Analiza II.1*, zima 2019 - zadania domowe na 12 XI 2019, seria 5

Marcin Kotowski

8 listopada 2019

Zadanie 1. Pokazać dyfeomorfizm $F : \mathbb{R}^2 \to U$, gdzie $U = \{(u, v) : u > v > 0, uv < 1\}$. Należy wypisać F wzorem lub jako złożenie danych jawnie dyfeomorfizmów.

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^1. Przypuśćmy, że dla pewnego $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ mamy $f(p) = 0$ oraz $\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0, \frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0, \frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Na mocy TFU implikuje to, że lokalnie możemy dowolną ze zmiennych wyrazić przed dwie pozostałe – np. dla pewnego otoczenia U zawierającego (y_0, z_0) mamy $f(x(y, z), y, z) = 0$ dla pewnej funkcji $x : U \to \mathbb{R}$ klasy C^1. Analogicznie dla dwóch pozostałych zmiennych. Wykaż, że otrzymane w ten sposób funkcje x, y, z spełniają tożsamość:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

Morał z zadania: tego typu pochodnych cząstkowych nie można skracać.

Zadanie 3. Niech $S = \{x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 25, xy + uv = 0\}$ i $p_0 = (2, -2, 1, 4)$.

(a) Pokaż, że w pewnym otoczeniu punktu p_0 i $(x, y, u, v) \in S$ zmienne (u, v) są funkcjami klasy C^1 zmiennych (x, y) oraz zmienne (u, x) są funkcjami klasy C^1 zmiennych (y, v).

(b) W obu przypadkach oblicz pochodne $\frac{\partial u}{\partial y}$ w punkcie p_0. Wskazówka: wychodzą różne wyniki.

W powyższym zadaniu (i wielu innych zastosowaniach TFU) korzystamy z pewnego skrótu myślowego i notacyjnego. Formalnie tezę należałoby sformułować następująco. Niech $p_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0)$. Wtedy istnieje otoczenie U_1 zawierające (x_0, y_0) oraz funkcje $u_1, v_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ takie, że na U_1 mamy $h(x, y, u_1(x, y), v_1(x, y)) = 0$, gdzie h jest funkcją definiującą zbiór S. Analogicznie, istnieje otoczenie U_2 zawierające (y_0, v_0) oraz funkcje $u_2, x_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ takie, że na U_2 mamy $h(x_2(y, v), y, u_2(x, y), v) = 0$. W podpunkcie b) obliczamy więc kolejno $\frac{\partial u_1}{\partial y}(x_0, y_0)$ oraz $\frac{\partial u_2}{\partial y}(y_0, v_0)$.

Przypomnienie: funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞, jeśli jest klasy C^k dla dowolnego $k \geqslant 1$.

Zadanie 4. Pokaż, że każdy domknięty podzbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest postaci $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ dla pewnej funkcji $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Wskazówka: rozpatrz najpierw przypadek $A = \mathbb{R}^n \backslash B(0,1)$; przypomnij sobie z Analizy I funkcje gładkie o zwartym nośniku.

Zadanie 5. Niech $X = C^1([0,1]) \cap \{u : u(0) = u(1) = 0\}$ i $f(t) = e^{-t^2}$. Rozpatrujemy:

$$I(u) := \int_0^1 f(u'(x))dx$$

Pokaż, że $\inf_{u \in X} I(u) = 0$, ale infimum nie jest osiągane w żadnym punkcie.