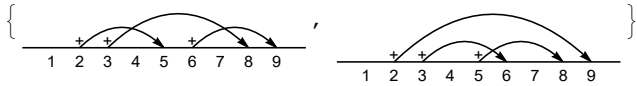


$$F\left[\{Am_{1,2}\}, \begin{pmatrix} \frac{-1+T_2-T_1 T_2+T_3-T_1 T_3-T_2 T_3+T_1 T_2 T_3}{T_1 T_3} & \frac{(-1+T_1)(1-T_2+T_1 T_2)(-1+T_3)}{T_1 T_3} & \frac{-(-1+T_1)(-1+T_2)}{T_1} \\ \frac{-(-1+T_2)(-1+T_3)}{T_1 T_3} & \frac{-1+T_1+T_2-T_1 T_2+T_3-T_2 T_3+T_1 T_2 T_3}{T_1 T_3} & \frac{-1+T_2}{T_1} \\ \frac{T_2(-1+T_3)}{T_3} & \frac{-(-1+T_1)T_2(-1+T_3)}{T_3} & T_2 \end{pmatrix}\right] +$$

$$F\left[\{Am_{2,1}\}, \begin{pmatrix} \frac{1}{T_2} & \frac{-1+T_1}{-T_1-T_2+T_1 T_2} & \frac{-(-1+T_1)(-1+T_2)^2}{T_2(-T_1-T_2+T_1 T_2)} \\ \frac{-1+T_2}{T_2} & \frac{1-2T_1-T_2+T_1 T_2}{-T_1-T_2+T_1 T_2} & \frac{-(-1+T_2)(-1+T_1+T_2-2T_1 T_2-T_2^2+T_1 T_2^2)}{T_2(-T_1-T_2+T_1 T_2)} \\ 0 & 0 & T_2 \end{pmatrix}\right] +$$

$$F\left[\{Ap_{1,2}\}, \begin{pmatrix} \frac{-1-2T_1-T_2+T_1 T_2}{-1+T_1+T_2} & \frac{(-1+T_1)^2(-1+T_2)}{-1+T_1+T_2} & 0 \\ \frac{T_1(-1+T_2)}{-1+T_1+T_2} & \frac{-T_1(1-T_1-2T_2+T_1 T_2)}{-1+T_1+T_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] + F\left[\{Ap_{1,2}\}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{(-1+T_1)(1-2T_2-T_3+T_2 T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{-(-1+T_1)(-1+T_2)}{-1+T_2+T_3} \\ 0 & \frac{-T_1(1-2T_2-T_3+T_2 T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{T_1(-1+T_2)}{-1+T_2+T_3} \\ 0 & \frac{T_2(-1+T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{T_3}{-1+T_2+T_3} \end{pmatrix}\right]$$

```
FA[{x_}, y_] := Simplify[
    The Alexander Functional
    Switch[x, Ap_, 1, Am_, -1] *
    Switch[x, _1, 2, y2,2 y3,3 - y2,3 y3,2,
        y3,3 + y1,3 y3,2 - y1,2 y3,3,
        _2,1, y1,3 y3,2 - y1,2 y3,3] /. T_ -> T];
GGA[K_, bb___] := GG[GD@K, {1}, FA, bb];
Draw /@ {R3L = GD[Ap2,5, Ap3,8, Ap6,9],
R3R = GD[Ap5,8, Ap2,9, Ap3,6]}
Invariance
```



```
Simplify@With[{K = Knot[4, 1]},
    Example: 41
    {GGA[K], Alexander[K][T], T @_T Log[Alexander[K][T]]}]
    Simplify[
    GGA[R3L, {1, 4, 7, 10}] == GGA[R3R, {1, 4, 7, 10}] /.
    beta10,b_ -> 1 - beta1,b - beta4,b - beta7,b]
    True
```

```
Table[
    Testing for up to 7 crossings
    K -> Simplify[GGA[K] - T @_T Log[Alexander[K][T]]],
    {K, AllKnots@{3, 7}}]
{31 -> -1, 41 -> 1, 51 -> -2, 52 -> -2, 61 -> 0, 62 -> 0, 63 -> 0,
71 -> -3, 72 -> -3, 73 -> 4, 74 -> 4, 75 -> -3, 76 -> -1, 77 -> 2}
```

GG[GD@Knot[4, 1], {1, 2}, F] /. F[y_List, y_G] -> F[Column@y, y]

Example: Degree 2 Gauss-Gassner for 4₁

$$F\left[\{Am_{1,2}\}, \begin{pmatrix} \frac{-1+T_2-T_1 T_2+T_3-T_1 T_3-T_2 T_3+T_1 T_2 T_3}{T_1 T_3} & \frac{(-1+T_1)(1-T_2+T_1 T_2)(-1+T_3)}{T_1 T_3} & \frac{-(-1+T_1)(-1+T_2)}{T_1} \\ \frac{-(-1+T_2)(-1+T_3)}{T_1 T_3} & \frac{-1+T_1+T_2-T_1 T_2+T_3-T_2 T_3+T_1 T_2 T_3}{T_1 T_3} & \frac{-1+T_2}{T_1} \\ \frac{T_2(-1+T_3)}{T_3} & \frac{-(-1+T_1)T_2(-1+T_3)}{T_3} & T_2 \end{pmatrix}\right] +$$

$$F\left[\{Am_{2,1}\}, \begin{pmatrix} \frac{1}{T_2} & \frac{-1+T_1}{-T_1-T_2+T_1 T_2} & \frac{-(-1+T_1)(-1+T_2)^2}{T_2(-T_1-T_2+T_1 T_2)} \\ \frac{-1+T_2}{T_2} & \frac{1-2T_1-T_2+T_1 T_2}{-T_1-T_2+T_1 T_2} & \frac{-(-1+T_2)(-1+T_1+T_2-2T_1 T_2-T_2^2+T_1 T_2^2)}{T_2(-T_1-T_2+T_1 T_2)} \\ 0 & 0 & T_2 \end{pmatrix}\right] + F\left[\{Ap_{1,2}\}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{(-1+T_1)(1-2T_2-T_3+T_2 T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{-(-1+T_1)(-1+T_2)}{-1+T_2+T_3} \\ 0 & \frac{-T_1(1-2T_2-T_3+T_2 T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{T_1(-1+T_2)}{-1+T_2+T_3} \\ 0 & \frac{T_2(-1+T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{T_3}{-1+T_2+T_3} \end{pmatrix}\right] +$$

$$F\left[\{Ap_{1,2}\}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{(-1+T_1)(1-2T_2-T_3+T_2 T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{-(-1+T_1)(-1+T_2)}{-1+T_2+T_3} \\ 0 & \frac{-T_1(1-2T_2-T_3+T_2 T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{T_1(-1+T_2)}{-1+T_2+T_3} \\ 0 & \frac{T_2(-1+T_3)}{-1+T_2+T_3} & \frac{T_3}{-1+T_2+T_3} \end{pmatrix}\right] + F\left[\{Am_{2,3}\}, \begin{pmatrix} \frac{1}{T_4} & 0 & \frac{-1+T_1}{-T_1-T_2+T_1 T_2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{T_1(-1+T_2)}{T_2} & 0 & \frac{-(-1+T_2)(-1+T_3)}{T_2} \\ 0 & 0 & \frac{T_1}{T_2} & 0 & \frac{-1+T_3}{T_2} \\ 0 & 0 & \frac{T_1}{T_2} & 0 & \frac{-1+T_3}{T_2} \\ \frac{-1+T_4}{T_4} & 0 & \frac{-(-1+T_1)(-1+T_4)}{T_4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix}\right] + F\left[\{Ap_{3,4}\}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+T_1}{T_4} & 0 & \frac{-(-1+T_1)(-1+T_2)}{T_2} & 0 \\ 0 & \frac{T_1}{T_4} & 0 & \frac{T_1(-1+T_2)}{T_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T_1}{T_4} & 1 & \frac{-1+T_3}{T_2} \\ 0 & \frac{T_3(-1+T_4)}{T_4} & 0 & \frac{-1+T_3}{T_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] +$$

$$F\left[\{Ap_{1,3}\}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-T_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+T_4-T_2 T_4+T_5-T_2 T_5-T_4 T_5+T_2 T_4 T_5}{T_2 T_5} & 0 & \frac{-1+T_2}{T_2} & \frac{-(-1+T_2)(-1+T_4)}{T_2} \\ 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(-1+T_4)(-1+T_5)}{T_2 T_5} & 0 & \frac{1}{T_2} & \frac{-1+T_4}{T_2} \\ 0 & \frac{T_4(-1+T_5)}{T_5} & 0 & 0 & T_4 \end{pmatrix}\right] + F\left[\{Am_{2,4}\}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-T_1 & \frac{-(-1+T_1)(-1+T_3)}{T_3} & \frac{-(-1+T_1)(-1+T_3)(-1+T_4)}{T_3} \\ 0 & \frac{1}{T_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1 & \frac{T_1(-1+T_3)}{T_3} & \frac{-T_1(-1+T_3)(-1+T_4)}{T_3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1+T_4}{T_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_4 \end{pmatrix}\right] +$$

$$F\left[\{Ap_{2,4}\}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+T_1}{T_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(-1+T_2)(-1+T_4)}{T_4} & \frac{-1+T_1+T_2-T_1 T_2+T_4-T_2 T_4+T_1 T_2 T_4}{T_4} & 0 & 1-T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ \frac{T_2(-1+T_4)}{T_4} & 0 & \frac{-(-1+T_1)T_2(-1+T_4)}{T_4} & 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] + F\left[\{Am_{3,1}\}, \begin{pmatrix} \frac{1}{T_3} & \frac{-1+T_1}{-T_1-T_2+T_1 T_2} & \frac{-(-1+T_1)(-1+T_2)}{T_2 T_3} & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & \frac{T_1(-1+T_2)}{T_2} & 1-T_2 & 0 \\ \frac{-1+T_3}{T_3} & \frac{-(-1+T_1)(-1+T_3)}{T_3} & \frac{-1+T_1+T_2-T_1 T_2-T_1 T_3-T_2 T_3+T_1 T_2 T_3}{T_2 T_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$