# Wstęp do układów statycznych

Marcin Kotowski, Michał Kotowski

Uniwersytet Warszawski

1 maja 2010

# Wprowadzenie

Standardowe układy dynamiczne - przestrzeń $X$ wraz z przekształceniem $f : X \rightarrow X$ zachowującym strukturę. Typowe przykłady:

- $X$ - przestrzeń metryczna, $f$ - przekształcenie ciągłe

# Wprowadzenie

Standardowe układy dynamiczne - przestrzeń $X$ wraz z przekształceniem $f : X \to X$ zachowującym strukturę. Typowe przykłady:

- $X$ - przestrzeń metryczna, $f$ - przekształcenie ciągłe
- $X$ - przestrzeń z miarą $\mu$, $f$ - mierzalne zachowujące miarę

# Wprowadzenie

Standardowe układy dynamiczne - przestrzeń $X$ wraz z przekształceniem $f : X \to X$ zachowującym strukturę. Typowe przykłady:

- $X$ - przestrzeń metryczna, $f$ - przekształcenie ciągłe
- $X$ - przestrzeń z miarą $\mu$, $f$ - mierzalne zachowujące miarę
- $X$ - rozmaitość, $f$ - przekształcenie gładkie

# Wprowadzenie

Układy statyczne - szczególna klasa układów.

# Wprowadzenie

Układy statyczne - szczególna klasa układów.

**Definicja**

**Układem statycznym** nazywamy przestrzeń $X$ (topologiczną, z miarą, ...) wraz z przekształceniem $f : X \to X$ o następującej własności:

# Wprowadzenie

Układy statyczne - szczególna klasa układów.

**Definicja**

**Układem statycznym** nazywamy przestrzeń $X$ (topologiczną, z miarą, ...) wraz z przekształceniem $f : X \to X$ o następującej własności:

$$\forall\, x \in X \;\; f(x) = x$$

# Wprowadzenie

Układy statyczne - szczególna klasa układów.

## Definicja

**Układem statycznym** nazywamy przestrzeń $X$ (topologiczną, z miarą, ...) wraz z przekształceniem $f : X \to X$ o następującej własności:

$$\forall\, x \in X \;\; f(x) = x$$

## Motto

*If you think that any time spent on the identity, which seems to do nothing, is a waste of time, just wait and see.*
R. Shankar, „Principles of quantum mechanics"

# Wprowadzenie

- Badanie układów statycznych jest znacznie trudniejsze od układów dynamicznych

# Wprowadzenie

- Badanie układów statycznych jest znacznie trudniejsze od układów dynamicznych
- Nie zakładamy a priori, że przekształcenie $f$ jest kompatybilne ze strukturą $X$ (tj. że jest ciągłe, zachowujące miarę, ...)!

# Wprowadzenie

- Badanie układów statycznych jest znacznie trudniejsze od układów dynamicznych
- Nie zakładamy a priori, że przekształcenie $f$ jest kompatybilne ze strukturą $X$ (tj. że jest ciągłe, zachowujące miarę, ...)!

**Podstawowe Twierdzenie Układów Statycznych (Smale, 1967)**

Dla dowolnego układu statycznego $(X, f)$ przekształcenie $f$ jest automatycznie zgodne ze strukturą $X$ (odp. ciągłe, gładkie, zachowujące miarę).

# Wprowadzenie

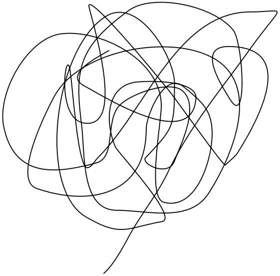
- Badanie układów statycznych jest znacznie trudniejsze od układów dynamicznych
- Nie zakładamy a priori, że przekształcenie $f$ jest kompatybilne ze strukturą $X$ (tj. że jest ciągłe, zachowujące miarę, ...)!

**Podstawowe Twierdzenie Układów Statycznych (Smale, 1967)**

Dla dowolnego układu statycznego $(X, f)$ przekształcenie $f$ jest automatycznie zgodne ze strukturą $X$ (odp. ciągłe, gładkie, zachowujące miarę).

(analogia z funkcjami holomorficznymi)

Przykładowy zbiór $f$-niezmienniczy dla układu statycznego na $\mathbb{R}^2$.



# Własności

Własności ergodyczne:

- $f$ nigdy nie jest mieszające, słabo mieszające ani nawet ergodyczne...

# Własności

Własności ergodyczne:

- $f$ nigdy nie jest mieszające, słabo mieszające ani nawet ergodyczne...
- ale jest sztywność!

**Przypomnienie**

$T$ jest sztywne (*rigid*), jeśli istnieje ciąg $n_k$ t.ż.

$$\mu(T^{-n_k}(A)\Delta A) \to 0$$

# Własności

Własności ergodyczne:

- $f$ nigdy nie jest mieszające, słabo mieszające ani nawet ergodyczne...
- ale jest sztywność!

**Przypomnienie**

$T$ jest sztywne (*rigid*), jeśli istnieje ciąg $n_k$ t.ż.

$$\mu(T^{-n_k}(A)\Delta A) \to 0$$

**Twierdzenie (Sinai, 1971)**

Każdy układ statyczny jest automatycznie sztywny.

# Struktura orbit

Patrzymy na orbity $X$ względem działania grupy $G = \{f^n, n \in \mathbb{N}\}$.

# Struktura orbit

Patrzymy na orbity $X$ względem działania grupy $G = \{f^n, n \in \mathbb{N}\}$.

$$\cdot$$

# Struktura orbit

Patrzymy na orbity $X$ względem działania grupy $G = \{f^n, n \in \mathbb{N}\}$.

.

**Twierdzenie o strukturze orbit (Furstenberg, 1978)**

Dla dowolnego układu statycznego przestrzeń orbit $X/G$ jest izomorficzna z wyjściową przestrzenią $X$.

# Orbity, c.d

Dla układów dynamicznych mamy znane:

**Twierdzenie (Li-Yorke, 1975)**

Jeśli przekształcenie ciągłe $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ma orbitę długości 3 $a \longrightarrow b \longrightarrow c$ dla $a < b < c$, to ma orbitę dowolnej długości.

# Orbity, c.d

Dla układów dynamicznych mamy znane:

**Twierdzenie (Li-Yorke, 1975)**

Jeśli przekształcenie ciągłe $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ma orbitę długości 3 $a \longrightarrow b \longrightarrow c$ dla $a < b < c$, to ma orbitę dowolnej długości.

Analogicznie dla układów statycznych zachodzi:

# Orbity, c.d

Dla układów dynamicznych mamy znane:

**Twierdzenie (Li-Yorke, 1975)**

Jeśli przekształcenie ciągłe $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ma orbitę długości 3 $a \longrightarrow b \longrightarrow c$ dla $a < b < c$, to ma orbitę dowolnej długości.

Analogicznie dla układów statycznych zachodzi:

**Twierdzenie (Szarkowski, 1985)**

Jeśli układ statyczny $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ma orbitę długości 3, to ma też orbitę długośći 4.

# Zastosowania

- Ważnym zastosowaniem układów statycznych jest teoria równań różniczkowych zwyczajnych

# Zastosowania

- Ważnym zastosowaniem układów statycznych jest teoria równań różniczkowych zwyczajnych
- Dla $x \in \mathbb{R}^n$ możemy rozważać równanie różniczkowe $\dot{x} = 0$ (z ustalonym warunkiem początkowym $x(0) = x_0$)

# Zastosowania

- Ważnym zastosowaniem układów statycznych jest teoria równań różniczkowych zwyczajnych
- Dla $x \in \mathbb{R}^n$ możemy rozważać równanie różniczkowe $\dot{x} = 0$ (z ustalonym warunkiem początkowym $x(0) = x_0$)
- Okazuje się, że dla dowolnego $t \geqslant 0$ potok tego równania poczasie $t$, $\phi_t$, zadaje układ statyczny

# Zastosowania

- Ważnym zastosowaniem układów statycznych jest teoria równań różniczkowych zwyczajnych
- Dla $x \in \mathbb{R}^n$ możemy rozważać równanie różniczkowe $\dot{x} = 0$ (z ustalonym warunkiem początkowym $x(0) = x_0$)
- Okazuje się, że dla dowolnego $t \geqslant 0$ potok tego równania poczasie $t$, $\phi_t$, zadaje układ statyczny
- Ciekawe pytania - np. istnienie cykli granicznych dla $\phi_t$

# Problemy otwarte

- znaleźć układ statyczny $(X, f)$ o niezerowej entropii

## Problemy otwarte

- znaleźć układ statyczny $(X, f)$ o niezerowej entropii
- istnienie miar Gibbsa

# Problemy otwarte

- znaleźć układ statyczny $(X, f)$ o niezerowej entropii
- istnienie miar Gibbsa
- układy statyczne o nieskończonej mierze $(\mu(X) = \infty)$ - mało twierdzeń, głównie kontrprzykłady

# Bibliografia


- D. Anosov, „Handbook of static systems"
- O. Szarkowski, „On a point which doesn't move"
- M.B., „Moduli spaces, Heegaard-Floer cohomology and their application to static systems"

# Bibliografia


- D. Anosov, „Handbook of static systems"
- O. Szarkowski, „On a point which doesn't move"
- M.B., „Moduli spaces, Heegaard-Floer cohomology and their application to static systems"


Dziękuję za uwagę!