 = 0$  si ha per la (4.5)

$$\begin{aligned} \|S_N f\|_{L^2(hm)}^2 &= NM_N = \\ &= -2N \sum_{k=N}^{\infty} \langle \Psi^k(fh), f \rangle_m - 2 \sum_{k=0}^{N-1} k \langle \Psi^k(fh), f \rangle_m + 2 \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\lambda^j (\lambda^{jN} - 1)}{(1 - \lambda^j)^2} \langle \Phi_j(fh), f \rangle_m \end{aligned}$$

Inoltre

$$|\langle \Psi^k(fh), f \rangle_m| = \left| \int_I \Psi^k(fh) f dm \right| \leq \|\Psi^k(fh)\|_v \|f\|_1 \leq C \rho^k$$

con  $0 < \rho < 1$  e  $C$  che dipende da  $f$ . Quindi

$$\begin{aligned} \left| N \sum_{k=N}^{\infty} \langle \Psi^k(fh), f \rangle_m \right| &\leq CN \frac{\rho^N}{1 - \rho} \\ \left| \sum_{k=0}^{N-1} k \langle \Psi^k(fh), f \rangle_m \right| &\leq C \sum_{k=0}^{N-1} k \rho^k = C \left[ \frac{\rho(1 - \rho^N)}{(1 - \rho)^2} - \frac{N\rho^N}{1 - \rho} \right] \end{aligned}$$

In conclusione

$$\|S_N f\|_{L^2(hm)}^2 \leq \frac{2C}{(1 - \rho)^2} + 2 \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{|1 - \lambda^j|^2} |\langle \Phi_j(fh), f \rangle_m|$$

che è limitato al variare di  $N$ . □

**Lemma 4.7.4.** *Per ogni  $g \in L^2(hm)$ , per ogni  $0 \leq j \leq p-1$  esiste  $S_j \in L^2(hm)$ ,  $m(S_j h) = 0$  tale che si abbia*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_{Np+j} f, g \rangle_{hm} = \langle S_j, g \rangle_{hm}$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $N > 0$  e per ogni  $g \in L^2(hm)$  tale che  $gh$  appartiene a  $V_I$  si ha

$$\langle S_N f, g \rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1 - \lambda^{iN}}{1 - \lambda^i} \langle f, \Phi_i(gh) \rangle_m + \sum_{k=0}^{N-1} \langle f, \Psi^k(gh) \rangle_m$$

Poichè la successione  $\sum_{k=0}^{N-1} \langle f, \Psi^k(gh) \rangle_m$  converge e  $\lambda^p = 1$  si ottiene che per  $0 \leq j \leq p-1$  le successioni  $(\langle S_{Np+j} f, g \rangle_{hm})_{N>0}$  convergono. Presa una  $g \in L^2(hm)$  qualunque per densità esiste una successione  $\{g_n\} \subseteq V_I$  tale che  $g_n \rightarrow g$  in  $L^2(hm)$ .

$$\limsup_{\min\{M, N\} \rightarrow \infty} |\langle S_{Np+j} f, g \rangle_{hm} - \langle S_{Mp+j} f, g \rangle_{hm}| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \limsup_{\min\{M,N\} \rightarrow \infty} (|\langle S_{Np+j}f, g \rangle_{hm} - \langle S_{Mp+j}f, g \rangle_{hm}| + |\langle S_{Np+j}f, g - g_n \rangle_{hm}| + \\ &\quad + |\langle S_{Mp+j}f, g - g_n \rangle_{hm}|) \leq \sup_{N \in \mathbb{N}} \|S_{Np+j}f\|_{L^2(hm)} \|g - g_n\|_{L^2(hm)} \end{aligned}$$

quindi, poichè  $\|g - g_n\|$  è arbitrariamente piccolo, la successione  $(\langle S_{Np+j}f, g \rangle_{hm})_{N>0}$  converge. Analogamente si dimostra che l'operatore  $g \mapsto \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_{Np+j}f, g \rangle_{hm}$  è limitato in norma  $L^2(hm)$ , quindi per ogni  $0 \leq j \leq p-1$  esistono limiti deboli  $S_j$  delle successioni  $(S_{Np+j})_{N>0}$ . Ora,  $m(S_j h) = \langle S_j, 1 \rangle_{hm} = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N f, 1 \rangle_{hm} = 0$ .  $\square$

**Lemma 4.7.5.** *Si ha  $f = S - S \circ T$  in  $L^2(hm)$  con  $S = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} S_j$ .*

*Dimostrazione.* Dall'identità

$$f - f \circ T^{Np+j} = S_{Np+j}f - S_{Np+j}f \circ T$$

si ottiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} = -\langle S_j, g \rangle_{hm} + \langle S_j \circ T, g \rangle_{hm} + \langle f, g \rangle_{hm} \quad (4.6)$$

e ricordando che

$$\langle f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} = \langle f, \Phi^{Np+j}(gh) \rangle_m$$

si sviluppa l'operatore ottenendo, se  $gh \in V_I$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij} \langle \Phi_i(gh), f \rangle_m \quad (4.7)$$

sostituendo nella (4.6)

$$\langle f, g \rangle_{hm} = \langle S_j - S_j \circ T, g \rangle_{hm} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij} \langle \Phi_i(gh), f \rangle_m$$

A questo punto si sommano le equazioni ottenute per  $0 \leq j \leq p-1$ , utilizzando  $\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{ij} = 0$  e si ottiene, per ogni  $g \in L^2(hm)$  tale che  $gh \in V_I$ ,

$$\langle f, g \rangle_{hm} = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \langle S_j - S_j \circ T, g \rangle_{hm} = \langle S - S \circ T, g \rangle_{hm} \quad (4.8)$$

quindi l'ortogonale di  $S - S \circ T - f$  contiene tutte le  $g \in L^2(hm)$  per cui  $gh \in V_I$ , che sono dense in  $L^2(hm)$ ; ciò implica

$$f = S - S \circ T \text{ in } L^2(hm) \quad (4.9)$$

$\square$

**Lemma 4.7.6.** *Si ha  $P(S \circ T) = S$  in  $L^2(hm)$ .*

*Dimostrazione.* Per l'equazione (4.9) anche  $S \circ T$  appartiene a  $L^2(hm)$ , perchè  $f$  e  $S$  vi appartengono; da questo si ottiene, per ogni  $g \in L^2(hm)$

$$\langle P(S \circ T), g \rangle_{hm} = \langle S \circ T, g \circ T \rangle_{hm} = \langle S, g \rangle_{hm}$$

□

**Lemma 4.7.7.**  *$S = f - G$  in  $L^2(hm)$  e  $Sh = (f - G)h$  in  $V_I$ .*

*Dimostrazione.* Per la densità di  $V_I$  in  $L^2(hm)$  si prenda  $\{S_n\} \subseteq V_I$  con  $S_n \rightarrow S$  in  $L^2(hm)$ . Per i lemmi 4.7.5 e 4.7.6 si ha per  $0 \leq j \leq p-1$ , per ogni  $N > 0$ ,

$$\sum_{k=1}^{Np+j} P^k f = P^{Np+j} S - S = P^{Np+j} S_n - S + P^{Np+j} (S - S_n) \quad (4.10)$$

in  $L^2(hm)$ ; moltiplicando scalarmente per una  $g \in L^2(hm)$  generica, si ha

$$\left\langle \sum_{k=0}^{Np+j} P^k f, g \right\rangle_{hm} = \langle P^{Np+j} S_n, g \rangle_{hm} - \langle S, g \rangle_{hm} + \langle P^{Np+j} (S - S_n), g \rangle_{hm} + \langle f, g \rangle_{hm} \quad (4.11)$$

D'altra parte per la (4.4) il membro destro diventa

$$\left\langle \sum_{k=0}^{Np+j} P^k f, g \right\rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1 - \lambda^{i(j+1)}}{1 - \lambda^i} \langle \Phi_i(fh), g \rangle_m + \sum_{k=0}^{Np+j} \langle \Psi^k(fh), g \rangle_m \quad (4.12)$$

Mettiamo insieme le equazioni (4.11) e (4.12), sviluppiamo la decomposizione spettrale dell'operatore  $P^{Np+j}$  (eq. (4.4)) e sommiamo su tutti i  $j$  tali che  $0 \leq j \leq p-1$ ; ricordando che  $\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{ij} = 0$  si ottiene

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{1 - \lambda^i} \langle \Phi_i(fh), g \rangle_m + \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{Np+j} \langle \Psi^k(fh), g \rangle_m - \langle f, g \rangle_{hm} = \\ & = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \langle \Psi^{Np+j}(S_n h), g \rangle_m - \langle S, g \rangle_{hm} + \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \langle P^{Np+j}(S - S_n), g \rangle_{hm} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Facciamo ora il limite  $N \rightarrow \infty$ : osserviamo che  $\lim_{N \rightarrow \infty} \Psi^{Np+j}(S_n h) = 0$  e

$$\begin{aligned} |\langle P^{Np+j}(S - S_n), g \rangle_{hm}| & \leq \|P^{Np+j}(S - S_n)\|_{L^2(hm)} \|g\|_{L^2(hm)} \leq \\ & \leq \|S - S_n\|_{L^2(hm)} \|g\|_{L^2(hm)} \end{aligned}$$

quindi facendo tendere  $N \rightarrow \infty$  e poi  $S_n \rightarrow S$  si ha

$$\langle S, g \rangle_{hm} = \langle f, g \rangle_{hm} - \left\langle \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{1 - \lambda^i} \Phi_i(fh) + \sum_{k=0}^{\infty} \Psi^k(fh), g \right\rangle_m$$

Questo dimostra che  $S = f - G$   $hm$ -q.o. e di conseguenza  $Sh = fh - Gh$   $m$ -q.o.e poichè  $fh, Gh \in V_I$  anche  $Sh \in V_I$ . □

Grazie ai lemmi precedenti si è dimostrata una implicazione; supponiamo ora che  $f = u \circ T - u$  con  $u$  in  $L^2(hm)$  e  $uh$  in  $V_I$ . Si ottiene  $S_N f = u \circ T^N - u$ , da cui

$$\int_I \left( \frac{1}{\sqrt{N}} S_N f \right)^2 hdm = \frac{1}{N} \int_I (u^2 \circ T^N - 2u \circ T^N \cdot u + u^2) hdm$$

che tende a 0 quando  $N$  tende a  $+\infty$ , quindi  $\sigma^2 = 0$  e ciò dimostra l'equivalenza fra le prime due condizioni. L'equivalenza della seconda e terza condizione è immediata. □

Enunciamo ora il teorema principale di questa sezione.

**Teorema 4.7.8.** *Sia  $f$  un elemento di  $V_I$  tale che l'equazione coomologica*

$$f - m(fh) = u - u \circ T$$

*non ha soluzioni  $u \in L^2(hm)$  tali che  $uh \in V_I$ . Allora per ogni  $v \in \mathbb{R}$ , si ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} hm \left( \frac{S_n f - nm(fh)}{\sigma \sqrt{n}} \leq v \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-x^2/2} dx$$

*Dimostrazione.* L'idea di base è scrivere la funzione caratteristica di  $\frac{S_n f - m(fh)}{\sigma \sqrt{n}}$  in termini dell'operatore perturbato  $\Phi_f(\theta)$  (di cui la prop. 4.6.2 ci dà la decomposizione spettrale) e mostrare che essa converge alla funzione caratteristica della misura gaussiana standard.

**Lemma 4.7.9.**  $\lambda_0(0) = hm(f)$ .

*Dimostrazione.* Per la proposizione 4.6.2 si può scrivere

$$\begin{aligned} \int_I \exp(i\theta S_n f) hdm &= \int_I \Phi^n(\exp(i\theta S_n f)h) dm = \int_I \Phi_f^n(i\theta)(h) dm = \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k^n(i\theta) \int_I \Phi_k(i\theta)(h) dm + \int_I \Psi^n(i\theta)(h) dm \end{aligned}$$

Fissiamo  $t \in \mathbb{R}$ ; per  $n$  sufficientemente grande si avrà  $|\frac{t}{n}| < a$ . Allora:

$$\int_I \exp(it \frac{S_n f}{n}) hdm = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k^n(\frac{it}{n}) \int_I \Phi_k(\frac{it}{n})(h) dm + \int_I \Psi^n(\frac{it}{n})(h) dm$$

A questo punto sviluppiamo  $\lambda_k^n$  e  $\Phi_k$  usando l'analiticit :

$$\begin{aligned}\lambda_k^n\left(\frac{it}{n}\right) &= \left(\lambda^k + \frac{it}{n}\lambda'_k(0) - \frac{t^2}{2n^2}\lambda''_k(0) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^n = \\ &= \lambda^{nk} \exp\left(it\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k}\right) (1 + O(1/n)) \\ \Phi_k\left(\frac{it}{n}\right) &= \Phi_k + \frac{it}{n}\Phi_k^{(1)} + O(1/n^2)\end{aligned}$$

Ricordiamo che

$$\int_I \Phi_k(h) dm = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 0 \\ 1 & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Dalle stime precedenti si ottiene quindi

$$\int_I \exp\left(it\frac{S_n f}{n}\right) h dm = \exp(it\lambda'_0(0)) + \int_I \Psi^n\left(\frac{it}{n}\right)(h) dm + O(1/n)$$

e poich   $\|\Psi^n(\frac{it}{n})(h)\|_v \leq \frac{t}{n} |C\rho_2^{n+1}|$ , si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \exp\left(it\frac{S_n f}{n}\right) h dm = \exp(it\lambda'_0(0))$$

Poich  il sistema  $(I, \mathcal{B}, T, hm)$    ergodico e l'osservabile  $f$  sta in  $L^1(hm)$  ( $f \in L^1(m)$  e  $h \in BV(I) \subseteq L^\infty(I)$ ), applicando il teorema di Birkhoff:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n f}{n} = m(fh) \quad hm - \text{q.o.}$$

Da questo segue che  $\exp(it\frac{S_n f}{n})$  tende  $hm$ -q.o. a  $\exp(itm(fh))$  e per il teorema di convergenza dominata

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \exp(it\frac{S_n f}{n}) h dm = \exp(itm(fh))$$

e per quanto gi  visto il membro sinistro   uguale a  $\exp(it\lambda'_0(0))$ . Per ogni  $t \in \mathbb{R}$  vale quindi l'uguaglianza  $\exp(itm(fh)) = \exp(it\lambda'_0(0))$ , che implica  $\frac{t}{2\pi}(m(fh) - \lambda'_0(0)) \in \mathbb{Z}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , da cui segue  $m(fh) = \lambda'_0(0)$ . □

**Lemma 4.7.10.** *Se  $hm(f) = 0$ , allora  $\sigma^2 = \lambda''_0(0)$ .*

*Dimostrazione.* Derivando sotto il segno di integrale si ottiene:

$$\int_I \left(\frac{S_n f}{\sqrt{n}}\right)^2 h dm = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \int_I \exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}} S_n f\right) h dm \right) \Big|_{t=0}$$

Come prima, si fissa  $t \in \mathbb{R}$  e per  $n$  sufficientemente grande si può scrivere la decomposizione spettrale usando l'equazione 4.6.2:

$$\int_I \exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}} S_n f\right) h dm = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right) \int_I \Phi_k\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) dm + \int_I \Psi^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) dm$$

e si fa lo sviluppo della derivata seconda rispetto a  $t$  al tempo  $t = 0$ : poniamo  $u(t) = \lambda_k^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)$  e  $v(t) = \int_I \Phi_k\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) dm$  e scriviamo lo sviluppo in 0 di  $\Phi_k$

$$\Phi_k\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right) = \Phi_k(0) + \frac{it}{\sqrt{n}} \Phi_k^{(1)} - \frac{t^2}{2n} \Phi_k^{(2)} + O\left(\left(\frac{|t|}{n}\right)^{3/2}\right)$$

Ora, per  $k \neq 0$  si ha

$$v(0) = 0 \quad u(0) = \lambda^{nk} \quad u'(0) = i\sqrt{n}\lambda^{k(n-1)}\lambda'_k(0)$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \lambda_k^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right) \int_I \Phi_k\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) dm \right) \Big|_{t=0} &= u''(0)v(0) + 2u'(0)v'(0) + u(0)v''(0) = \\ &= -\lambda^{nk} \frac{1}{n} \int_I \Phi_k^{(2)}(h) dm - 2\lambda^{(n-1)k} \lambda'_k(0) \int_I \Phi_k^{(1)}(h) dm \end{aligned}$$

e per  $k = 0$

$$\begin{aligned} u(0) &= 1 & u'(0) &= i\sqrt{n}\lambda'_0(0) & u''(0) &= (1-n)(\lambda'_0(0))^2 - \lambda''_0(0) \\ v(0) &= 1 & v'(0) &= \frac{i}{\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_0^{(1)}(h) dm & v''(0) &= -\frac{1}{n} \int_0^1 \Phi_0^{(2)}(h) dm \end{aligned}$$

Inoltre per la formula di Cauchy applicata a  $\Psi_f$  (il cerchio di raggio  $\rho_2$  e centro nell'origine contiene tutto lo spettro di  $\Psi_f$ )

$$\Psi_f^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0, \rho_2)} \lambda^n R(\lambda, \Phi_f\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right))(h) d\lambda$$

La funzione  $\theta \mapsto R(\lambda, \Phi_f(i\theta))$  (dove  $R(z, A) = (z - A)^{-1}$  è il risolvente) è analitica se  $|\theta| < a$ , per cui per  $n$  grande

$$R(\lambda, \Phi_f\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)) = R(\lambda, \Phi) + \frac{it}{\sqrt{n}} R^{(1)}(\lambda, \Phi) - \frac{t^2}{2n} R^{(2)}(\lambda, \Phi) + \frac{t^2}{n} \bar{R}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)$$

dove gli operatori  $R$ ,  $R^{(1)}$ ,  $R^{(2)}$  e  $\bar{R}$  sono operatori limitati da  $V_I$  in sè e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{R}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h)\|_v = 0$ . Di conseguenza

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \int_0^1 \Psi_f^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) dm \right) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi n i} \oint_{C(0, \rho_2)} \lambda^n R^{(2)}(\lambda) d\lambda + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

che tende a 0 se  $n$  tende a  $\infty$ . Quindi:

$$\int_I \left(\frac{S_n f}{\sqrt{n}}\right)^2 h dm = \lambda_0''(0) + 2 \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{k(n-1)} \lambda_k'(0) \int_I \Phi_k^{(1)}(h) dm +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{p-1} \int_I \Phi_k^{(2)}(h) dm + \frac{1}{2\pi n \iota} \oint_{C(0, \rho_2)} \lambda^n R^{(2)}(\lambda, \Phi) d\lambda \quad (4.14)$$

Sappiamo per il lemma 4.7.3 che tutti i termini di questa equazione hanno limite eccetto a priori

$$2 \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{k(n-1)} \lambda_k'(0) \int_I \Phi_k^{(1)}(h) dm$$

che quindi deve anch'esso avere limite; d'altronde, essendo  $\lambda$  radice  $p$ -esima dell'unità, tale termine è periodico di periodo  $p$ , pertanto dev'essere costante. Dimostriamo che tale costante è 0.

**Lemma 4.7.11.** *Siano  $a_1, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{C}$  e  $\lambda$  radice  $p$ -esima primitiva dell'unità tale che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{nk} a_k = \sum_{k=1}^{p-1} a_k$ . Allora  $a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $a_0 = -\sum_{k=1}^{p-1} a_k$ . Allora si ottiene che per ogni  $0 \leq n \leq p-1$

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k \lambda^{nk} = \sum_{k=1}^{p-1} a_k + a_0 = 0$$

Di conseguenza  $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$  appartiene al nucleo della matrice di Vandermonde  $(W)_{ij} = \lambda^{ij}$  per  $0 \leq i, j \leq p-1$ , che, essendo  $\lambda$  primitiva, ha determinante nonnullo perchè  $\lambda$  è una radice primitiva.  $\square$

In conclusione, passando al limite nella (4.14) si ottiene

$$\sigma^2 = \lambda_0''(0)$$

$\square$

**Lemma 4.7.12.** *Se  $hm(f) = 0$ , allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \Phi_f^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) dm = \exp\left(\frac{-t^2 \sigma^2}{2}\right)$*

*Dimostrazione.* Fissato  $t \in \mathbb{R}$ , per  $n$  grande si scrive nuovamente la decomposizione spettrale

$$\int_I \Phi_f^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) dm = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right) \int_I \Phi_k\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) dm + \int_I \Psi_f^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) dm$$

Poichè  $\|\Psi^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)\|_v \leq |\frac{it}{\sqrt{n}}| C\rho_2^{n+1}$  il termine con  $\Psi_f^n$  tende a 0 per  $n \rightarrow \infty$ .  
Inoltre

$$\begin{aligned} \left(\lambda_0\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)\right)^n &= e^{n\log(1-\frac{t^2}{2n}\lambda_0''(0)+O(\frac{|t|^3}{n^{3/2}}))} = \\ &= e^{n(-\frac{t^2}{2n}\lambda_0''(0)+O(\frac{|t|^3}{n^{3/2}}))} = e^{-\frac{t^2}{2}\lambda_0''(0)} \left(1 + O\left(\frac{|t|^3}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right) \end{aligned}$$

Se  $k \neq 0$

$$\begin{aligned} \left(\lambda_k\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)\right)^n &= e^{n\log(\lambda^k + \lambda_k'(0)\frac{it}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n}\lambda_k''(0) + O(\frac{|t|^3}{n^{3/2}}))} = \\ &= \lambda^{nk} e^{n(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}\frac{it}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n}\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k} + \frac{t^2}{2n}\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^{2k}} + O(\frac{|t|^3}{n^{3/2}}))} = \lambda^{nk} e^{it\sqrt{n}\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k} - \frac{t^2}{2}(\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k} - \frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^{2k}})} (1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}})) \end{aligned}$$

Per gli operatori  $\Phi_k$  si hanno gli sviluppi

$$\begin{aligned} \int_I \Phi_0\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h)dm &= 1 + O\left(\frac{|t|}{\sqrt{n}}\right) \\ \int_I \Phi_k\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h)dm &= \frac{it}{\sqrt{n}} \int_I \Phi_k^{(1)}(h)dm + O\left(\frac{t^2}{n}\right) \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\int_0^1 \Phi_f^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h)dm = e^{-\frac{t^2}{2}\lambda_0''(0)}(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}}))^2 + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{nk} e^{it\sqrt{n}\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k} - \frac{t^2}{2}(\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k} - \frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^{2k}})} O\left(\frac{|t|}{\sqrt{n}}\right)$$

Se ora dimostriamo che  $\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}$  è reale,  $e^{it\sqrt{n}\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k} - \frac{t^2}{2}(\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k} - \frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^{2k}})}$  è limitato per ogni  $k \neq 0$  e passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi_f^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h)dm = e^{-\frac{t^2}{2}\lambda_0''(0)} = e^{-\frac{t^2}{2}\sigma^2}$$

che è precisamente la tesi del lemma.

Dimostriamo quest'ultimo fatto; dato che la funzione  $\theta \mapsto \lambda_k(i\theta)$  è analitica, per  $\theta \in \mathbb{R}$  in un intorno di 0 si ha  $|\lambda_k(i\theta)| \leq 1$  Sviluppando

$$\lambda_k(i\theta) = \lambda^k \left(1 + i\theta \frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k} + O(\theta^2)\right)$$

da cui prendendo i moduli

$$1 \geq \left|\frac{\lambda_k(i\theta)}{\lambda^k}\right| \geq \left(1 - \theta \Im m \frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}\right)^2 + \theta^2 \left(\Re e \frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}\right)^2 - O(\theta^2) = 1 - 2\theta \Im m \left(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}\right) + O(\theta^2)$$

e poichè questo è vero per  $\theta$  reale in un intorno di 0, dev'essere  $\Im m\left(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}\right) = 0$ , il che conclude la dimostrazione del lemma.  $\square$

Siamo ora pronti per dimostrare il teorema del limite centrale: applicando il lemma 4.7.12 a  $F = f - hm(f)$  con  $\frac{t}{\sigma}$  al posto di  $t$  (dove  $\sigma^2$  è fornito dalla proposizione 4.7.1), si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \Phi_F^n\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h) dm = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Ora, il membro sinistro è a sua volta uguale a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \Phi^n\left(\exp\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}} S_n F\right) h\right) dm &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \exp\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}} S_n F\right) h dm = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \exp\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}} (S_n f - n hm(f))\right) h dm \end{aligned}$$

Poichè  $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$  è la funzione caratteristica della legge normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ , per il teorema di continuità di Lévy la variabile  $\frac{S_n f - n hm(f)}{\sigma\sqrt{n}}$  converge in legge alla misura gaussiana. In formule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} hm\left(\frac{S_n f - n hm(f)}{\sigma\sqrt{n}} \leq v\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

□

## 4.8 Teorema del limite centrale per le frazioni continue giapponesi

Questa sezione contiene il contributo originale della tesi. Si verifica che le trasformazioni associate alle  $\alpha$ -frazioni continue di Nakada soddisfano tutte le condizioni imposte da [2] per avere il teorema del limite centrale.

### 4.8.1 Applicabilità del teorema di Ionescu-Tulcea e Marinescu

**Proposizione 4.8.1.** *Per ogni  $\alpha \in (0, 1)$ , la mappa  $T_\alpha$  appartiene alla famiglia  $\mathfrak{C}$ .*

*Dimostrazione.* (Per semplificare la notazione, si scriverà  $T$  al posto di  $T_\alpha$ .) La condizione (1) è banalmente verificata. Per quanto riguarda la condizione (2) si ha che

$$\gamma_1 = \inf_{x \in I} |T'(x)| = \min \left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{(1-\alpha)^2} \right\} > 1$$

Inoltre per la formula di derivazione delle funzioni composte

$$\gamma_n = \inf_{x \in I} |(T^n)'(x)| \geq \gamma_1^n$$

da cui si vede che esiste  $n_0 > 0$  per cui  $\gamma_n > 2$  per ogni  $n \geq n_0$ , il che dimostra la (2).

Condizione (3): la partizione  $J_n$  associata a  $T^n$  è formata da tutti gli intervalli non vuoti del tipo

$$I_{j_0} \cap T^{-1}(I_{j_1}) \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(I_{j_{n-1}})$$

dove gli  $I_j$  sono gli intervalli della partizione associata a  $T$ . Chiamiamo  $I_{j_M}^-$  l'intervallo della partizione associata a  $T$  che contiene  $\alpha - 1$  e  $I_{j_m}^+$  quello che contiene  $\alpha$ . Dimostriamo per induzione che

$$\forall n > 0 \text{ l'insieme } \{T^n(I_j) \mid j \in J_n\} \text{ è finito}$$

Di conseguenza si avrà che, per ogni  $n > 0$ ,  $\inf_{j \in J_n} m(T^n(I_j)) > 0$ . Per  $n = 1$  la condizione è verificata, dal momento che  $T(I_j) = I$  per  $I_j \neq I_{j_M}^-, I_{j_m}^+$ . Sia  $n > 1$ ; prendiamo un elemento della partizione associata a  $T^{n+1}$ , che sarà della forma  $I_{j_0} \cap T^{-1}(I_{j_1}) \cap \dots \cap T^{-n}(I_{j_n}) \neq \emptyset$ . Notiamo che, detto  $L = I_{j_1} \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(I_{j_n})$ , si ha  $L \neq \emptyset$  e  $L \in J_n$ . Inoltre si verifica che

$$T^{n+1}(I_{j_0} \cap T^{-1}(I_{j_1}) \cap \dots \cap T^{-n}(I_{j_n})) \subseteq T^n(I_{j_1} \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(I_{j_n})) = T^n(L)$$

A questo punto abbiamo due casi:

- se  $T(I_{j_0}) \supseteq L$  allora

$$T^{n+1}(I_{j_0} \cap T^{-1}(I_{j_1}) \cap \dots \cap T^{-n}(I_{j_n})) = T^n(L)$$

- altrimenti abbiamo  $T(I_{j_0}) \not\supseteq L$  ma  $T(I_{j_0}) \cap L \neq \emptyset$  (se l'intersezione fosse vuota avremmo che l'intervallo preso in partenza è vuoto); poichè  $T(I_j) = I$  per  $I_j \neq I_{j_M}^-, I_{j_m}^+$  questo può succedere solo se  $I_{j_0} \in \{I_{j_M}^-, I_{j_m}^+\}$ . Inoltre, poichè  $T(I_{j_M}^-)$  e  $T(I_{j_m}^+)$  sono intervalli con estremo superiore uguale ad  $\alpha$ , esiste al più un intervallo  $I_\mu$  della partizione  $J_n$  tale che  $T(I_{j_M}^-) \cap I_\mu \neq \emptyset$  e  $T(I_{j_M}^-) \not\supseteq I_\mu$ ; allo stesso modo esiste un unico intervallo  $I_\nu$  della partizione  $J_n$  tale che  $T(I_{j_m}^+) \cap I_\nu \neq \emptyset$  e  $T(I_{j_m}^+) \not\supseteq I_\nu$ , quindi  $L = I_\mu$  o  $L = I_\nu$ .

In conclusione

$$\{T^{n+1}(I_j) \mid j \in J_{n+1}\} \subseteq \{T^n(I_j) \mid j \in J_n\} \cup T^{n+1}(I_{j_M}^- \cap T^{-1}(I_\mu)) \cup T^{n+1}(I_{j_m}^+ \cap T^{-1}(I_\nu))$$

che per ipotesi induttiva è finito.

Dimostriamo ora la condizione (4): vogliamo dimostrare cioè che per ogni  $n > 0$

$$K_n = \sup_{j \in J_n} \sup_{x \in I_j} \left| \frac{(T^n)''(x)}{[(T^n)'(x)]^2} \right| < \infty$$

Anche in questo caso procediamo per induzione: se  $n = 1$ ,  $|T'(x)| = \frac{1}{x^2}$  e  $|T''(x)| = \frac{2}{|x|^3}$  quindi

$$K_1 = \sup_{j \in J} \sup_{x \in I_j} \left| \frac{T''(x)}{[T'(x)]^2} \right| = \sup_{x \in I} 2|x| < \infty$$

Ora,

$$(T^{n+1})'(x) = (T^n)'(T(x))T'(x)$$

$$(T^{n+1})''(x) = (T^n)''(T(x))[T'(x)]^2 + (T^n)'(T(x))T''(x)$$

Per ogni  $x \in I$  nella parte interna di un intervallo,

$$\left| \frac{(T^{n+1})''(x)}{[(T^{n+1})'(x)]^2} \right| \leq \left| \frac{(T^n)''(T(x))(T'(x))^2}{[(T^n)'(T(x))T'(x)]^2} + \frac{(T^n)'(T(x))T''(x)}{[(T^n)'(T(x))T'(x)]^2} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{(T^n)''(T(x))}{[(T^n)'(T(x))]^2} \right| + \left| \frac{T''(x)}{[T'(x)]^2} \right| \frac{1}{|(T^n)'(T(x))|} \leq K_n + \frac{K_1}{\gamma_n} < \infty$$

che è la stima desiderata.  $\square$

Nel caso delle frazioni continue giapponesi possiamo poi precisare meglio le stime dimostrate nella sezione 4.3 per mappe della classe  $\mathfrak{C}$  controllando l'andamento della variazione totale di  $\Phi^n f$  al crescere di  $n$ ; in particolare si ha

**Proposizione 4.8.2.** (Disuguaglianza di Lasota-Yorke) *Per ogni  $\alpha \in (0, 1)$  esistono  $C_0, C_1 \geq 0$  e  $0 < \lambda < 1$  tali che*

$$\text{Var}_{I_\alpha}(\Phi_{T_\alpha}^n f) \leq C_0 \lambda^n \text{Var}_{I_\alpha} f + C_1 \|f\|_1$$

per ogni  $f \in L^1(I_\alpha) \cap BV(I_\alpha)$ .

*Dimostrazione.* Rivediamo la stima della sezione 3.4, osservando che

$$\gamma = \inf_{j \in J_n} \inf_{x \in I_j} |(T_\alpha^n)'(x)| = \left( \inf_{j \in J} \inf_{x \in I_j} |T_\alpha'(x)| \right)^n = \frac{1}{\lambda_0^n}$$

con  $\lambda_0 = \max\{\alpha^2, (1-\alpha)^2\}$ . Di conseguenza si è dimostrato che esiste  $C(n)$  tale che per ogni  $n$

$$\text{Var}_{I_\alpha}(\Phi_{T_\alpha}^n f) \leq 2\lambda_0^n \text{Var}_{I_\alpha} f + C(n) \|f\|_1$$

Sorprendentemente, ciò è sufficiente per una stima uniforme in  $n$  (da un'idea di M.Viana [28]). Infatti sia  $1 > \lambda > \lambda_0$  e sia  $N$  tale che per ogni  $n \geq N$  valga  $2\lambda_0^n \leq \lambda^n$ . Detto  $K = \max_{1 \leq n \leq N} C(n)$  si ha

$$\text{Var}_{I_\alpha}(\Phi_{T_\alpha}^N f) \leq \lambda^N \text{Var}_{I_\alpha} f + K \|f\|_1$$

da cui per induzione, utilizzando il fatto che  $\|\Phi_{T_\alpha}^q f\|_1 \leq \|f\|_1$ , per ogni  $q \geq 0$ ,

$$\text{Var}_{I_\alpha}(\Phi_{T_\alpha}^{qN} f) \leq \lambda^{qN} \text{Var}_{I_\alpha} f + K \sum_{h=0}^{q-1} \lambda^{hN} \|f\|_1$$

Dato ora un  $n$  qualunque, otteniamo per divisione euclidea  $n = qN + r$  con  $0 \leq r < N$ , quindi

$$\text{Var}_{I_\alpha}(\Phi_{T_\alpha}^n f) \leq \lambda^{qN} \text{Var}_{I_\alpha}(\Phi_{T_\alpha}^r f) + K \left( \sum_{h=0}^{\infty} \lambda^{hN} \right) \|f\|_1 \leq$$

$$\leq 2\lambda^{qN+r} \text{Var}_{I_\alpha}(f) + K \left(1 + \frac{1}{1-\lambda^N}\right) \|f\|_1$$

e il coefficiente di  $\|f\|_1$  è limitato al crescere di  $N$ .  $\square$

**Corollario 4.8.3.** *Se  $\rho \in L^1(I_\alpha)$  è la densità rispetto alla misura di Lebesgue di una misura invariante per  $T_\alpha$ , allora  $\rho$  è a variazione limitata.*

*Dimostrazione.* Poichè  $\rho$  è densità invariante, allora  $\Phi_{T_\alpha}(\rho) = \rho$ . Inoltre possiamo supporre  $\|\rho\|_1 = 1$ . Sia  $\rho_l$  una successione di funzioni a variazione limitata che tendono a  $\rho$  in norma  $L^1$  e tali che  $\|\rho_l\|_1 \leq 2$  per ogni  $l$ . La disuguaglianza di Lasota-Yorke implica

$$\text{Var} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_{T_\alpha}^j(\rho_l) \right) \leq C_0 \left( \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j \right) \text{Var} \rho_l + C_1 \|\rho_l\|_1 \rightarrow C_1 \|\rho_l\|_1 \leq 2C_1$$

e inoltre  $\|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_{T_\alpha}^j(\rho_l)\|_1 \leq \|\rho_l\|_1 \leq 2$ . Per  $l$  fissato,  $\rho_l$  soddisfa quindi le ipotesi del teorema di Helly (4.1.3) quindi per ogni  $l$  troviamo  $\bar{\rho}_l$  con  $\text{Var} \bar{\rho}_l \leq 2C_1$  e  $\|\bar{\rho}_l\|_1 \leq 2$  tali che per ogni  $l$  esiste  $n_k$  per cui  $\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \Phi_{T_\alpha}^j \rho_l$  converge a  $\bar{\rho}_l$  in  $L^1$ . Possiamo applicare nuovamente il teorema di Helly alla successione  $\{\rho_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  e ottenere che una sottosuccessione delle  $\bar{\rho}_l$  tende in norma  $L^1$  a una  $\bar{\rho}$ . D'altronde, da  $\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \Phi_{T_\alpha}^j(\rho_l) \rightarrow \bar{\rho}_l$  segue

$$\|\bar{\rho}_l - \rho\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \Phi_{T_\alpha}^j(\rho_l - \rho) \right\|_1 \leq \|\rho_l - \rho\|_1$$

quindi esiste una sottosuccessione  $\{\bar{\rho}_{l_j}\}$  che tende in norma  $L^1$  sia a  $\rho$  che a  $\bar{\rho}$ . Di conseguenza  $\rho$  e  $\bar{\rho}$  devono coincidere quasi ovunque rispetto alla misura di Lebesgue.  $\square$

## 4.8.2 Ergodicità della mappa di Nakada

Nel caso di mappe markoviane, è relativamente semplice dimostrare l'ergodicità, il che come visto equivale all'esistenza di un'unica misura invariante assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue; poichè le  $T_\alpha$  in generale non lo sono, è necessario stimare in modo abbastanza preciso l'espansività di ciascun ramo. La proprietà che ci serve è il

**Lemma 4.8.4.** *Per ogni  $\alpha \in (0, 1)$  esiste  $\delta > 1$  tale che per ogni intervallo  $I \subseteq I_\alpha = [\alpha - 1, \alpha]$  vale almeno uno dei due casi:*

- (1)  $T_\alpha(I) \supseteq (\alpha - 1, \alpha)$
- (2) *Esiste un intervallo  $J \subseteq I_\alpha$  tale che  $T_\alpha(I) \supseteq J$  e  $m(J) \geq \delta m(I)$*

*Dimostrazione.* Consideriamo la partizione associata a  $T_\alpha$  e sia  $I \subseteq I_\alpha$ . Se gli estremi di  $I$  si trovano in due intervalli diversi e non contigui della partizione, allora esiste un intervallo  $I_j^\epsilon$  ( $\epsilon \in \{\pm\}, j \in \mathbb{N}$ ) della partizione tale che  $I \supseteq I_j^\epsilon$  e siamo nel caso (2). Se invece gli estremi di  $I$  si trovano nello stesso intervallo della partizione, allora

$$m(T_\alpha(I)) = \int_I |T'_\alpha(y)| dy \geq \inf_{I_\alpha} |T'_\alpha| m(I) \geq \min \left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{(1-\alpha)^2} \right\} m(I)$$

Resta da considerare il caso in cui gli estremi di  $I$  siano in due intervalli diversi ma contigui della partizione. Supponiamo che i due intervalli contigui siano  $I_j^\epsilon$  e  $I_{j+1}^\epsilon$ ; sia  $I_1 = I \cap I_{j+1}^\epsilon$  e  $I_2 = I \cap I_j^\epsilon$ . Osserviamo che l'immagine di  $I_1$  contiene un intorno destro di  $\alpha - 1$  e l'immagine di  $I_2$  contiene un intorno sinistro di  $\alpha$ . Per  $I_1$  abbiamo la stima

$$m(T_\alpha(I_1)) = \int_{T_\alpha(I_1)} dx = \int_{I_1} |T'_\alpha(y)| dy \geq \inf_{I_{j+1}^\epsilon} |T'_\alpha| m(I_1) \geq (j + \alpha)^2 m(I_1)$$

e sappiamo che

- per  $\alpha < g = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ,  $j \geq 2 \Rightarrow (j + \alpha)^2 \geq (2 + \alpha)^2 > 2$
- per  $\alpha \geq g$ ,  $(j + \alpha)^2 \geq (1 + g)^2 > 2$

Per  $I_2$  invece si ha, sfruttando il fatto che  $|T'_\alpha|$  decresce allontanandosi dall'origine,

$$\int_{I_2} |T'_\alpha(y)| dy \geq m(I_2) \inf_{I_2} |T'_\alpha| \geq m(I_2) |T'_\alpha(x)| \quad \forall x \in I_j \setminus I_2$$

e integrando in  $x$

$$\begin{aligned} \frac{m(I_j^\epsilon \setminus I_2)}{m(I_2)} \int_{I_2} |T'_\alpha(y)| dy &\geq \int_{I_j^\epsilon \setminus I_2} |T'_\alpha(x)| dx \\ \int_{I_j^\epsilon} |T'_\alpha(y)| dy &\leq \frac{m(I_j^\epsilon \setminus I_2)}{m(I_2)} \int_{I_2} |T'_\alpha(y)| dy + \frac{m(I_2)}{m(I_2)} \int_{I_2} |T'_\alpha(y)| dy \end{aligned}$$

si ottiene infine

$$\frac{m(T_\alpha(I_2))}{m(I_2)} \geq \frac{m(T_\alpha(I_j^\epsilon))}{m(I_j^\epsilon)}$$

Osserviamo ora che se il cilindro  $I_j^\epsilon$  è pieno, allora

$$\frac{m(T_\alpha(I_j))}{m(I_j)} = (j + \alpha)(j - 1 + \alpha) \geq (2 + \alpha)(1 + \alpha)$$

dove l'ultima disuguaglianza è giustificata dal fatto che per  $\alpha \in (0, 1)$  i cilindri con  $j = 1$  non sono pieni. Se invece  $I_j^\epsilon = I_{j_m}^+$  è l'intervallo che contiene  $\alpha$  allora

$$\frac{m(T_\alpha(I_{j_m}^+))}{m(I_{j_m}^+)} = \frac{\alpha - T_\alpha(\alpha)}{\alpha - \frac{1}{j_m + \alpha}} = \frac{j_m + \alpha}{\alpha} \geq 1 + \frac{1}{\alpha}$$

e analogamente se  $I_j^c = I_{j_M}^-$  è l'intervallo che contiene  $\alpha - 1$  allora

$$\frac{m(T_\alpha(I_{j_M}^-))}{m(I_{j_M}^-)} = \frac{\alpha - T_\alpha(\alpha - 1)}{-\frac{1}{j_M + \alpha} - (\alpha - 1)} = \frac{j_M + \alpha}{1 - \alpha} \geq j_M + \alpha \geq 2 + \alpha$$

osservando che tutti i rami negativi hanno  $j \geq 2$ . Quindi

$$\frac{m(T_\alpha(I_2))}{m(I_2)} \geq \min\{(2 + \alpha), 1 + \frac{1}{\alpha}, (1 + g)^2\} = D > 2$$

In conclusione si ha che se  $m(I_i) = \max\{m(I_1), m(I_2)\}$  allora

$$m(T_\alpha(I)) \geq m(T_\alpha(I_i)) \geq Dm(I_i) \geq \frac{D}{2}m(I)$$

e  $\delta = \min\{\frac{D}{2}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{(1-\alpha)^2}\}$  soddisfa le condizioni richieste.  $\square$

**Corollario 4.8.5.** *Per ogni intervallo  $I \subseteq I_\alpha$  esiste  $n > 0$  tale che  $T^n(I) \supseteq (\alpha - 1, \alpha)$ .*

*Dimostrazione.* Se  $T_\alpha^n(I)$  non contenesse mai tutto  $(\alpha - 1, \alpha)$  allora saremmo sempre nel caso 2 del lemma e avremmo per  $n$  sufficientemente grande  $m(T_\alpha^n(I)) \geq \delta^n m(I) > 1$ , assurdo.  $\square$

Siamo ora pronti per enunciare la

**Proposizione 4.8.6.** *La mappa  $T_\alpha$  per  $\alpha \in (0, 1)$  è ergodica e la densità invariante  $\rho$  è q.o. positiva rispetto alla misura di Lebesgue.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che esistano due punti fissi  $\phi_1$  e  $\phi_2$  dell'operatore  $\Phi_{T_\alpha}$  con  $\int \phi_1 dm = \int \phi_2 dm = 1$ . Siano  $X_1 = \{x \mid \phi_1(x) \geq \phi_2(x)\}$  e  $X_2 = \{x \mid \phi_1(x) < \phi_2(x)\}$  e si consideri la coppia di misure  $\mu_1 = (\phi_1 - \phi_2)\chi_{X_1} m$  e  $\mu_2 = (\phi_2 - \phi_1)\chi_{X_2} m$ . Poichè  $\phi_1 - \phi_2$  è un punto fisso di  $\Phi_{T_\alpha}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{X_1} (\phi_1 - \phi_2) dm &= \int_{T_\alpha^{-1}(X_1)} (\phi_1 - \phi_2) dm \leq \\ &\leq \int_{T_\alpha^{-1}(X_1) \cap X_1} (\phi_1 - \phi_2) dm \leq \int_{X_1} (\phi_1 - \phi_2) dm \end{aligned}$$

Questo implica  $(\phi_1 - \phi_2)\chi_{T_\alpha^{-1}X_1} = (\phi_1 - \phi_2)\chi_{T_\alpha^{-1}(X_1) \cap X_1} = (\phi_1 - \phi_2)\chi_{X_1}$  quasi ovunque rispetto a Lebesgue e passando al complementare  $(\phi_1 - \phi_2)\chi_{T_\alpha^{-1}(X_2)} = (\phi_1 - \phi_2)\chi_{X_2}$ . Ciò assicura che le misure  $\mu_i$  siano invarianti per  $T_\alpha$ : infatti per ogni  $f \in L^\infty(I_\alpha)$

$$\begin{aligned} \langle f \circ T_\alpha, (\phi_1 - \phi_2)\chi_{X_1} \rangle_m &= \langle f \circ T_\alpha, (\phi_1 - \phi_2)\chi_{T_\alpha^{-1}(X_1)} \rangle_m = \\ &= \langle (f \circ T_\alpha)(\chi_{X_1} \circ T_\alpha), \phi_1 - \phi_2 \rangle_m = \langle f\chi_{X_1}, (\phi_1 - \phi_2) \rangle_m \end{aligned}$$

e analogamente per  $\mu_2$ . Da questo per il corollario 4.8.3 segue che le densità  $d\mu_i/dm$ ,  $i = 1, 2$  sono funzioni a variazione limitata, per cui hanno un rappresentante semicontinuo inferiore. Di conseguenza  $\rho_i = d\mu_i/dm$  è quasi ovunque zero oppure il suo supporto contiene un qualche intervallo  $I \subseteq I_\alpha$ . Si noti che per qualunque densità invariante  $\rho$  vale

$$\rho(x) > 0 \Rightarrow \rho(T(x)) > 0 \quad (4.15)$$

quindi per il corollario 4.8.5 nel secondo caso il supporto delle  $\mu_i$  deve contenere tutto  $(\alpha - 1, \alpha)$ , per cui o  $\phi_1 \geq \phi_2$   $m$ -q.o. oppure  $\phi_2 \geq \phi_1$   $m$ -q.o. Dal fatto che gli integrali di  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sono uguali segue che  $\phi_1 = \phi_2$   $m$ -q.o. La seconda asserzione segue dalla (4.15) e dal corollario 4.8.5.  $\square$

### 4.8.3 Verifica della condizione di cobordo

**Proposizione 4.8.7.** *Sia  $T$  una trasformazione della classe  $\mathfrak{C}$ , ergodica rispetto alla misura invariante  $\rho(x)dx$  e tale che:*

- (1) *La partizione associata è formata da un'infinità numerabile di intervalli.*
- (2) *Esiste  $C > 0$  tale che  $\rho \geq C$  su  $\{\rho \neq 0\}$ .*

Allora per tutte le  $f \in V_I$  a valori reali non costanti vale il teorema del limite centrale.

*Dimostrazione.* Per (2) la funzione  $\frac{1}{\rho}\chi_{\{\rho \neq 0\}}$  appartiene a  $V_I$ , quindi se esistesse  $u$  tale che  $f\rho - m(f\rho)\rho = u\rho - u \circ T \cdot \rho$  in  $V_I$ , allora potremmo moltiplicare per  $\frac{1}{\rho}\chi_{\{\rho \neq 0\}}$  e otterremmo  $f - m(f\rho) = u - u \circ T$  in  $V_I$ , con  $u$  in  $V_I$  poichè  $u\rho \in V_I$ ; sapendo che  $f \in V_I$  otterremmo  $u \circ T \in V_I$ . Se ora prendiamo un rappresentante semicontinuo inferiore per  $u$ , si ha che per ogni  $I_j$  cilindro pieno di rango 1

$$\begin{aligned} \text{Var}_{I_j}(u \circ T) &\geq \text{Var}_{T(I_j)} u = \text{Var}_I u \\ \text{Var}_I(u \circ T) &= \sum_{\substack{j \in J \\ I_j \text{ pieno}}} \text{Var}_{I_j}(u \circ T) = \sum_{\substack{j \in J \\ I_j \text{ pieno}}} \text{Var}_I u \end{aligned}$$

Poichè  $T : I_j \rightarrow I$  è un omeomorfismo,  $u \circ T$  è semicontinua inferiore su  $I_j$  e quindi ha minima variazione totale fra tutte le funzioni quasi ovunque uguali ad essa. Di conseguenza, poichè per (1) l'insieme dei  $j$  è infinito,  $u \circ T$  ha un rappresentante a variazione limitata solo se  $\text{Var}_I u = 0$ , cioè  $u$  è costante.  $\square$

Per verificare che la varianza non è nulla basta quindi verificare la condizione (2). Tale fatto è stato dimostrato da R. Zweimüller ([29]) per una classe di trasformazioni dell'intervallo comunemente chiamate *mappe AFU*

**Definizione 4.8.1.** (mappa AFU) *Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo chiuso e limitato. Supponiamo che esista una partizione  $I = \bigcup_{j \in J} \bar{I}_j$  dove gli  $I_j$  sono intervalli aperti disgiunti e sia  $T : I \rightarrow I$  tale che, per ogni  $j \in J$ ,  $T|_{I_j}$  sia monotona e si estenda a una  $\bar{T}_j : \bar{I}_j \rightarrow I$  di classe  $C^2$ .  $T$  si dice di classe AFU se soddisfa le condizioni :*

(A) (condizione di Adler)

$$\sup_{j \in J} \sup_{x \in I_j} \frac{|T''(x)|}{[T'(x)]^2} < \infty$$

(F) (condizione dell'immagine finita)

L'insieme  $\{T(I_j) \mid j \in J\}$  è finito

(U) (uniforme espansività)

$$\inf_{j \in J} \inf_{x \in I_j} |T'(x)| > 1$$

Il fatto che per ogni  $\alpha \in (0, 1)$  e per ogni  $n \geq 0$ ,  $T_\alpha$  sia di classe AFU è stato dimostrato nella prop. 4.8.1.

**Proposizione 4.8.8.** *Sia  $T : I \rightarrow I$  una mappa AFU e sia  $\rho$  una densità invariante nonnegativa e inferiormente semicontinua. Allora esiste una costante  $C > 0$  tale che  $0 < C^{-1} \leq \rho \leq C$  su  $\{\rho > 0\}$ .*

Per la dimostrazione ci serviamo di alcuni lemmi preliminari. Dalla semicontinuità di  $\rho$  segue che  $\{\rho > 0\}$  è aperto, quindi unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti. Sia  $\mathcal{S}$  l'insieme di questi intervalli. Sia inoltre  $\mathcal{S}'$  l'insieme degli intervalli non vuoti del tipo  $Z \cap I_j$ , dove  $Z \in \mathcal{S}$  e  $I_j$  è uno degli intervalli della partizione associata a  $T$ . Chiamiamo  $\mathcal{D} = \{I \in \mathcal{S} \mid \exists j \in J : I \cap \partial I_j \neq \emptyset\}$  e  $\mathcal{D}' = \{I \cap Z \mid I \in \mathcal{D}, Z \in \mathcal{S}, I \cap Z \neq \emptyset\}$

**Lemma 4.8.9.** *Ogni  $T(J')$  con  $J' \in \mathcal{S}'$  è contenuto in un unico elemento di  $\mathcal{S}$ , che si denoterà con  $\langle TJ' \rangle$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $x \in J' = Z \cap I_{j_0}$  con  $J' \in \mathcal{S}'$ ,  $Z \in \mathcal{S}$  e  $j_0 \in J$ ; dall'equazione (4.15)  $\rho(T(x)) > 0$ . E' chiaro allora che  $T(J')$  è un intervallo aperto contenuto in  $\{\rho > 0\}$ , quindi dev'essere contenuto in esattamente uno degli aperti disgiunti di  $\mathcal{S}$ .  $\square$

**Lemma 4.8.10.** *Sia  $T$  una mappa AFU e  $\rho$  una densità invariante inferiormente semicontinua. Allora  $\{\rho > 0\}$  è un'unione finita di intervalli aperti disgiunti.*

*Dimostrazione.* Consideriamo la classe  $\mathcal{G} = \{I \in \mathcal{S} \mid I \text{ contiene qualche } SJ', J' \in \mathcal{D}'\}$  e dimostriamo preliminarmente che  $\mathcal{G}$  è finita. Sia  $J' \in \mathcal{D}'$ . Allora  $J' \subsetneq I$  con  $I \in \mathcal{S}$  e almeno uno degli estremi di  $J'$  non è estremo di  $I$ , quindi è estremo di un intervallo di  $J$ ; di conseguenza la chiusura di  $T(J')$  contiene l'immagine di un estremo degli intervalli di  $J$  e a maggior ragione lo conterrà la chiusura  $\langle TJ' \rangle$ . Poichè per la condizione (F) l'insieme  $\{T(d) \mid d \in \partial I_j, j \in J\}$  allora anche i possibili valori di  $\langle TJ' \rangle$  sono finiti. Sia ora  $s = \min\{m(I) : I \in \mathcal{G}\} > 0$ ,  $\mathcal{F} = \{I \in \mathcal{S} : m(I) \geq s\} \supseteq \mathcal{G}$  e  $F = \bigcup \mathcal{F} \supseteq \bigcup \mathcal{G}$ . Dico che  $T(F) \supseteq F \text{ mod } m$ . Sia  $I \in \mathcal{F}$ ; se  $I \in \mathcal{D}$ , allora  $I$  è l'unione di insiemi  $J' \in \mathcal{D}'$ , da cui  $T(I) \subseteq \bigcup \mathcal{G} \subseteq F \text{ mod } m$ . Se  $I \notin \mathcal{D}$ , allora  $T$  è monotona su  $I$ , quindi essendo

espansiva vale  $m(SI) > m(I) \geq s$ , quindi  $\langle TI \rangle \in \mathcal{F}$  e  $T(I) \subseteq \langle TI \rangle \subseteq F$ . Dimostriamo infine che  $\mathcal{F} = \mathcal{S}$ , il che completa la dimostrazione perchè  $\mathcal{F}$  è finito. Se  $\mathcal{S} \setminus \mathcal{F}$  non fosse vuoto, potremmo prendere  $I_0$  un elemento di lunghezza massimale. L'argomentazione del paragrafo precedente applicata a  $I_0$  dimostra che  $T(I_0) \subseteq F \bmod m$ , quindi  $I_0 \subseteq T^{-1}F \setminus F \bmod m$ . Detta  $\mu$  la misura invariante per  $T$ ,

$$\mu(T^{-1}F \setminus F) = \mu(T^{-1}F) - \mu(F) = 0$$

quindi  $\mu(I_0) = 0$ , il che rende assurda l'ipotesi che  $I_0 \in \mathcal{S}$ .  $\square$

Dimostriamo ora la proposizione 4.8.8.

*Dimostrazione.* Sia  $y$  un estremo di un intervallo  $I \in \mathcal{S}$ . Dall'equazione di punto fisso del Perron-Frobenius segue che  $\cup_{j \in J} T(I_j) \supseteq I$ ; a causa della condizione (F) si ha che l'insieme  $\{T(J') \mid J' \in \mathcal{S}'\}$  è finito, quindi esiste  $J' \in \mathcal{S}'$  tale che  $T(J')$  sia un intorno di  $y$  in  $I$ . Chiamiamo  $x$  l'estremo di  $J'$  che viene mappato in  $y$  dall'estensione continua di  $T$  alla chiusura di  $J'$ ; in questa situazione

$$\text{se } \lim_{\substack{t \rightarrow y \\ t \in I}} \rho(t) = 0 \quad \text{allora } \lim_{\substack{r \rightarrow x \\ r \in J'}} \rho(r) = 0$$

poichè per l'equazione di Kuzmin  $\rho(r) \leq \rho(t)|T'(r)|$  se  $t = T(r)$ , e  $T'$  è limitato su ogni cilindro. Si osservi inoltre che, essendo  $\rho$  inferiormente semicontinua,  $\lim_{r \rightarrow x} \rho(r) = 0$  implica che  $x$  è un estremo di un qualche intervallo di  $\mathcal{S}$ . Di conseguenza sull'insieme

$$\mathcal{K} = \{(I, y) \mid I \in \mathcal{S}, y \in \partial I, \lim_{t \rightarrow y, t \in I} \rho(t) = 0\}$$

possiamo definire la relazione

$$(J, x) \mapsto (I, y) \Leftrightarrow T(J) \text{ è intorno di } y \text{ in } I \text{ e } \lim_{r \rightarrow x} T(r) = y$$

e l'argomentazione precedente dimostra che ogni elemento di  $\mathcal{K}$  ha almeno un predecessore rispetto alla relazione  $\mapsto$  (si prenda infatti come  $J$  l'unico elemento di  $\mathcal{S}$  che contiene  $J'$ ). E' immediato inoltre verificare che ogni elemento di  $\mathcal{K}$  ha al più un successore, perchè  $(J, x) \mapsto (I, y)$  implica che  $\lim_{r \in J} T(r) = y$ ; essendo  $\mathcal{K}$  finito, la relazione  $\mapsto$  definisce una funzione bigettiva sull'insieme  $\mathcal{K}$  (continuando infatti nella catena dei predecessori si può infatti tornare solo ad un elemento di cui non avevamo ancora trovato un successore); quindi  $\mathcal{K}$  si può spezzare in "cicli" del tipo

$$(I_0, y_0) \mapsto (I_1, y_1) \mapsto \dots \mapsto (I_n, y_n) = (I_0, y_0)$$

Ora, possiamo scegliere un intorno  $U$  di  $y_0$  in  $I_0$  sufficientemente piccolo per cui  $T^j(U)$  è un intorno di  $y_j$  per ogni  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Per l'espansività  $m(U) \leq \alpha^{-n}m(V)$ , dove  $V = T^n(U) \subseteq I_0$  e  $\alpha = \inf |T'| > 1$ , il che implica anche  $U \subseteq V$  e  $m(V \setminus U) > 0$ . Sia ora  $(I, y) \in \mathcal{K}$ ; dal fatto che ogni elemento di  $\mathcal{K}$

abbia un unico predecessore segue che esiste un intorno  $W$  di  $y$  in  $I$  tale che  $T^{-1}(W) \cap \bigcup_{L' \in \mathcal{S}'} L'$  è contenuto in un unico  $J' \in \mathcal{S}'$  (che è precisamente quello per cui  $(J', x)$  è predecessore di  $(I, y)$ , per  $x$  opportuno). Applicando questo argomento a tutti i segmenti del ciclo otteniamo che per  $U$  sufficientemente piccolo si ha  $T^{-n}(V) \cap (\bigcup_{L' \in \mathcal{S}'} L') = U$ . Di conseguenza, detta  $\mu$  la misura invariante,  $\mu(V) = \mu(T^{-n}(V) \cap (\bigcup_{L' \in \mathcal{S}'} L')) = \mu(U)$ ; poichè la densità è positiva su  $V \setminus U$ , ciò implica che  $m(V \setminus U) = 0$ ; questo è in contraddizione con quanto dimostrato prima, quindi  $\mathcal{K}$  dev'essere vuoto. Ciò implica che la densità non tende a 0 sul bordo di  $S$ ; essendo  $S$  unione di un numero finito di intervalli si ha la tesi.

□

## Capitolo 5

# L'entropia delle trasformazioni di frazione continua

Nel capitolo 3 abbiamo ricavato esplicitamente il valore dell'entropia di  $T_\alpha$  e  $S_\alpha$  per  $\alpha$  compresi in alcuni intervalli. Per esempio per la mappa di Nakada il valore dell'entropia è noto esplicitamente per  $\alpha \geq \sqrt{2} - 1$ , mentre per valori compresi fra 0 e  $\sqrt{2} - 1$  non si conosce una forma esplicita dell'estensione naturale; ciò rende difficile ricavare i valori esatti della funzione  $\alpha \mapsto h(T_\alpha)$ . Naturalmente è possibile ricostruire il grafico della funzione con simulazioni al computer: i primi studi numerici, ottenuti da L. Luzzi e S. Marmi [14], hanno prodotto il seguente risultato:

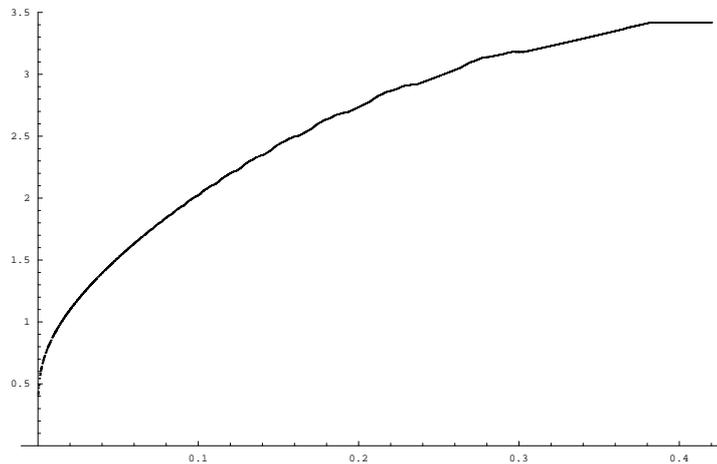


Figura 5.1: L'entropia della mappa  $T_\alpha$  in funzione di  $\alpha$

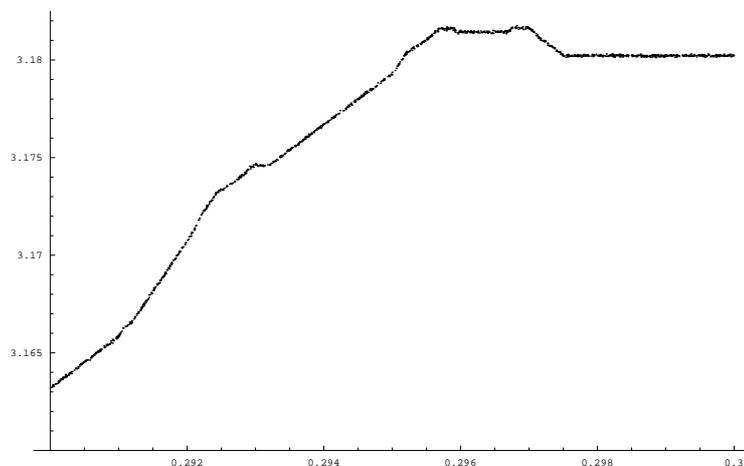


Figura 5.2: Entropia di  $T_\alpha$  per  $0.29 \leq \alpha \leq 0.3$

Si può notare come la funzione abbia un comportamento piuttosto irregolare per  $\alpha$  piccoli; presentiamo nel seguito del capitolo alcuni risultati che cercano di specificare qualitativamente le proprietà della funzione  $\alpha \mapsto h(T_\alpha)$ .

## 5.1 Continuità dell'entropia

Il primo risultato fondamentale è che la funzione entropia è continua in  $\alpha$ : questo risultato è stato ottenuto da L. Luzzi e S. Marmi nel 2006. Esaminiamo la tecnica con cui è stato prodotto.

**Proposizione 5.1.1.** ([14], Th. 1) *La funzione  $\alpha \mapsto h(T_\alpha)$  è continua per  $\alpha \in [0, 1]$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\bar{\alpha} \in [0, 1]$  fissato. Per dimostrare la continuità dell'entropia in un intorno di  $\bar{\alpha}$  il primo ingrediente è una stima sulla variazione totale delle iterate dell'operatore di Perron-Frobenius, simile alla prop. 4.8.2; questa volta però è importante che i coefficienti della stima valgano uniformemente in  $\alpha$  in un intorno di  $\bar{\alpha}$ :

**Proposizione 5.1.2.** (Disuguaglianza di Lasota-Yorke in forma uniforme, [14], Prop. 2) *Sia  $\bar{\alpha} \in (0, \sqrt{2} - 1]$  fissato. Allora esistono  $\lambda_0 < 1, \epsilon, C, K_0 > 0$  tali che  $\forall n, \forall f \in BV(I_\alpha), \forall \alpha \in [\bar{\alpha} - \epsilon, \bar{\alpha} + \epsilon]$ ,*

$$\text{Var}_{I_\alpha}(\Phi_{T_\alpha}^n f) \leq C(\lambda_0)^n \text{Var}_{I_\alpha}(f) + K_0 \int_{I_\alpha} |f(x)| dx$$

**Corollario 5.1.3.** *Per ogni  $\bar{\alpha} \in (0, \sqrt{2} - 1]$ ,  $\rho_{\bar{\alpha}}$  ha variazione limitata ed  $\exists \epsilon, \exists K > 0$  tale che per ogni  $\alpha \in [\bar{\alpha} - \epsilon, \bar{\alpha} + \epsilon]$ ,  $\text{Var } \rho_\alpha \leq K$ .*

*Dimostrazione.* Abbiamo visto che le somme

$$\rho_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_{T_\alpha}^j(1)$$

convergono in norma  $L^1$  a  $\rho_\alpha$ . Di conseguenza esiste una sottosuccessione  $\rho_{n_k}$  che vi converge quasi ovunque; per ogni  $n$

$$\text{Var}_{I_\alpha} \rho_n \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \text{Var}_{I_\alpha} \Phi_{T_\alpha}^j(1) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} K_0 m(I_\alpha) = K_0$$

$$\|\rho_n\|_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|\Phi_{T_\alpha}^j(1)\|_1 = m(I_\alpha) = 1$$

quindi

$$\sup_{I_\alpha} |\rho_n| \leq \text{Var}_{I_\alpha} \rho_n + \frac{1}{m(I_\alpha)} \leq K_0 + 1$$

Per la semicontinuità della variazione totale si ha  $\text{Var}_{I_\alpha} \rho \leq K_0$ , quindi anche  $\sup_{I_\alpha} |\rho_\alpha| \leq K_0 + 1$ .  $\square$

Fissato  $\bar{\alpha}$ , consideriamo per  $\alpha$  vicino ad  $\bar{\alpha}$  le mappe  $T_{\alpha, \bar{\alpha}} : [\bar{\alpha} - 1, \bar{\alpha}] \rightarrow [\bar{\alpha}, \bar{\alpha} - 1]$  con  $T_{\alpha, \bar{\alpha}}(x) = T_\alpha(x + \alpha - \bar{\alpha}) + \bar{\alpha} - \alpha$ ; allora, se  $\rho_\alpha$  è la densità invariante per  $T_\alpha$ , la densità invariante per  $T_{\alpha, \bar{\alpha}}$  è data da  $\tilde{\rho}_\alpha(x) = \rho(x - \bar{\alpha} + \alpha)$ . Dimostriamo il

**Lemma 5.1.4.** *Se  $\{\alpha_n\} \subseteq [\bar{\alpha} - \epsilon, \bar{\alpha} + \epsilon]$  è una successione monotona che converge ad  $\bar{\alpha}$ , allora  $\tilde{\rho}_{\alpha_n} \rightarrow \tilde{\rho}_{\bar{\alpha}}$  in norma  $L^1$ .*

*Dimostrazione.* Per il teorema di Helly e le stime sulla variazione totale delle  $\rho_\alpha$  (che valgono anche per le  $\tilde{\rho}_\alpha$ ) esiste una sottosuccessione  $\tilde{\rho}_{n_k}$  che converge in norma  $L^1$  e quasi ovunque a una  $\rho_\infty$ . Vogliamo dimostrare che  $\rho_\infty = \tilde{\rho}_{\bar{\alpha}}$ . Per l'unicità della misura invariante è sufficiente dimostrare che  $\rho_\infty$  definisce una misura invariante per  $T_{\bar{\alpha}}$ , cioè per ogni  $\phi \in L^1(I_{\bar{\alpha}})$

$$\int_{I_{\bar{\alpha}}} \phi(T_{\bar{\alpha}}(x)) \rho_\infty(x) dx = \int_{I_{\bar{\alpha}}} \phi(x) \rho_\infty(x) dx \quad (5.1)$$

Per la densità delle funzioni di classe  $C^1$  a supporto compatto in  $L^1$  è sufficiente dimostrare la (5.1) per  $\phi$  in questa classe; stimiamo

$$\left| \int_{I_{\bar{\alpha}}} \phi(T_{\bar{\alpha}}(x)) \rho_\infty(x) dx - \int_{I_{\bar{\alpha}}} \phi(x) \rho_\infty(x) dx \right| \leq I_1 + I_2 + I_3$$

con

$$I_1 = \left| \int_{I_{\bar{\alpha}}} \phi(T_{\bar{\alpha}}(x)) \rho_\infty(x) dx - \int_{I_{\bar{\alpha}}} \phi(T_{\bar{\alpha}}(x)) \tilde{\rho}_{n_k}(x) dx \right| \leq \|\phi\|_\infty \|\tilde{\rho}_{n_k} - \rho_\infty\|_1$$

$$I_3 = \left| \int_{I_{\bar{\alpha}}} \phi(T_{\alpha_{n_k}, \bar{\alpha}}(x)) \tilde{\rho}_{n_k}(x) dx - \int_{I_{\bar{\alpha}}} \phi(x) \rho_{\infty}(x) dx \right| \leq \|\phi\|_{\infty} \|\tilde{\rho}_{n_k} - \rho_{\infty}\|_1$$

che tendono a 0 per  $k \rightarrow \infty$ . Rimane il termine

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \int_{I_{\bar{\alpha}}} \phi(T_{\bar{\alpha}}(x)) \tilde{\rho}_{n_k}(x) dx - \int_{I_{\bar{\alpha}}} \phi(T_{\alpha_{n_k}, \bar{\alpha}}(x)) \tilde{\rho}_{n_k}(x) dx \right| \leq \\ &\leq (K_0 + 1) \int_{I_{\bar{\alpha}}} |\phi(T_{\alpha_{n_k}, \bar{\alpha}}) - \phi(T_{\bar{\alpha}})| dx \end{aligned}$$

Il fatto che quest'ultimo termine tenda a 0 consiste in una stima di come di modificano i rami di  $T_{\alpha}$  mentre  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ ; per essa si rimanda a ([14], 5.3). In questo modo abbiamo dimostrato che tutte le sottosuccessioni di  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergenti convergono a  $\tilde{\rho}_{\bar{\alpha}}$ , il che per il teorema di Helly implica che  $\tilde{\rho}_{\alpha_n} \rightarrow \tilde{\rho}_{\bar{\alpha}}$ .  $\square$

Ora, per la formula di Rohlin,

$$h(T_{\alpha}) = 2 \int_{\alpha-1}^{\alpha} \log |x| \rho_{\alpha}(x) dx = 2 \int_{\bar{\alpha}-1}^{\bar{\alpha}} \log |x + \alpha - \bar{\alpha}| \tilde{\rho}_{\alpha}(x) dx$$

Questa equazione ci permette di dire che la continuità in norma  $L^1$  delle densità implica la continuità dell'entropia; si utilizza il

**Lemma 5.1.5.** *Sia  $\{\rho_n\}$  una successione di funzioni in  $L^1(I)$  tali che*

1.  $\|\rho_n\|_{\infty} \leq K \quad \forall n$
2.  $\rho_n \rightarrow \rho$  per una qualche  $\rho \in L^1(I)$

Allora per ogni  $\psi \in L^1(I)$ ,

$$\int_I \psi(x) (\rho_n(x) - \rho(x)) dx \rightarrow 0$$

Prendiamo quindi una successione  $\alpha_n \rightarrow \bar{\alpha}$ . Allora

$$\begin{aligned} |h(T_{\alpha_n}) - h(T_{\bar{\alpha}})| &\leq 2 \int_{\bar{\alpha}-1}^{\bar{\alpha}} |\log |x - \bar{\alpha} + \alpha_n| \tilde{\rho}_{\alpha_n}(x) - \log |x| \tilde{\rho}_{\bar{\alpha}}(x)| dx \leq \\ &\leq 2 \left( \int_{\bar{\alpha}-1}^{\bar{\alpha}} |\log |x| (\tilde{\rho}_{\alpha_n}(x) - \tilde{\rho}_{\bar{\alpha}}(x))| dx + \int_{\bar{\alpha}-1}^{\bar{\alpha}} |(\log |x - \bar{\alpha} + \alpha_n| - \log |x|) \tilde{\rho}_{\alpha_n}(x)| dx \right) \end{aligned}$$

Il primo integrale tende a 0 per il lemma; il secondo è limitato da  $(K_0 + 1) \int_{\bar{\alpha}-1}^{\bar{\alpha}} |\log |x - \bar{\alpha} + \alpha_n| - \log |x|| dx$ , che tende 0 per la continuità dell'operatore di traslazione in  $L^1$ .  $\square$

### 5.1.1 Comportamento dell'entropia per $\alpha \rightarrow 0$

Poichè  $T_0$  non ha una misura invariante finita, l'entropia di tale trasformazione non si può definire con le tecniche finora introdotte. E' vero però che l'entropia tende a 0 al tendere di  $\alpha$  a 0, e più precisamente vale il

**Teorema 5.1.6.** ([18], Th.1) *Esistono costanti  $C_1$  e  $C_2$  tali che per ogni  $\alpha \in (0, \sqrt{2} - 1]$*

$$\frac{C_1}{-\log \alpha} \leq h(T_\alpha) \leq \frac{C_2}{-\log \alpha}$$

## 5.2 L'entropia non è monotona

Analizzando la figura 5.2 (che offre un 'ingrandimento' della 5.1) si identificano intervalli in cui la funzione è costante accanto ad intervalli in cui essa cresce o decresce; la dimostrazione teorica di tale comportamento è stata ottenuta da H.Nakada e R.Natsui nel 2007 [18].

**Teorema 5.2.1.** *Esistono successioni decrescenti di intervalli  $(I_n)$ ,  $(J_n)$ ,  $(K_n)$ ,  $(L_n)$ ,  $n \geq 3$  tali che*

- (a)  $\frac{1}{n} \in I_n$
- (b)  $I_{n+1} < J_n < K_n < L_n < I_n$
- (c) *L'entropia di  $T_\alpha$  è crescente su  $I_n$ , decrescente su  $K_n$  e costante (dipendente da  $n$ ) su  $J_n$  e  $L_n$  per ogni  $n \geq 3$ .*

**Osservazione.** *Qui con  $I < J$  (con  $I$  e  $J$  intervalli) si intende  $I \cap J = \emptyset$  e tutti gli elementi di  $J$  sono maggiori di tutti gli elementi di  $I$*

Fissiamo ora  $0 < \alpha < \sqrt{2} - 1$ . Per ogni  $x \in I_\alpha$  si pone

$$M_{\alpha,x,n} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\alpha,1} \\ 1 & a_{\alpha,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\alpha,2} \\ 1 & a_{\alpha,2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\alpha,n} \\ 1 & a_{\alpha,n} \end{pmatrix} & \text{se } n \geq 1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che per definizione

$$M_{\alpha,x,n} = \begin{pmatrix} p_{n-1,\alpha}(x) & p_{n,\alpha}(x) \\ q_{n-1,\alpha}(x) & q_{n,\alpha}(x) \end{pmatrix}$$

e se consideriamo la trasformazione di Möbius associata  $T_\alpha^n(x) = M_{\alpha,x,n}^{-1}(x)$  e in particolare

$$T_\alpha^m(\alpha - 1) = \left( M_{\alpha,\alpha-1,m}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) (\alpha)$$

**Proposizione 5.2.2.** *Supponiamo che esistano interi positivi  $k_1$  e  $k_2$  tali che*

$$(c-1) \{T_\alpha^n(\alpha) : 0 \leq n < k_1\} \cap \{T_\alpha^m(\alpha - 1) : 0 \leq m < k_2\} = \emptyset$$

$$(c-2) \quad M_{\alpha, \alpha, k_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{\alpha, \alpha-1, k_2} \quad (\Rightarrow T_{\alpha}^{k_1}(\alpha) = T_{\alpha}^{k_2}(\alpha-1))$$

$$(c-3) \quad T_{\alpha}^{k_1}(\alpha) (= T_{\alpha}^{k_2}(\alpha-1)) \notin \{\alpha, \alpha-1\}$$

Allora esiste  $\eta > 0$  tale che su  $(\alpha - \eta, \alpha + \eta)$  la funzione  $h(T_{\alpha})$  è:

(i) strettamente crescente se  $k_1 < k_2$

(ii) costante se  $k_1 = k_2$

(iii) strettamente decrescente se  $k_1 > k_2$

*Dimostrazione.* Definiamo

$$J_{\alpha} = \left\{ \pm \frac{1}{l + \alpha}, l \geq 1 \right\} \cap I_{\alpha}$$

Se  $T_{\alpha}^n(\alpha) \in J_{\alpha}$  per  $0 \leq n < k_1$  allora  $T_{\alpha}^{n+1}(\alpha) = \alpha - 1$ , il che contraddice (c-1) se  $n \neq k_1 - 1$  e (c-3) se  $n = k_1 - 1$ . Allo stesso modo se  $T_{\alpha}^m(\alpha - 1) \in J_{\alpha}$  per  $0 \leq m < k_2$ , allora  $T_{\alpha}^{m+1}(\alpha - 1) = \alpha - 1$ , contraddizione. Poichè  $T_{\alpha}(\alpha), \dots, T_{\alpha}^{k_1-1}(\alpha), T_{\alpha}(\alpha-1), \dots, T_{\alpha}^{k_2-1}(\alpha-1)$  sono lontani da  $J_{\alpha}$  e  $\{\alpha, \alpha-1\}$  e  $T_{\alpha}^{k_1}(\alpha), T_{\alpha}^{k_2-1}(\alpha-1)$  sono lontani da  $\{\alpha-1, \alpha\}$ , possiamo scegliere  $\eta > 0$  tale che per ogni  $\alpha' \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta)$  si abbia

$$\begin{aligned} M_{\alpha', \alpha', n} &= M_{\alpha, \alpha, n} & 1 \leq n \leq k_1 \\ M_{\alpha', \alpha'-1, m} &= M_{\alpha, \alpha-1, m} & 1 \leq m \leq k_2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

e tale che per ogni  $x \in [\alpha - \eta, \alpha]$

$$\begin{cases} T_{\alpha}(x), \dots, T_{\alpha}^{k_1-1}(x), T_{\alpha}^{k_1}(x) \notin [\alpha - \eta, \alpha] \\ T_{\alpha-\eta}(x-1), \dots, T_{\alpha-\eta}^{k_2-1}(x-1), T_{\alpha-\eta}^{k_2}(x-1) \notin [\alpha - \eta - 1, \alpha - 1] \end{cases} \quad (5.3)$$

Scegliamo  $\alpha' \in [\alpha - \eta, \alpha]$ . Dalla condizione (c-2) e da (5.2) segue che per ogni  $x \in [\alpha', \alpha]$

$$M_{\alpha, x, k_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{\alpha', x-1, k_2} \quad (5.4)$$

che implica  $T_{\alpha}^{k_1}(x) = T_{\alpha}^{k_2}(x-1)$ . Definiamo

$$\begin{aligned} n_1 &= \min\{n - k_1 \mid T_{\alpha}^n(x) \in [\alpha', \alpha]\} \\ n_l &= \min\{n - k_1 \mid T_{\alpha}^n(T_{\alpha}^{(\sum_{i=1}^{l-1} n_i) + (l-1)k_1})(x) \in [\alpha', \alpha]\} \text{ per } l \geq 2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

indici che dipendono da  $\alpha$  e da  $x$ . Nel resto della dimostrazione si manterrà fisso  $\alpha$  facendo variare  $x \in [\alpha', \alpha]$ .

Notiamo che tra le mappe  $T_{\alpha}$  e  $T_{\alpha'}$  esistono le fondamentali relazioni: per  $x \in I_{\alpha} \cap I_{\alpha'}$

$$\begin{aligned} T_{\alpha'}(x) &= T_{\alpha}(x) & \text{se } T_{\alpha}(x) \in [\alpha - 1, \alpha'] \\ T_{\alpha'}(x) &= T_{\alpha}(x) - 1 & \text{se } T_{\alpha}(x) \in [\alpha', \alpha] \end{aligned} \quad (5.6)$$

L'idea della dimostrazione è usare la formula (2.4), confrontando quindi i due limiti

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \log q_{\alpha', M}(x-1) \text{ e } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log q_{\alpha, N}(x)$$

Per calcolare i limiti useremo una sottosuccessione. Definiamo

$$\begin{cases} m_l = \sum_{i=1}^l n_i + lk_1 \\ m_l^* = \sum_{i=1}^l n_i + lk_2 \end{cases}$$

Dimostriamo per induzione su  $l$  che per ogni  $x \in [\alpha', \alpha]$  si ha

$$M_{\alpha, x, m_l-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{\alpha', x-1, m_l^*-1} \quad (5.7)$$

Caso  $l = 1$ ; vediamo innanzitutto che per (5.6)

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha', k_2+i}(x-1) \\ a_{\alpha', k_2+i}(x-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha, k_1+i}(x) \\ a_{\alpha, k_1+i}(x) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \forall x \in [\alpha', \alpha] \\ \forall i : 0 < i < n_1(x) \end{array} \quad (5.8)$$

e

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha', n_1+k_2}(x-1) \\ a_{\alpha', n_1+k_2}(x-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha, n_1(x)+k_1}(x) \\ a_{\alpha, n_1(x)+k_1}(x) + 1 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

A questo punto usando queste uguaglianze otteniamo

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{\alpha', x-1, m_1^*-1} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{\alpha', x-1, k_2} \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\alpha', k_2+1}(x-1) \\ 1 & a_{\alpha', k_2+1}(x-1) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\alpha', n_1(x)+k_2-1}(x-1) \\ 1 & a_{\alpha', n_1(x)+k_2-1}(x-1) \end{pmatrix} = \\ & = M_{\alpha, x, k_1} \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\alpha, k_1+1}(x) \\ 1 & a_{\alpha, k_1+1}(x) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\alpha, n_1(x)+k_1-1}(x) \\ 1 & a_{\alpha, n_1(x)+k_1-1}(x) \end{pmatrix} = M_{\alpha, x, m_1-1} \end{aligned}$$

Facciamo ora il passo induttivo: per ipotesi induttiva per  $l-1$  dalla (5.7) otteniamo  $T_{\alpha}^{m_l-1}(x) = T_{\alpha'}^{m_l^*-1}(x-1)$  da cui poichè  $T_{\alpha}(T_{\alpha}^{m_l-1}(x)) \in [\alpha, \alpha']$  per la (5.6)  $x' := T_{\alpha}^{m_l-1}(x) = T_{\alpha'}^{m_l^*-1}(x-1) + 1$  Da questo applicando (5.9) con  $x'$  al posto di  $x$  si ha

$$\begin{aligned} & \epsilon_{\alpha', m_l^*}(x-1) = \epsilon_{\alpha', m_{l-1}^*+n_l(x)+k_2}(x-1) = \epsilon_{\alpha', n_l(x)+k_2}(T_{\alpha'}^{m_{l-1}^*}(x-1)) = \\ & = \epsilon_{\alpha', n_l(x)+k_2}(T_{\alpha}^{m_{l-1}-1}(x)-1) = \epsilon_{\alpha, n_1(x')+k_1}(x') = \epsilon_{\alpha, m_{l-1}+n_1(x)+k_1}(x) = \epsilon_{\alpha, m_l}(x) \end{aligned}$$

e analogamente  $a_{\alpha', m_l^*}(x-1) = a_{\alpha, m_l}(x) + 1$

Considerando l'ipotesi induttiva abbiamo

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{\alpha', x-1, m_{l+1}^*-1} = \\ & = M_{\alpha, x, m_l-1} \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\alpha', m_l^*}(x-1) \\ 1 & a_{\alpha', m_l^*}(x-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\alpha', m_{l+1}^*}(x-1) \\ 1 & a_{\alpha', m_{l+1}^*}(x-1) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\alpha', m_{l+1}^*}(x-1) \\ 1 & a_{\alpha', m_{l+1}^*}(x-1) \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M_{\alpha, x, m_l-1} \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\alpha, m_l}(x) \\ 1 & a_{\alpha, m_l}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\alpha', 1}(x'-1) \\ 1 & a_{\alpha', 1}(x'-1) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\alpha', n_1(x')+k_2-1}(x'-1) \\ 1 & a_{\alpha', n_1(x')+k_2-1}(x'-1) \end{pmatrix} = \\
&= M_{\alpha, x, m_l} M_{\alpha, x', n_1(x)+k_1-1} = M_{\alpha, x, m_{l+1}-1}
\end{aligned}$$

il che conclude il passo induttivo.

Notiamo ora che da questo segue  $q_{\alpha, m_l-1}(x) = q_{\alpha', m_l^*-1}(x-1)$  perchè sono le componenti (2,2) delle matrici  $M_{\alpha, x, m_l-1}$  e  $M_{\alpha', x-1, m_l^*-1}$ . Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{m_l^*} \log q_{\alpha', m_l^*-1}(x-1) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{m_l^*} \log q_{\alpha, m_l-1}(x) = \\
&= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{m_l}{m_l^*} \frac{1}{m_l-1} \log q_{\alpha, m_l-1}(x)
\end{aligned}$$

Per il teorema ergodico, per  $\mu_\alpha$ -quasi ogni  $x$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \#\{1 \leq l \leq L \mid T_\alpha^l(x) \in [\alpha', \alpha]\} = \mu_\alpha([\alpha', \alpha])$$

Quindi

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{m_l}{m_l^*} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{l(k_2-k_1)}{\sum_{i=1}^l n_i + lk_i}} = \frac{1}{1 + (k_2 - k_1)\mu_\alpha([\alpha', \alpha])}$$

In conclusione troviamo la formula

$$h(T_{\alpha'}) = \frac{1}{1 + (k_2 - k_1)\mu_\alpha([\alpha', \alpha])} h(T_\alpha) \quad (5.10)$$

il che ci permette di concludere a seconda del segno di  $k_2 - k_1$  e ricordando che  $\mu_\alpha([\alpha', \alpha]) > 0$ . □

**Proposizione 5.2.3.** *Per ogni intero  $r \geq 3$ , esiste un intervallo aperto  $I_r$  tale che  $\frac{1}{r} \in I_r$  e  $h$  è strettamente crescente su  $I_r$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\alpha < \frac{1}{r}$  sia sufficientemente vicino a  $\frac{1}{r}$ . Allora  $\alpha$  è della forma

$$\alpha = \frac{1}{r} + \frac{1}{k} + z$$

con  $k > r$  e  $z \in [\alpha - 1, \alpha]$  cioè

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha, 1}(\alpha) \\ a_{\alpha, 1}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha, 2}(\alpha) \\ a_{\alpha, 2}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$$

Supponiamo inoltre che  $z \neq \alpha, \alpha - 1$ . Allora se  $\alpha < \frac{2}{\sqrt{(r-1)^2 + 4(r-1)} + r - 1}$  si ha

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha, i}(\alpha - 1) \\ a_{\alpha, i}(\alpha - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \forall 1 \leq i \leq r$$

e dall'identità matriciale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$T_\alpha^2(\alpha) = z = \frac{-1}{T_\alpha^{r-1}(\alpha-1)} - (k+1)$$

quindi poichè  $z \in [\alpha-1, \alpha]$  allora

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha,r}(\alpha-1) \\ a_{\alpha,r}(\alpha-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ k+1 \end{pmatrix}$$

e lo sviluppo in  $\alpha$ -frazione continua di  $\alpha-1$  è

$$\alpha-1 = \underbrace{\frac{-1}{2} + \dots + \frac{-1}{2}}_{r-1 \text{ volte}} + \frac{-1}{k+1} + z$$

Questo  $\alpha$  soddisfa quindi le ipotesi della proposizione 5.2.2 con  $k_1 = 2$  e  $k_2 = r$ , per cui  $h$  è crescente in un intorno di  $\alpha$ . Notiamo che, detto  $\alpha_0 = \frac{1}{r} + \frac{1}{k+\alpha_0}$ ,

$$\sup\{\alpha : \alpha \in I_r^+ \cap T_\alpha^{-1}(I_k^+)\} = \inf\{\alpha : \alpha \in I_r^+ \cap T_\alpha^{-1}(I_{k+1}^+)\} = \alpha_0$$

quindi ogni punto in un intorno di  $\alpha_0$  è un punto di crescita, per cui per la continuità di  $h$  anche  $\alpha_0$  è un punto di crescita. Ciò dimostra che l'entropia cresce in un intorno sinistro di  $\frac{1}{r}$  per ogni  $r \geq 3$ .

Similmente, se

$$\alpha = \frac{1}{r} + \frac{-1}{(k+1)+z}$$

con  $z \in [\alpha-1, \alpha]$ , allora l' $\alpha$ -sviluppo di  $\alpha-1$  è

$$\alpha-1 = \underbrace{\frac{-1}{2} + \dots + \frac{-1}{2}}_{r-1 \text{ volte}} + \frac{1}{k+z}$$

quindi anche in questo caso  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = r$  e l'entropia cresce anche in un intorno di questo  $\alpha$ ; unendo gli intervallini per  $k$  diversi si ottiene che l'entropia cresce in un intorno destro di  $\frac{1}{r}$ ; per la continuità cresce quindi anche in  $\frac{1}{r}$ .  $\square$

In modo simile si dimostra l'esistenza degli intervalli di monotonia  $I_r$ ,  $J_r$ ,  $K_r$ ; dato  $r \geq 3$ , si prende come  $J_r$  l'insieme degli  $\alpha$  con  $\alpha$ -sviluppo

$$\alpha = \frac{1}{r} + \underbrace{\frac{-1}{2} + \dots + \frac{-1}{2}}_{r-2 \text{ volte}} + \frac{1}{k+z}$$

con  $k > r$  e  $z \in [\alpha - 1, \alpha]$ . Si verifica che valgono le ipotesi della proposizione 5.2.2 con  $k_1 = k_2 = r+1$ , quindi  $h$  è costante su  $J_r$ . Allo stesso modo costruiamo  $K_r$  come l'insieme degli  $\alpha$  con  $\alpha$ -sviluppo

$$\alpha = \frac{1}{r+1} + \underbrace{\frac{-1}{2} + \dots + \frac{-1}{2}}_{r+2 \text{ volte}} + \frac{-1}{3} + \underbrace{\frac{-1}{2} + \dots + \frac{-1}{2}}_{r+2 \text{ volte}} + \frac{1}{k+z}$$

$z \in [\alpha - 1, \alpha]$ ; infine per  $L_r$  si considera

$$\alpha = \frac{1}{r+1} + \underbrace{\frac{-1}{2} + \dots + \frac{-1}{2}}_{r+2 \text{ volte}} + \frac{-1}{3} + \frac{-1}{2} + \frac{1}{k+z}$$

Questo completa la dimostrazione del teorema 5.2.1.

**Osservazione.**

L'equazione 5.10 ha interessanti conseguenze sulla derivabilità di  $h$ : infatti si può riscrivere come

$$h(T_\alpha) - h(T_{\alpha'}) = h(T_{\alpha'})(k_2 - k_1)\mu_\alpha([\alpha, \alpha'])$$

e dividendo per  $\alpha - \alpha'$

$$\frac{h(T_\alpha) - h(T_{\alpha'})}{\alpha - \alpha'} = h(T_{\alpha'})(k_2 - k_1)\frac{\mu_\alpha([\alpha, \alpha'])}{\alpha - \alpha'}$$

con  $\alpha' < \alpha$ .

Essendo  $\rho_\alpha$  a variazione limitata, allora esiste  $R(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} \rho_\alpha(x)$ , quindi anche

$$\lim_{\alpha' \rightarrow \alpha} \frac{\mu_\alpha([\alpha, \alpha'])}{\alpha - \alpha'} = R(\alpha)$$

e per la continuità di  $h$

$$\lim_{\alpha' \rightarrow \alpha^-} \frac{h(T_\alpha) - h(T_{\alpha'})}{\alpha - \alpha'} = h(T_\alpha)(k_2 - k_1)R(\alpha)$$

Per  $\alpha' > \alpha$  si può invece scrivere

$$\frac{h(T_\alpha) - h(T_{\alpha'})}{\alpha - \alpha'} = h(T_\alpha)(k_2 - k_1)\frac{\mu_{\alpha'}([\alpha, \alpha'])}{\alpha' - \alpha}$$

Notiamo ora che per le (5.6) vale  $\mu_{\alpha'}([\alpha, \alpha']) = \mu_\alpha([\alpha - 1, \alpha' - 1])$  e che

$$\lim_{\alpha' \rightarrow \alpha^+} \frac{\mu_\alpha([\alpha - 1, \alpha' - 1])}{\alpha' - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \rho_\alpha(x - 1)$$

Di conseguenza  $h(T_\alpha)$  ha derivata destra e sinistra nei punti  $\alpha$  che soddisfano le ipotesi del teorema 5.2.2. Si congetta che in tali punti le derivate destra e sinistra siano uguali.

Un'altra conseguenza della formula 5.10 è che è possibile conoscere l'entropia in un intorno di un punto  $\alpha$  che soddisfa le ipotesi della proposizione 5.2.2 a patto di conoscere la misura invariante  $\mu_\alpha$ ; in particolare possiamo ottenere il valore dell'entropia per un intervallo per cui non era ancora noto.

**Corollario 5.2.4.** *Per  $\frac{1}{10}(-15 + \sqrt{365}) \leq \alpha \leq \sqrt{2} - 1$ , l'entropia è*

$$h(T_\alpha) = \frac{\pi^2}{6 \log \left( 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)}$$

*Dimostrazione.* Ogni  $\alpha$  nell'intervallo  $(\frac{1}{10}(-15 + \sqrt{365}), \sqrt{2} - 1)$  soddisfa le ipotesi del teorema con  $k_1 = k_2 = 3$ ; infatti si verifica che

$$\begin{aligned} T_\alpha(\alpha) &= \frac{1-3\alpha}{\alpha} & T_\alpha(\alpha-1) &= \frac{2\alpha-1}{1-\alpha} \\ T_\alpha^2(\alpha) &= \frac{-5\alpha+2}{3\alpha-1} & T_\alpha^2(\alpha-1) &= \frac{-5\alpha+2}{2\alpha-1} \\ T_\alpha^3(\alpha) &= T_\alpha^3(\alpha-1) = \frac{17\alpha-7}{-5\alpha+2} \end{aligned}$$

e queste rispettano le condizioni (c-1), (c-2), (c-3). Di conseguenza  $h(T_\alpha)$  è localmente costante in ciascuno di questi punti; per la continuità quindi  $h(T_\alpha) = h(T_{\sqrt{2}-1})$ , il cui valore è noto dalla 3.4.3.  $\square$

La proposizione 5.2.2 dimostra che riusciamo a determinare il comportamento dell'entropia nei punti in cui esistono  $k_1$  e  $k_2$  interi positivi per cui  $T_\alpha^{k_1}(\alpha) = T_\alpha^{k_2}(\alpha-1)$  (questo tipo di relazioni sono anche quelle che permettono, nei casi noti, di ricavare esplicitamente l'estensione naturale). Questa condizione si verifica molto frequentemente all'interno dell'intervallo  $[0, 1]$ ; si osservi però che esistono dei valori di  $\alpha$  per cui non vale.

**Proposizione 5.2.5.** ([18], prop. 2) *Supponiamo che  $\alpha$  abbia uno sviluppo in frazione continua standard del tipo*

$$\frac{\epsilon_1}{t_1} + \frac{\epsilon_2}{t_2} + \dots$$

*con  $t_1 \geq 4$  e  $t_i < t_1 - 1$  per  $i \geq 2$ . Allora  $\{T_\alpha^n(\alpha) \mid n \geq 1\}$  e  $\{T_\alpha^m(\alpha-1) \mid m \geq 1\}$  sono disgiunti.*

# Bibliografia

- [1] W. BOSMA, *Optimal continued fractions*, Indag. Math. 49 (1987), 353-379
- [2] A. BROISE, *Transformations dilatantes de l'intervalle et théorèmes limites*, Astérisque 238 (1996) 1-109
- [3] I. CORNFELD, S. FOMIN, Y. SINAI, *Ergodic theory*, Springer-Verlag, New York, 1982
- [4] P. FLAJOLET, B. VALLÉE, I. VARDI, *Continued fractions from Euclid to the present day*, 2000, <http://citeseer.ist.psu.edu/flajolet00continued.html>
- [5] B. HASSELBLATT, A. KATOK, *Handbook of dynamical systems*, Elsevier Science, Amsterdam, 2002
- [6] F. HOFBAUER, G. KELLER, *Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations*, Mathematische Zeitschrift 180 (1982), 119-140
- [7] E. HOPF, *Ergodic theory and the geodesic flow on surfaces of constant negative curvature*, Bulletin of the American Mathematical Society 77 (1971), 863-877
- [8] M. IOSIFESCU, C. KRAAIKAMP, *Metrical theory of continued fractions*, Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002
- [9] C.T. IONESCU-TULCEA, G. MARINESCU, *Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues*, Ann. Math. 52 (1950), 140-147
- [10] A. KHINTCHINE, *Metrische Kettenbruchprobleme*, Compositio Math. 1 (1934/35), 361-382
- [11] A.N. KOLMOGOROV, *New Metric Invariant of Transitive Dynamical Systems and Endomorphisms of Lebesgue Spaces*, Doklady of Russian Academy of Sciences 119 (1958), 861-864
- [12] C. KRAAIKAMP, *A new class of continued fraction expansions*, Acta Arithmetica 57 (1991), 1-39

- [13] A. LASOTA, J.A. YORKE, *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 186 (1973), 481-488
- [14] L. LUZZI, S. MARMI, *On the entropy of Japanese continued fractions*, Discrete and continuous dynamical systems, 20 (2008), 673-711
- [15] A. CASSA, P. MOUSSA, S. MARMI, *Continued fractions and Brjuno functions*, J. Comput. Appl. Math. 105 (1995), 403-415
- [16] S. MARMI, P. MOUSSA, J.-C. YOCCOZ, *The Brjuno functions and their regularity properties*, Commun. Math. Phys. 186 (1997), 265-293
- [17] H. NAKADA, *Metrical theory for a class of continued fraction transformations and their natural extensions*, Tokyo J. Math. 4 (1981), 399-426
- [18] H. NAKADA, R. NATSUI, *The non-monotonicity of the entropy of  $\alpha$ -continued fraction transformations*, 2007 (preprint)
- [19] V.N. NOLTE, *Some probabilistic results on the convergents of continued fractions*, Indag. Math., 1 (1990), 381-389
- [20] D. ORNSTEIN, *Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic*, Advan. Math. 4, no. 3 (1970), 337-352
- [21] W. PARRY, *Entropy and generators in ergodic theory*, W.A.Benjamin, New York, 1969
- [22] V.A. ROHLIN, *Exact endomorphisms of a Lebesgue space*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 25 (1961), 499-530; English translation: Amer. Math. Soc. Transl. (2) 39 (1964), 1-36
- [23] M. RYCHLIK, *Bounded variation and invariant measures*, Studia Math. 76 (1983), 69-80
- [24] F. SCHWEIGER, *Ergodic theory of fibred systems and metric number theory*, Oxford Sci. Publ. Clarendon Press, Oxford, 1995
- [25] C. SERIES, *The modular surface and continued fractions*, J. London Math. Soc. 2, 31, 1985, 69-85
- [26] Y. SINAI, *Topics in ergodic theory*, Princeton Mathematical Series, Princeton, 1994
- [27] S. TANAKA, S. ITO, *On a family of continued-fraction transformations and their ergodic properties*, Tokyo J. Math. 4 (1981), 153-175
- [28] M. VIANA, *Stochastic Dynamics of Deterministic Systems*, Lecture Notes XXI. Braz. Math. Colloq. IMPA, Rio de Janeiro, 1997, <http://citeseer.ist.psu.edu/viana97stochastic.html>

- [29] R. ZWEIMÜLLER, *Ergodic structure and invariant densities of non-Markovian interval maps with indifferent fixed points*, Nonlinearity 11 (1998), 1263-1276