Metodyka nauczania RP, lato 2018 - zadania domowe, seria 3

Marcin Kotowski

14 maja 2019

Z poniższych zadań należy wybrać maksymalnie cztery i oddać pisemnie (osobiście lub mailem; bardzo preferowany LaTeX) do poniedziałku 3.06.2019 do początku wykładu. Każde oddane zadane jest warte maksymalnie 25 punktów, liczba punktów za serię jest sumą liczby punktów za poszczególne oddane zadania.

Zadanie 1. Rozpatrujemy błądzenie losowe na liczbach $\{1, \ldots, n\}$, gdzie w każdym kroku przechodzimy z równym prawdopodobieństwem do losowo wybranego sąsiada. Zaczynamy z punktu 1 i kończymy z chwilą trafienia do n. Oblicz średni czas oczekiwania na dojście do n oraz dla każdego punktu i średnią liczbę jego odwiedzin.

Zadanie 2. Rozpatrzmy graf na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ z krawędziami:

$$\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}$$

Startujemy błądzenie losowe w wierzchołku i. Oblicz oczekiwany czas powrotu do i. Czy pozwala to postawić hipotezę, jaka będzie odpowiedź dla dowolnego grafu?

Zadanie 3. Rozpatrzmy skończony łańcuch Markowa o zbiorze stanów V. Niech $W \subseteq V$ będzie zbiorem stanów, które nie są pochłaniające. Załóżmy, że $|W| = m, |V| > m > 0$. Niech Q będzie macierzą rozmiaru $m \times m$ o wyrazaćh $p_{xy}, x, y \in W$, gdzie p_{xy} oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu x do stanu y. Pokaż, że macierz $N = I_m - Q$ jest odwracalna, gdzie I_m jest macierzą identycznościową $m \times m$. Pokaż, że $(N^{-1})_{xy}$ jest równe średniej liczbie odwiedzin stanu y pod warunkiem, że zaczynamy ze stanu x.

Zadanie 4. Niech X_n oznacza błądzenie losowe na liczbach całkowitych określone przez $X_0 = 0$ oraz $\mathbb{P}(X_n = k + 1 \mid X_{n-1} = k) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = k - 1 \mid X_{n-1} = k)$ dla $n \geqslant 1$, gdzie $p \neq 1/2$. Pokaż, że $Y_n = |X_n|$ jest łańcuchem Markowa, to znaczy dla dowolnych $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}$ takich, że $\mathbb{P}(Y_{n-1} = i_{n-1}, Y_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, Y_1 = i_1) > 0$, mamy:

$$\mathbb{P}(Y_n = i_n \mid Y_{n-1} = i_{n-1}, Y_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, Y_1 = i_1) = \mathbb{P}(Y_n = i_n \mid Y_{n-1} = i_{n-1})$$

Wskazówka: prawdopodobieństwa $\mathbb{P}(X_n = i \mid Y_n = i)$ oraz $\mathbb{P}(X_n = -i \mid Y_n = i)$ wyrażają się prostymi wzorami.

Przypomnienie: rozpatrzmy skończony obwód elektryczny (spójny skończony graf) z wyróżnionymi wierzchołkami a i b, gdzie opory na krawędziach są równe 1. Jeśli przyłożymy do a potencjał v_a, a do b potencjał 0, to do wierzchołka a wpłynie prąd $i_a := \sum_{x \sim a} i(a, x)$. Wielkość $R_{eff}(a, b) := \frac{v_a}{i_a}$ nazywamy oporem zastępczym pomiędzy a i b.

Zadanie 5. Rozpatrzmy skończony obwód elektryczny z wyróżnionymi wierzchołkami a i b. Pokaż, że:

$$R_{eff}(a, b) = \frac{1}{d(a)p_{esc}}$$

gdzie $d(a)$ oznacza stopień wierzchołka a, a p_{esc} oznacza prawdopodobieństwo, że błądząc losowo po grafie jeśli startujemy z a, to trafimy do b przez ponownym odwiedzeniem a.

Zadanie 6. Rozpatrujemy obwód elektryczny jak w poprzednim zadaniu, o łącznej liczbie krawędzi m. Niech T_{xy} oznacza średni czas pierwszej wizyty w y, jeśli startujemy z x. Pokaż, że:

$$T_{xy} + T_{yx} = 2m \cdot R_{eff}(a, b)$$

Wskazówka: rozpatrz sytuację, gdzie do każdego wierzchołka x wprowadzamy prąd równy $d(x)$, a całkowity prąd (równy $\sum_x d(x) = 2m$) wyprowadzamy w wierzchołku y.