Análisis Armónico y la conjetura de restricción

Joaquín Sánchez

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Viernes 6 de Mayo 2016 **7:00 am**

Contenido

Planteamiento del problema

Supongamos que tenemos una función f_1, con valores reales. La función f_1 contiene información, nos preguntamos si hay alguna otra manera de 'pensar' en esta función.
Es decir, ¿podemos guardar la misma información de f_1 con alguna otra función, f_2, que tenga propiedades diferentes?

$$f_1 \stackrel{?}{\longleftrightarrow} f_2$$

Definir bien el problema

Lo que tenemos que definir es qué tipo de propiedades queremos exigir a la nueva función.
Tiene sentido pedirle a la nueva función:

- Que sea integrable.
- Que tenga menos oscilaciones.
- Que sea más fácil de manejar numéricamente.
- Que sea más fácil de guardar en una computadora.

Transformadas

Lo que intentamos es asignar a f_1 otra función f_2. Esto da pie a una ‘función de funciones’ denominada transformada.
Denotemos $f_2 = T(f_1)$, el operador T es lo que nosotros llamamos una transformada.

$$f \to T(f)$$

Ejemplo: Transformada de Fourier

Dada f, función continua con soporte compacto (más general en la clase de Schwartz $\mathcal{S}$) se define su transformada de Fourier:

$$T(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Preguntas: ¿Cuál es la clase de funciones más amplia para las que podemos definir este operador?
¿Cómo se comporta este operador?
Continuidad: Si cambiamos un poco f, ¿cuánto cambia $\hat{f}$?
Si tenemos $T(f)$, ¿podemos recuperar f?

Probabilidad

Dada una variable aleatoria X, con función de densidad f_X la función característica $\varphi_X(t) = \hat{f}_X(t)$.
Todos conocemos la utilidad de tener la función característica y el Teorema de Unicidad. (Este teorema es el teorema de inversión de transformadas de Fourier).

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \varphi_X(t) = \exp\left(i\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right).$$

En notación de teoría de la medida:

$$\varphi_X(t) = \int e^{-2\pi i x t} d\left(X^{-1} \circ \mathbb{P}\right)(x).$$

Tomografías

Se puede entender al cerebro como un volumen en $\mathbb{R}^3$ y las tomografías hacen proyecciones a $\mathbb{R}^2$ por planos. Si $P_{t,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x^T\gamma = t\}$ entonces

$$\mathcal{R}(f)(t,\gamma) = \int_{P_{t,\gamma}} f$$

se llama la transformada de Radón de f. La integral respecto a la medida de Hausdorff 2-dimensional.

Ecuaciones Diferenciales

Para una función apropiada f, su transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int f(t)e^{-st}dt$$

y tiene la propiedad: $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$.
Para resolver ecuaciones diferenciales, se considera la transformada de Laplace, se resuelve esta nueva ecuación y después se toma la transformación inversa.

La transformada de Hilbert

Para una función apropiada f,

$$H(f)(\xi) = \mathbf{p.v.} \int \frac{f(x)}{\xi - x} dx$$

satisface que $\hat{H}(f)(\xi) = (-i\,\mathrm{signo}(\xi))\hat{f}(\xi)$

Si $L^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to R \,\middle|\, \int |f|^p < \infty \right\}$ y tenemos una transformada tal que $\hat{T}(f)(\xi) = \mathbb{1}_B \hat{f}(\xi)$, ¿para qué valores de p, T es un operador acotado?.
Es decir, ¿para qué valores de p se tiene:

$$||T(f)|| \leq C||f||_p?$$

Conjetura del disco (hasta '71): para todo $p \in \left(\frac{2n}{n+1}, \frac{2n}{n-1} \right)$.

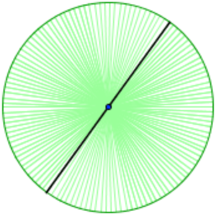
La conjetura del disco es falsa

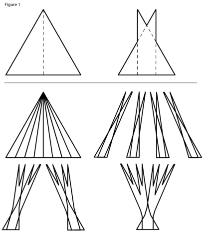
(Fefferman 1971, The Multiplier Problem for the Ball, Annals of Mathematics)
Si $n > 1$ entonces T es un operador acotado **sólo** si $p = 2$.
¿Cómo se demuestra? Construyendo funciones con conjuntos peculiares...

Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina conjunto de Kakeya si

- K es compacto.
- K contiene un segmento de recta de longitud 1 en todas las direcciones.
- $+$(Besicovitch): K tiene 'longitud/volumen' cero. $(Leb(K) = 0)$.

Conjuntos de Kakeya





Solución a la conjetura del disco: $f(x) = \mathbb{1}_K$ con K Besicovitch.
BONUS: Encontrar la dimensión de Hausdorff de los conjuntos de Besicovitch.

La desigualdad de Thomas-Stein y la conjetura de Restricción

Tomas-Stein: Sea $f \in L^p$ donde $p \leq \frac{2n+2}{n+3}$ entonces

$$||\hat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}||_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C||f||_p.$$

Conjetura de restricción: Sea $f \in L^p$ entonces

$$||\widehat{fd\sigma}||_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C||f||_{L^\infty}$$

para algún $q < \infty$.

Gracias por su atención.