Analiza I.1, zima 2018 - zadania domowe, seria 10

Marcin Kotowski

26 grudnia 2018

Zadania należy oddać na ćwiczeniach **8 stycznia 2019** (wyjątkowo we wtorek!) lub przysłać mailem na adres: marcin.kotowski1@gmail.com.

Zadanie 1. (pisemne) Dane są funkcje ciągłe $f_1, f_2, \dots, f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wykaż, że funkcja $g_1(x) := \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ jest ciągła. Wywnioskuj, że funkcje $g_2(x) := \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ i $g_3(x) := \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ również są ciągłe.

Zadanie 2. Przypuśćmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieciągła (tj. istnieje co najmniej jeden punkt $x \in \mathbb{R}$ taki, że f nie jest ciągła w x). Czy funkcja $f(x)^2$ również musi być nieciągła? A $f(x)^3$?

Zadanie 3. (pisemne) Znaleźć wszystkie pary liczb rzeczywistych a, b takie, że funkcja $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ zadana jako:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{e^{\sin x} - 1}{\ln(1+x)}, & \text{dla } x \in (-1, 0) \\ b, & \text{dla } x = 0 \\ \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1+2x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+2x}}, & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła.

Zadanie 4. (pisemne) Funkcja $f : [-1, 1] \to (0, 1]$ jest ciągła. Wykaż, że równanie $f(x) = x^4$ ma co najmniej dwa rozwiązania na przedziale $[-1, 1]$.

Zadanie 5. Wykazać, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która ma w każdym punkcie granicę równą $+\infty$.

Zadanie 6. Zadane jest ponumerowanie liczb wymiernych z odcinka jednostkowego, $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_1, q_2, \dots\}$. Określamy funkcję f jako:

$$f(x) := \sum_{n : q_n \leqslant x} \frac{1}{2^n}$$

(a) Uzasadnij, że f niemalejąca, $f(x) = 0$ dla $x < 0$ oraz $f(x) = 1$ dla $x \geqslant 1$.

(b) Pokaż, że f nie jest ciągła w żadnym punkcie $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, gdyż:

$$\lim_{y \to x^-} f(y) < \lim_{y \to x^+} f(y)$$

Ile wynosi różnica tych dwóch liczb?

(c) Wykazać, że f jest prawostronnie ciągła na $\mathbb{R}$.