C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, p. 805-808, 1987

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs

Yann BRENIER

Résumé — On montre, sous des hypothèses raisonnables, qu'un champ de vecteurs φ défini sur un compact K de $\mathbf{R}^d$ peut se factoriser sous la forme $\varphi = \nabla u \circ g$, où u est une fonction convexe définie sur K et g une application de K dans lui-même qui conserve les volumes.

Polar decomposition and increasing rearrangement of vector fields

Abstract — *It is shown under reasonable assumptions that a given vector field φ defined on a compact set K of $\mathbf{R}^d$ can be factored in the form $\varphi = \nabla u \circ g$, where u is a convex function defined on K and g is a volume preserving mapping from K into itself. This factorization, closely linked to the Monge-Ampère equation, generalizes the polar decomposition of matrices, as well as the increasing rearrangement of real functions, and the De Rham decomposition of vector fields.*

1. INTRODUCTION. — Pour un compact K de $\mathbf{R}^d$, soit S l'ensemble des applications g de K dans K (appelées endomorphismes dans [1]) qui conservent la mesure de Lebesgue :

(1.1) pour tout A mesurable dans K, $g^{-1}(A)$ est mesurable et de même mesure que A, ou encore :

(1.2) $$\int_K f(g(x))\,dx = \int_K f(x)\,dx,$$ pour toute fonction f intégrable sur K.

Notons qu'une telle transformation n'est pas nécessairement bijective [ainsi pour $K=[0, 1]$, on a l'exemple bien connu : $g(x) = \min(2x, 2-2x)$].

Soit φ une application donnée de K dans $\mathbf{R}^d$ qu'on suppose bornée, borélienne, Riemann intégrable.

Dans ces conditions, on a :

THÉORÈME (décomposition polaire des champs de vecteurs). — *Sous l'hypothèse de non dégénérescence :*

(1.3) *mesure* $(A)=0 \Rightarrow$ *mesure* $(\varphi^{-1}(A))=0$, *pour toute partie* A *mesurable dans* $\mathbf{R}^d$, *il existe une unique application g telle que :*

(1.4) $\varphi = \nabla u \circ g$, *où g conserve les volumes et u est convexe lipschitzienne au voisinage de* K. *L'application g est aussi l'unique projection de* φ *sur* S *au sens de la norme* L^2.

Nous appelons décomposition polaire de φ la factorisation (1.4), et ∇u le « réarrangement monotone » de φ. Avant de donner les principales lignes de la démonstration (sections 2 et 3), nous allons voir que, dans trois cas particuliers (section 1 *a*, *b* et *c*), la décomposition polaire correspond à des représentations déjà connues et qu'elle est aussi étroitement liée à l'équation de Monge-Ampère (section 1 *d*).

1 *a*. *Champs proches de l'identité et décomposition de De Rham.* — Lorsque φ est proche de l'identité :

(1.5) $$\varphi(x) = x + \varepsilon z(x), \qquad \varepsilon \ll 1,$$

il est naturel de chercher ∇u et g comme des champs eux-mêmes proches de l'identité :

(1.6) $$g(x) = x + \varepsilon w(x) + O(\varepsilon^2), \qquad u(x) = 1/2\,\|x\|^2 + \varepsilon p(x) + O(\varepsilon^2).$$

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

Par des calculs élémentaires, on tire de la décomposition (1.4) et de la conservation (1.2) :

(1.7) $z(x)=\nabla p(x)+w(x)$ et $\int_{K} \nabla f(x) \cdot w(x)\,dx=0$, pour tout f dans $C^1(K)$,

et donc, formellement, lorsque K est l'adhérence d'un ouvert régulier Ω :

(1.8) $z=\nabla p+w$ où $\nabla . w=0$ dans Ω et $w.n=0$ sur $\partial\Omega$ (n = normale extérieure).

On retrouve la décomposition des champs de vecteurs de De Rham.

1.*b*. *Champs linéaires et décomposition polaire des matrices*. — Si K est la boule unité fermée B de $\mathbf{R}^d$ et $\varphi(x)=A.x$ un champ linéaire, la factorisation (1.4) se réduit à la décomposition polaire $A=RU$ de la matrice A, où R est symétrique positive et U orthogonale. On retrouve la factorisation (1.4) en posant :

(1.9) $u(x)=(1/2)\,R\,x.x, \qquad g(x)=U.x,$

où u est bien convexe, et en remarquant que les transformations linéaires qui laissent B invariante (tout en conservant les volumes!) sont exactement les transformations orthogonales.

1.*c*. *Fonctions d'une variable réelle et réarrangements croissants*. — Si K est l'intervalle [0, 1] et φ une fonction intégrable sur K, ∇u dans la factorisation (1.4) n'est autre que le réarrangement croissant φ^c de φ, c'est-à-dire [5] l'unique fonction croissante telle que :

(1.10) $\text{mesure}(y\,;\ \varphi(y)<c)=\text{mesure}(y\,;\ \varphi^c(y)<c)$, pour tout réel c.

Sous l'hypothèse de non dégénérescence (1.3), g est alors explicitement donnée par

(1.11) $g(x)=\text{mesure}(y\,;\ \varphi(y)<\varphi(x)).$

1.*d*. *Lien avec l'équation de Monge-Ampère*. — La factorisation (1.4) est liée à l'équation de Monge-Ampère (voir [3]), de la même façon que la décomposition (1.7) l'est à l'équation de Laplace. En effet, associons à la fonction convexe u sa transformée de Legendre $v=u^*$. Raisonnons formellement en supposant u et v suffisamment régulières. ∇u et ∇v sont alors bijectives et réciproques l'une de l'autre [4]. A cause de la factorisation (1.4), ∇u et φ envoient K dans le même ensemble qu'on note K*. On a donc :

(1.12) $\varphi(K)=\nabla u(K)=K^* \quad \text{et} \quad \nabla v(K^*)=K.$

Ensuite, pour toute f dans C(K), on a la chaîne d'égalités :

$$\int_K f(\varphi(x))\,dx=\int_K f(\nabla u\circ g(x))\,dx \text{ [à cause de (1.4)]}=\int_K f(\nabla u(x))\,dx \text{ [d'après (1.2)]}$$

$$=\int_{K^*} f(y)\det(D^2 v(y))\,dy \text{ [changement de variable } y=\nabla u(x)\in K^*,\ x=\nabla v(y)\in K\text{]}.$$

De l'hypothèse de non dégénérescence (1.3) et du théorème de Lebesgue-Nikodym, on déduit l'existence d'une fonction $r(x)$ positive et intégrable sur K*, telle que

(1.13) $$\int_K f(\varphi(x))\,dx=\int_{K^*} f(y)\,r(y)\,dy.$$

Comme f est arbitraire, on voit que v est formellement solution du problème de Monge-Ampère :

(1.14) v est convexe et $\det(D^2 v(y))=r(y)$, presque partout sur K*,

combiné avec la seconde partie de (1.12) qui tient lieu de « condition aux limites ».

2. LE PROBLÈME DE MONGE-KANTOROVITCH. — La démonstration passe par l'étude de la projection L^2 sur l'ensemble S, qui n'est ni compact, ni convexe. Par contre S est fermé, ce qui assure l'existence d'une unique projection pour « presque toute donnée φ », d'après [2]. Nous allons cependant suivre une autre voie pour obtenir la décomposition (1.4), en nous ramenant à un problème de Monge-Kantorovitch [6] et en utilisant un argument de dualité. Pour cela, on introduit la classe P des mesures Boréliennes de probabilité p sur $K \times K$, doublement stochastiques, au sens suivant :

$$(2.1) \quad \int_{K \times K} f(x)\, p(dx, dy) = \int_{K \times K} f(y)\, p(dx, dy) = \int_K f(x)\, dx, \quad \text{pour toute } f \text{ dans } C(K).$$

Ces probabilités généralisent naturellement les transformations de S : à toute $g \in S$ on peut associer

$$(2.2) \qquad p_g(dx, dy) = \delta(y - g(x))\, dx$$

et on déduit aisément la propriété de double stochasticité pour p de la propriété de conservation des volumes (1.2). Le problème de projection sur S équivaut au problème:

$$(2.3) \qquad I = \inf\{ i(g), g \in S \} \qquad \text{où} \quad i(g) = (1/2) \int_K \| \varphi(x) - g(x) \|^2 dx.$$

On le remplace par le problème « relaxé » (cas particulier du problème de M.K. [6]) :

$$(2.4) \qquad J = \inf\{ j(p), p \in P \} \qquad \text{où} \quad j(p) = (1/2) \int_{K \times K} \| \varphi(x) - y \|^2 p(dx, dy).$$

Notons que j est bien définie puisque φ est bornée et borélienne (donc p-mesurable) et

$$(2.5) \qquad j(p_g) = i(g), \text{ pour tout } g \text{ dans S et, donc, } J \leqq I.$$

On verra plus loin qu'en fait $J = I$. Pour l'instant, en suivant une démonstration de Rachev [6], on établit le résultat d'existence et dualité pour le problème de M.K. :

PROPOSITION. — *Il existe une solution p du problème relaxé* (2.4), *et une paire de fonctions a, b, mesurables bornées sur* K, *telles que :*

$$(2.6) \quad j(p) = J = \int (a(x) + b(x))\, dx \quad \textit{et} \quad a(x) + b(y) \leqq 1/2 \| \varphi(x) - y \|^2 \quad \textit{pour tous } x, y \textit{ dans } K.$$

3. EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA DÉCOMPOSITION POLAIRE. — A partir des fonctions a et b, on peut construire une paire de fonctions convexes conjuguées u, v, lipschitziennes et dérivables presque partout sur un voisinage compact convexe B de $K \cup \varphi(K)$, telles que :

$$(3.1) \quad v(\varphi(x)) \leqq -a(x) + (1/2) \| \varphi(x) \|^2, \qquad u(y) \leqq -b(y) + (1/2) \| y \|^2, \quad x, y \in K.$$

Il suffit pour cela de poser :

$$(3.2) \quad u(y) = \sup(\varphi(x) . y + a(x) - (1/2) \| \varphi(x) \|^2 ; x \in K) \text{ si } y \in B \text{ et } +\infty \text{ sinon,}$$

et de définir v comme la transformée de Legendre de u. De la relation de dualité (2.6), on déduit alors pour toute solution p du problème de M.K. :

$$\int_K (u(x) + v(\varphi(x))\, dx + (1/2) \int_{K \times K} \| y - \varphi(x) \|^2 p(dx, dy) \leqq (1/2) \int_K (\| x \|^2 + \| \varphi(x) \|^2)\, dx.$$

D'où, en tenant compte de la double stochasticité de p :

$$\int_{K \times K} \{ u(y) + v(\varphi(x)) - y . \varphi(x) \}\, p(dx, dy) \leqq 0.$$

Comme u et v sont convexes conjuguées, l'intégrande est toujours positive ou nulle et

$$(3.3) \qquad u(y)+v(\varphi(x))-y.\varphi(x)=0, \quad \text{pour } p\text{-presque tout } (x, y) \text{ dans } \mathrm{K}\times\mathrm{K}.$$

En prenant bien soin des problèmes de négligeabilité [à l'aide de la double stochasticité de p et de la condition de non dégénérescence (1.3)], on en tire :

$$(3.4) \qquad y=\nabla v(\varphi(x)) \quad \text{et} \quad \varphi(x)=\nabla u(y), \text{ pour } p\text{-presque tout } (x, y) \text{ dans } \mathrm{K}\times\mathrm{K},$$

ce qui entraîne :

$$(3.5) \qquad p(dx, dy)=\delta(y-g(x))\,dx$$

où $g(x)=\nabla v(\varphi(x))$, et $\varphi(x)=\nabla u(g(x))$ presque partout sur K.

Ainsi toute solution p du problème relaxé est de la forme (3.5) et, de ce fait, forcément unique. A cause de la double stochasticité de p, g conserve la mesure de Lebesgue et appartient à S. A partir de ce résultat on déduit aisément que (i) la décomposition polaire de φ a lieu; (ii) g est solution du problème de projection (2.3) et $\mathrm{I}=\mathrm{J}$; (iii) il n'y a pas d'autre projection.

Pour terminer la démonstration du théorème, il reste à prouver que si la décomposition polaire a lieu, g est l'unique projection de φ. Supposons donc $\varphi=\nabla u\circ g$ où g appartient à S et u est convexe lipschitzienne. Par convexité, on obtient pour toute h dans S :

$$(3.6) \qquad u(h(x))\geqq u(g(x))+\nabla u(g(x)).(h(x)-g(x)), \text{ presque partout sur K}.$$

En intégrant sur K et en utilisant la conservation par g et h des volumes, on obtient que g est une projection de φ, en établissant après quelques calculs :

$$(3.7) \qquad \int \|g(x)-\varphi(x)\|^2\,dx \leqq \int \|h(x)-\varphi(x)\|^2\,dx.$$

L'auteur tient à exprimer sa reconnaissance à G. Strang pour lui avoir communiqué l'article [6].

Note reçue et acceptée le 19 octobre 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] V. I. ARNOLD et A. AVEZ, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique* (app. 6), Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[2] J.-P. AUBIN et I. EKELAND, *Applied Nonlinear Analysis* (proposition 14, chap. 5), John Wiley, 1984.

[3] S. Y. CHENG et S. T. YAU, On the regularity of the Monge Ampère equation, *C.P.A.M.*, 30, Paris, 1977, p. 41-68.

[4] I. EKELAND et R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels* (chap. I), Dunod, Paris, 1974.

[5] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. POLYA, *Inequalities* (chap. X), Cambridge University Press, 1952.

[6] S. T. RACHEV, The Monge-Kantorovitch mass transference problem, Theory of Probability and its Applications, XXIX, n° 4, 1985, p. 647-676.

I.N.R.I.A., Rocquencourt, 78153 *Le Chesnay Cedex.*