

СУПЕРУРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА КАК УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

В. Ю. Овсиенко, Б. А. Хесин

Известно, что уравнение Кортевега — де Фриза (KdV) связано с алгеброй Вирасоро (см. [2; 3]). В работе [6] (см. также [5; 7]) было предложено суперуравнение Кортевега — де Фриза (sKdV), соответствующее простейшим супераналогам алгебры Вирасоро — супералгебрам Неве — Шварца и Рамона. Настоящая заметка касается одного геометрического аспекта этой связи. Ее цель — показать, что (s)KdV есть уравнение Эйлера на соответствующих группах, т. е. уравнение геодезических некоторых одностороннее инвариантных метрик.

1. Напомним хорошо известные из механики определения (см. [1]). Пусть $\mathfrak{G}$ — (супер)алгебра Ли. (Право)инвариантная метрика на соответствующей группе однозначно определяется симметрическим оператором $A: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}^*$, называемым оператором инерции обобщенного твердого тела. Она задается разнесением по группе (правыми) сдвигами скалярного произведения на $\mathfrak{G}$:

$$(\xi, \eta) = \langle A\xi, \eta \rangle, \quad \text{где} \quad \xi, \eta \in \mathfrak{G}.$$

Пусть $g(t)$ — геодезическая правоинвариантной метрики на группе. Элемент алгебры Ли $\omega = R_{g^{-1}g}$ называется угловой скоростью в теле. Элемент $M = A\omega$ из $\mathfrak{G}^*$ называется кинетическим моментом относительно тела.

Вектор момента относительно тела удовлетворяет уравнению $dM/dt = \text{ad}_{\omega}^* M$, которое называется уравнением Эйлера.

На двойственном пространстве к (супер)алгебре Ли существует естественная скобка Пуассона — Ли — Березина — Кириллова. Пусть F, G — функции на $\mathfrak{G}^*$. Тогда

$$\{F, G\}(M) = \langle M, [dF, dG] \rangle \quad (1)$$

(дифференциалы dF и dG , взятые в точке M , лежат в замыкании $\mathfrak{G}$ и определен их коммутатор).

Уравнение Эйлера сохраняет орбиты коприсоединенного представления $\mathfrak{G}$ и является гамильтоновым с гамильтонианом $H(M) = \langle M, A^{-1}M \rangle$, называемый энергией.

2. Напомним, что алгебра Вирасоро V — единственное нетривиальное] центральное расширение с помощью $\mathbb{R}$ алгебры Ли $\text{Vect } S^1$ (векторных полей на окружности). Ее элементы можно отождествить с парами (2 π -периодическая функция, число). Тогда коммутатор в V принимает вид

$$[f(x), a], (g(x), b)] = (f(x)g'(x) - g(x)f'(x), \int f'(x)g''(x)dx)$$

(здесь и далее интегрирование производится по отрезку $[0, 2\pi]$).

Пространство V^* можно отождествить с парами (2 π -периодическая функция, число). Скобка (1) в функциях на V^* задается формулой

$$\{F, G\}(u(x), c) = \int \left[\left(\frac{\delta F}{\delta u} \left(\frac{\delta G}{\delta u} \right)' - \frac{\delta G}{\delta u} \left(\frac{\delta F}{\delta u} \right)' \right) u + c \left(\frac{\delta F}{\delta u} \right)' \left(\frac{\delta G}{\delta u} \right)'' \right] dx \quad (1')$$

(в качестве функций на V^* достаточно рассматривать интегралы от дифференциальных полиномов (см. [2]), $\delta F/\delta u(x)$ определяется равенством

$$d/d\varepsilon F(u + \varepsilon v, c)|_{\varepsilon=0} = \int \frac{\delta F}{\delta u}(x) v(x) dx.$$

Уравнение Гамильтона с гамильтонианом F имеет вид

$$\dot{u} = 2 \left(\frac{\delta F}{\delta u} \right)' u + \frac{\delta F}{\delta u} u' - c \left(\frac{\delta F}{\delta u} \right)'', \quad \dot{c} = 0. \quad (2')$$

Рассмотрим оператор инерции A такой, что $A(f, a) = (f, a) \in V^*$. Он задает скалярное произведение на V : $((f, a), (g, b)) = \int fg dx + ab$.

Предложение 1. Уравнение Эйлера, отвечающее оператору инерции A , совпадает с уравнением KdV.

Доказательство. Энергия на V^* равна $H(u, c) = \frac{1}{2} \int u^2(x) dx + c^2/2$. Ей соответствует уравнение Гамильтона

$$\dot{u} = 3u'u - cu'''. \quad (3)$$

3. Супералгебры Неве — Шварца (NS) и Рамона (R) — простейшие супераналоги алгебры Вирасоро. Они входят в число так называемых супералгебр Ли струнных теорий [4]. Четные части NS и R совпадают с алгеброй Вирасоро, нечетные части отождествляются с функциями одного переменного, такими что $\psi(x + 2\pi) = -\psi(x)$, для NS , $\psi(x + 2\pi) = \psi(x)$ для R . Коммутатор в NS и R принимает вид

$$[(f, \varphi, a), (g, \psi, b)] = (fg' - gf' + \varphi\psi/2, f\psi' - \psi f'/2 - g\varphi' + \varphi g'/2, \int (f'g'' + \varphi'\psi'/2)).$$

Двойственные пространства NS^* и R^* отождествляются с множеством троек $(u(x), \xi(x), c)$, где $u(x)$ — функция на S^1 со значениями в четной, $\xi(x)$ — функция т.ч. $\xi(x + 2\pi) = -\xi(x)$ ($\xi(x)$ соответственно) со значениями в нечетной части некоторого суперкоммутативного кольца.

Скобка (1) на NS^* и R^* (см. [5; 6]) определяется при помощи оператора

$$P(u, \xi, c) = \begin{pmatrix} c\partial^3 - u\partial - \partial u & -\partial\xi/2 - \xi\partial \\ -\partial\xi - \xi\partial/2 & (c\partial^2 - u)/2 \end{pmatrix},$$

где $(u, \xi, c) \in NS^* (R^*)$, $\partial = d/dx$ и имеет вид

$$\{F, G\}(u, \xi, c) = ((\delta F/\delta u, \delta F/\delta \xi), P(\delta G/\delta u, \delta G/\delta \xi)). \quad (1'')$$

Уравнение Гамильтона с гамильтонианом F определяется формулой

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = -P \begin{pmatrix} \delta F/\delta u \\ \delta F/\delta \xi \end{pmatrix}. \quad (2'')$$

Рассмотрим оператор инерции $A_s: NS \rightarrow NS^* (R \rightarrow R^*)$:

$$A_s(f(x), \varphi(x), a) = (f(x), {}^{1/4}\partial^{-1}\varphi(x), c).$$

В случае супералгебры NS он определяется однозначно и невырожден, так как оператор интегрирования ∂^{-1} действует в пространстве функций с нулевым средним. Для супералгебры R оператор ∂^{-1} определен формулой $(\partial^{-1}u)(x) = \int_0^x (u - \int u) dy - \int_0^x (u - \int u) dy$.

Соответствующая метрика оказывается вырожденной.

Предложение 2. Уравнение Эйлера, соответствующее оператору инерции A_s , совпадает с суперуравнением Кортвега — де Фриза из [6].

Доказательство. Энергия равна $H(u, \xi, c) = {}^{1/2} \int (u^2(x) + 4\xi'(x)\xi(x))dx + c^2/2$. По формуле (2''), уравнение Гамильтона с гамильтонианом H имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 3u'u - cu''' - 6\xi''\xi, \\ \dot{\xi} &= 3u\xi' + 3u'\xi/2 - 2c\xi'''. \end{aligned}$$

Авторы приносят глубокую благодарность В. И. Арнольду и Г. М. Хенкину за внимание к работе и полезные обсуждения, А. О. Радулу за улучшение текста заметки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
2. Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. // Функцион. анализ и его прил.— 1981. Т. 15, вып. 3.— С. 23—40.
3. Кириллов А. А. // Функцион. анализ и его прил.— 1981. Т. 15, вып. 2.— С. 75—76.
4. Лейтес Д. А., Фейгин Б. Л. // Теоретико-групповые методы в физике. Т. 1. М.: Наука, 1983. С. 269—273.
5. Хованова Т. Г. // ТМФ.— 1987. Т. 72, вып. 2.— С. 306—312.
6. Kupersmidt B. A. // Phys. Lett.— 1984. V. 102A, No. 5, 6.— P. 213—215.
7. Manin Yu. I., Radul A. O. // Comm. in Math. Phys.— 1985. V. 98.— P. 65—77.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
8 августа 1986 г.