```
GG[GD@Knot[4, 1], {1}, F]
```

Example: 4_1

$$F\left[\{Am_{1,2}\}, \begin{pmatrix} -\frac{-1+T_2-T_1\,T_2+T_3-T_1\,T_3-T_2\,T_3+T_1\,T_2\,T_3}{T_1\,T_3} & \frac{(-1+T_1)\,(1-T_2+T_1\,T_2)\,(-1+T_3)}{T_1\,T_3} & -\frac{(-1+T_1)\,(-1+T_2)}{T_1} \\ -\frac{(-1+T_2)\,(-1+T_3)}{T_1\,T_3} & \frac{-1+T_1+T_2-T_1\,T_2+T_3-T_2\,T_3+T_1\,T_2\,T_3}{T_1\,T_3} & -\frac{-1+T_2}{T_1} \\ \frac{T_2\,(-1+T_3)}{T_3} & -\frac{(-1+T_1)\,T_2\,(-1+T_3)}{T_3} & T_2 \end{pmatrix}\right] +$$

$$F\left[\{Am_{2,1}\}, \begin{pmatrix} \frac{1}{T_2} & \frac{-1+T_1}{-T_1-T_2+T_1\,T_2} & -\frac{(-1+T_1)\,(-1+T_2)^2}{T_2\,(-T_1-T_2+T_1\,T_2)} \\ \frac{-1+T_2}{T_2} & \frac{1-2\,T_1-T_2+T_1\,T_2}{-T_1-T_2+T_1\,T_2} & -\frac{(-1+T_2)\,(-1+T_1+T_2-2\,T_1\,T_2-T_2^2+T_1\,T_2^2)}{T_2\,(-T_1-T_2+T_1\,T_2)} \\ 0 & 0 & T_2 \end{pmatrix}\right] +$$

$$F\left[\{Ap_{1,2}\}, \begin{pmatrix} -\frac{1-2\,T_1-T_2+T_1\,T_2}{-1+T_1+T_2} & \frac{(-1+T_1)^2\,(-1+T_2)}{-1+T_1+T_2} & 0 \\ \frac{T_1\,(-1+T_2)}{-1+T_1+T_2} & -\frac{T_1\,(1-T_1-2\,T_2+T_1\,T_2)}{-1+T_1+T_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] + F\left[\{Ap_{1,2}\}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{(-1+T_1)\,(1-2\,T_2-T_3+T_2\,T_3)}{-1+T_2+T_3} & -\frac{(-1+T_1)\,(-1+T_2)}{-1+T_2+T_3} \\ 0 & -\frac{T_1\,(1-2\,T_2-T_3+T_2\,T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{T_1\,(-1+T_2)}{-1+T_2+T_3} \\ 0 & \frac{T_2\,(-1+T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{T_3}{-1+T_2+T_3} \end{pmatrix}\right]$$

The Alexander Functional

```
FA[{x_}, γ_] := Simplify[
  Switch[x, Ap__, 1, Am__, -1] *
    Switch[x, _1,2, γ2,2 γ3,3 - γ2,3 γ3,2 / (γ3,3 + γ1,3 γ3,2 - γ1,2 γ3,3),
      _2,1, γ1,3 γ3,2 - γ1,2 γ3,3 / (γ3,2 - γ2,3 γ3,2 + γ2,2 γ3,3)] /. T_ → T];
GGA[K_, bb___] := GG[GD@K, {1}, FA, bb];
```

Example: 4_1

```
Simplify@With[{K = Knot[4, 1]},
  {GGA[K], Alexander[K][T], T ∂T Log[Alexander[K][T]]}]
```

$$\left\{\frac{T\,(-3+2\,T)}{1-3\,T+T^2},\ 3-\frac{1}{T}-T,\ \frac{-1+T^2}{1-3\,T+T^2}\right\}$$

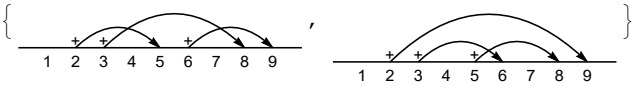
Testing for up to 7 crossings

```
Table[
 K → Simplify[GGA[K] - T ∂T Log[Alexander[K][T]]],
 {K, AllKnots@{3, 7}}]
```

$$\{3_1 \to -1,\ 4_1 \to 1,\ 5_1 \to -2,\ 5_2 \to -2,\ 6_1 \to 0,\ 6_2 \to 0,\ 6_3 \to 0,$$
$$7_1 \to -3,\ 7_2 \to -3,\ 7_3 \to 4,\ 7_4 \to 4,\ 7_5 \to -3,\ 7_6 \to -1,\ 7_7 \to 2\}$$

Invariance

```
Draw /@ {R3L = GD[Ap2,5, Ap3,8, Ap6,9],
  R3R = GD[Ap5,8, Ap2,9, Ap3,6]}
```




```
Simplify[
 GGA[R3L, {1, 4, 7, 10}] == GGA[R3R, {1, 4, 7, 10}] /.
  β10,b_ :→ 1 - β1,b - β4,b - β7,b]
```

```
True
```

```
GG[GD@Knot[4, 1], {1, 2}, F] /. F[y_List, γ_G] :→ F[Column@y, γ]
```

Example: Degree 2 Gauss-Gassner for 4_1

$$F\left[Am_{1,2}, \begin{pmatrix} -\frac{-1+T_2-T_1\,T_2+T_3-T_1\,T_3-T_2\,T_3+T_1\,T_2\,T_3}{T_1\,T_3} & \frac{(-1+T_1)\,(1-T_2+T_1\,T_2)\,(-1+T_3)}{T_1\,T_3} & -\frac{(-1+T_1)\,(-1+T_2)}{T_1} \\ -\frac{(-1+T_2)\,(-1+T_3)}{T_1\,T_3} & \frac{-1+T_1+T_2-T_1\,T_2+T_3-T_2\,T_3+T_1\,T_2\,T_3}{T_1\,T_3} & -\frac{-1+T_2}{T_1} \\ \frac{T_2\,(-1+T_3)}{T_3} & -\frac{(-1+T_1)\,T_2\,(-1+T_3)}{T_3} & T_2 \end{pmatrix}\right] +$$

$$F\left[Am_{2,1}, \begin{pmatrix} \frac{1}{T_2} & \frac{-1+T_1}{-T_1-T_2+T_1\,T_2} & -\frac{(-1+T_1)\,(-1+T_2)^2}{T_2\,(-T_1-T_2+T_1\,T_2)} \\ \frac{-1+T_2}{T_2} & \frac{1-2\,T_1-T_2+T_1\,T_2}{-T_1-T_2+T_1\,T_2} & -\frac{(-1+T_2)\,(-1+T_1+T_2-2\,T_1\,T_2-T_2^2+T_1\,T_2^2)}{T_2\,(-T_1-T_2+T_1\,T_2)} \\ 0 & 0 & T_2 \end{pmatrix}\right] + F\left[Ap_{1,2}, \begin{pmatrix} -\frac{1-2\,T_1-T_2+T_1\,T_2}{-1+T_1+T_2} & \frac{(-1+T_1)^2\,(-1+T_2)}{-1+T_1+T_2} & 0 \\ \frac{T_1\,(-1+T_2)}{-1+T_1+T_2} & -\frac{T_1\,(1-T_1-2\,T_2+T_1\,T_2)}{-1+T_1+T_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] +$$

$$F\left[Ap_{1,2}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{(-1+T_1)\,(1-2\,T_2-T_3+T_2\,T_3)}{-1+T_2+T_3} & -\frac{(-1+T_1)\,(-1+T_2)}{-1+T_2+T_3} \\ 0 & -\frac{T_1\,(1-2\,T_2-T_3+T_2\,T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{T_1\,(-1+T_2)}{-1+T_2+T_3} \\ 0 & \frac{T_2\,(-1+T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{T_3}{-1+T_2+T_3} \end{pmatrix}\right] + F\left[\begin{matrix} Am_{2,3} \\ Am_{4,1} \end{matrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{T_4} & 0 & -\frac{-1+T_1}{T_4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{T_1\,(-1+T_2)}{T_2} & 0 & -\frac{(-1+T_2)\,(-1+T_3)}{T_2} \\ 0 & 0 & \frac{T_1}{T_2} & 0 & -\frac{-1+T_3}{T_2} \\ \frac{-1+T_4}{T_4} & 0 & -\frac{(-1+T_1)\,(-1+T_4)}{T_4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix}\right] + F\left[\begin{matrix} Ap_{1,2} \\ Ap_{3,4} \end{matrix}, \begin{pmatrix} 1 & -\frac{-1+T_1}{T_4} & 0 & -\frac{(-1+T_1)\,(-1+T_2)}{T_2} & 0 \\ 0 & \frac{T_1}{T_4} & 0 & \frac{T_1\,(-1+T_2)}{T_2} & 0 \\ 0 & -\frac{(-1+T_3)\,(-1+T_4)}{T_4} & 1 & -\frac{-1+T_3}{T_2} & 0 \\ 0 & \frac{T_3\,(-1+T_4)}{T_4} & 0 & \frac{T_3}{T_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] +$$

$$F\left[\begin{matrix} Ap_{1,3} \\ Am_{2,4} \end{matrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-T_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{-1+T_4-T_2\,T_4+T_5-T_2\,T_5-T_4\,T_5+T_2\,T_4\,T_5}{T_2\,T_5} & 0 & \frac{-1+T_2}{T_2} & -\frac{(-1+T_2)\,(-1+T_4)}{T_2} \\ 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(-1+T_4)\,(-1+T_5)}{T_2\,T_5} & 0 & \frac{1}{T_2} & -\frac{-1+T_4}{T_2} \\ 0 & \frac{T_4\,(-1+T_5)}{T_5} & 0 & 0 & T_4 \end{pmatrix}\right] + F\left[\begin{matrix} Ap_{1,3} \\ Am_{4,2} \end{matrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-T_1 & -\frac{(-1+T_1)\,(-1+T_3)}{T_3} & \frac{(-1+T_1)\,(-1+T_3)\,(-1+T_4)}{T_3} \\ 0 & \frac{1}{T_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1 & \frac{T_1\,(-1+T_3)}{T_3} & -\frac{T_1\,(-1+T_3)\,(-1+T_4)}{T_3} \\ 0 & \frac{-1+T_4}{T_4} & 0 & \frac{1}{T_3} & -\frac{-1+T_4}{T_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_4 \end{pmatrix}\right] +$$

$$F\left[\begin{matrix} Ap_{2,4} \\ Am_{1,3} \end{matrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{T_4} & -\frac{-1+T_1}{T_4} & \frac{-1+T_1}{T_1} & 0 & 0 \\ -\frac{(-1+T_2)\,(-1+T_4)}{T_4} & \frac{-1+T_1+T_2-T_1\,T_2+T_4-T_2\,T_4+T_1\,T_2\,T_4}{T_4} & 0 & 1-T_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ \frac{T_2\,(-1+T_4)}{T_4} & -\frac{(-1+T_1)\,T_2\,(-1+T_4)}{T_4} & 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] + F\left[\begin{matrix} Ap_{2,4} \\ Am_{3,1} \end{matrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{T_3} & -\frac{-1+T_1}{T_3} & -\frac{(-1+T_1)\,(-1+T_2)}{T_2\,T_3} & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & \frac{T_1\,(-1+T_2)}{T_2} & 1-T_2 & 0 \\ \frac{-1+T_3}{T_3} & -\frac{(-1+T_1)\,(-1+T_3)}{T_3} & -\frac{-1+T_1+T_2-T_1\,T_2-T_1\,T_3-T_2\,T_3+T_1\,T_2\,T_3}{T_2\,T_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Video and more at http://www.math.toronto.edu/~drorbn/Talks/NCSU-1604/