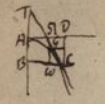
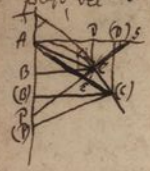


11. Novemb. 1673. Methodi tangentium inversae exempla.

Jam superest unum vel alterum pro specimen adjungam quo ostendam quomodo difficillimae quaestiones ad hanc Geometriae partem pertinentes vel adeo quod vix credibile methodi tangentium inversae exempla: Nimirum quaeratur



Curva C(C) in qua intervalla ordinatarum BC, ex punctis curvae PC, in axe AB(B) sumtis, sint ipsis ordinatis BC ad curvam PC, in axe AB(B) sumtis, sint ipsis ordinatis BC reciprocè proportionalia. Sit alia recta A(B) ad ipsam A B perpendicularis, in quam ducantur ordinatae CD ita ut ipsae AD ad ipsas ordinatas BC ejusdem curvae PC reciprocè sint proportionales, ita ut ipsae AD ipsis BC ordinatis ad axem AB(B) aequales sint. Quaeritur ipsius AB(B) relatio ad ipsas AD. Sit ipsa AB = x, ipsae BC = y, ipsae AD = z. Quaeritur relatio inter x et z. Ex natura curvae C(C) est $y \propto \frac{1}{x}$. Ex natura curvae P(P) est $z \propto \int y$. Ergo $z \propto \int \frac{1}{x}$. Ex natura curvae A(B) est $z \propto x$. Ergo $x \propto \int \frac{1}{x}$. Ergo $x \propto \log z$. Ergo $z \propto e^x$. Ergo curva A(B) est Logarithmica.

Ex hoc exemplo patet, quomodo ex data relatione inter ordinatas curvae et intervalla ordinatarum ab axe abscissa, invenienda sit relatio inter ordinatas curvae et abscissas axis. Quod ubi semel praestitum est, tangentes curvae inventae ex methodo tangentium directa facile ducuntur. Ita ex. gr. si curva quaedam ejusmodi inventa sit, cujus ordinatae sint ut cubi abscissarum, curva ipsa erit Parabola Cubica, cujus vertex A. Ducatur ergo ad eam tangens quaelibet BT. Quaeritur ratio BA ad AT. Sit BA = x, AT = t, BT = y. Ex natura curvae $x \propto y^3$. Ergo $t \propto \frac{y^3}{3y^2}$. Ergo $t \propto \frac{y}{3}$. Ergo $t \propto \frac{x}{3}$. Ergo AT = $\frac{1}{3}$ AB.

Videtur ergo an verum sit hoc Theorema sane memorabile: "In Parabola Cubica C(C) sunt intervalla perpendicularium BP ad curvam PC et ordinatarum BC ad axem in axe AB(B) sumtis ipsis ordinatis BC reciprocè proportionalia. Hoc calculo tangentium facile ostendetur. Aequatio Parabolae cubicae est $x c^2 \propto y^3$. Ponendo c latere recto, sive pro c^2 ponendo 3ba, fiet $c \propto \sqrt{3ba}$, fiet: $3xba \propto y^3$. Ergo ex methodo tangentium facilis est $t \propto \frac{3y^3}{3ba}$, ponendo BT = t. Intervalla inter tangentem et ordinatam in axe: jam BP = $\omega \propto \frac{y^2}{t}$. Ergo $\omega \propto \frac{y^2}{\frac{y^3}{ba}} \propto \frac{ba}{y}$. Sunt ergo ipsae ω ipsis y reciprocè proportionales quod desiderabatur.

Analyseos hujus artificium in eo fuit, quod ex ordinata abscissam facerem: cui cum Stereometria antea non veneratur in mentem, non est difficilis pateat retectu quaestio, si quaeratur curva in qua ipsae BT ipsa intervalla ordinatarum et perpendicularium sint ipsis AB abscissis reciprocè proportionales. Nempe $\omega \propto \frac{a^2}{x}$. Et vel $\int y \frac{a^2}{x}$: jam $\int \omega \propto \frac{y^2}{2}$. Ergo $y \propto \sqrt{2 \int \omega}$ Hinc $\int \omega$ non posse inveniri nisi ope curvae Logarithmicae. Ergo ut figurae quae satisfaciat est Logarithmica. Et in subduplicata ratione Logarithmorum ab ordinatis curvae sunt in subduplicata ratione Logarithmorum ad abscissas quae figurae et ex numero transcendentium. At relatio subtilior est quaesita, cum quaeritur ne ipsae AP sint ipsis BC ordinatis reciprocè proportionales. Nempe $x + \omega \propto \frac{a^2}{y}$ et $\int z \propto x$ sive $z \propto \frac{x}{a}$ sive fiet: $\frac{y^2}{2a} \propto \omega \frac{x}{a} \propto \frac{y^2}{2a} \frac{x}{2}$. Et fiet: $x + \frac{y^2 x}{2a \cdot 2} \propto \frac{a^2}{y}$ 1

ponendo ipsius x aliquem valorem, sit $\frac{x}{2} \propto z$ et fiet: $x + z y \propto \frac{a^2}{y}$ et $\int x \propto \int \frac{a^2}{y} - \frac{y^2}{2}$. Et $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \propto \int \frac{a^2}{y}$ sive $\sqrt{x^2+y^2} \propto \int \frac{a^2}{y}$ in qua curva ordinatae sunt ut abscissae ex vertice sive Jam

jam juncta AC, $A(C)$ fient $\sqcap \sqrt{x^2+y^2}$. Centro A, radio AC describatur arcus ACE, itemque cadat in rectam $AE(C)$, erunt ipsae $E(C)$ differentiae inter AC et $A(C)$, sive $EC \sqcap e \sqcap d\overline{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Ergo $e \sqcap \frac{2a^2}{y}$. Si ergo liceret y sumere arithmeticae progressionis habebimus quaesitum, videtur tamen nihil referre ipsas x progressionis arithmeticae sumsimus. Sumtis enim x progressionis Arithmeticae, sequitur ipsas AD sive y, esse ipsis EC sive e reciproce proportionales esse. Quod si autem sunt semel, erunt semper. Summa autem infinitarum reciproce proportionalium habetur quacunque sint progressione ex quibus reciproce proportionales sumuntur, neque enim hic rectangulorum illa ratio habetur, ubi aequaltitudine opus est, sed summa linearum omnium simpliciter $E(C)$ initur. Sed jam video difficultatem ipsam omnium e summas sive omnes $\frac{2a^2}{y}$ seu ipsas $A(C)$ non haberi, nisi sciatur cujus progressionis sint ipsae y. Quod hoc loco ignoratur. Quoniam ipsas x necesse est esse progressionis Arithmeticae non ipsas y. Si jam in aequatione superiore $x + \frac{y^2}{2a^2}\frac{x}{d} \sqcap \frac{a^2}{y}$ faciamus y. progressionis Arithmeticae, fiet: $x + \frac{y}{dx} \sqcap \frac{a^2}{y}$. et $xy + \frac{y^2}{dx} \sqcap a^2$. $\frac{y\,dx^2}{dx}$. ⊙

Nota idem est dx. et $\frac{x}{}$. id est differentia inter duas proximas.

Sed generaliter rectius assignando progressionem, fiet: $xy + \frac{[illegible]}{2} \sqcap a^2$. Ad inveniendum quicquam proficimus, considerandum ergo ex doctrina indivisibilium esse producta PCS. Dum ipsae AD occurrat in S. esse

summas omnium AP ad applicatas ad AB, aequalem summae omnium AS applicatarum ad AD. id est vocando DS, $\sqcap v$. fiet

$dy\int y \sqcap dx\int x + dx\int \omega$.

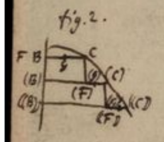
sive $dy\int y + dy\int v \sqcap dx\int \frac{a^2}{y}$. Ex hypothesi progressionis sumendo jam y. progressionis Arithmeticae, fiet. $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} \sqcap dx\,\text{Log}\,y$. At paulo ante eadem facta suppositione ipsarum y progressionis Arithmeticae fuit $xy + \frac{y^2}{dx} \sqcap a^2$ fiet:

$dx \sqcap \frac{y^2}{a^2-yx}$

$dx \sqcap \frac{[illegible]}{y^2}$ at [illegible] $dx \sqcap \frac{y^2+x^2}{2\,\text{Log}\,y}$. ergo tollendo denique aequationem $\frac{}{y^2+x^2}$, $a^2 - yx \sqcap 2y^2\,\text{Log}\,y$

in qua solae supersunt x. et y. extra vincula, nempe: $2\,\text{Log}\,y\,a^2 - 2\,\text{Log}\,y\,xy \sqcap y^4 + y^2x^2$ quae aequatio cum sit determinata locum dabit quaesitum. Et valde memorabilis est haec methodus cum enim non possit sit in nostra potestate tot aequationes habere quot incognitas, poterimus tamen saepe pluscula obtinere aequationes, et earum ope quosdam terminos elidere, ut hic dx. quae sola nobis obstabat singulae aequationes totam involvebant quaestionis naturam, nec tamen ex iis erui poterat solutio, quod media facta desint conjunctionum aequationum rem complendo dedit. Video idem aliter obtineri potuisse per momenta. Ubi in mentem venit consideratio nova non inelegans. In fig. 2. est $BC \sqcap y$. $FC \sqcap dy$

fig. 2.



sit punctum β medium ipsius FC. Patet momentum ipsius FC, esse rectangulum sub FC et $B\beta$, id est rectangulum BFC. nam cum sit $BFC + \beta FC$ posterius quippe prioris ratione infinite parvum negligi potest, adeoque erit $\int y\,dy \sqcap \frac{y^2}{2}$. sive momentum omnium differentiarum FC, aequalitur ultimi termini momento. et $y\,dy \sqcap d\frac{y^2}{2}$ et $y^2 dy \sqcap y\frac{dy^2}{2}$. Porro supra in aeq. ⊙ faciendo x arithmeticam:

$\int y \frac{dy^2}{2} \sqcap$ [illegible] fuit $y\,d\frac{y^2}{2} \sqcap a^2 - xy$ sive $d\frac{y^2}{2} \sqcap \frac{a^2-xy}{y}$ at idem $\sqcap y\,dy$. fiet ergo $y\,dy \sqcap \frac{a^2-xy}{y}$. et erit

$\int y\,dy \sqcap \int \frac{a^2}{y} - (\int x)\,\frac{x^2}{2}$. at jam invenimus esse $\int y\,dy \sqcap \frac{y^2}{2}$ fiet ergo $y^2 + x^2 \sqcap 2\int\frac{a^2}{y}$. ut ante, vel $dy^2 + x \sqcap \frac{2a^2}{y}$. ubi patet res notabilis in his aequationibus in quibus reperiuntur $\int$ et d. ubi jam una, vel hic x. pro arithmetice procedente sumta est, non posse ejus inveniri, nec dici nos habere valorem ipsius x, nempe $x \sqcap \frac{2a^2}{y} - dy^2$. quia dy^2 non potest intelligi nisi determinata progressionis natura, ipsius y. ipsius y. autem progressio et differentialis [illegible], debet ut sint x progressionis Arithmeticae, ergo ipse dy supponunt ipsas x, non ergo per ipsas inveniotur x. Caeterum hac arte multa poterunt praeclara haberi theoremata de curvis aliis intractabilibus, jungendo scilicet plures ejusmodi aequationes.

Ut in hujusmodi quaestionibus saepe difficillimis saepius speculationis utile erit aliam viam experiri, ut scilicet ipsae $A\beta$ sint ipsis AB reciproce proportionales. fiet: $x + \omega \sqcap \frac{a^2}{x}$. et $z\omega \sqcap d\overline{y^2}$. et $z \sqcap dx$. adeoque fiet:

$\omega \sqcap \frac{d\overline{y^2}}{z} \sqcap \frac{d\overline{y^2}}{dx}$. et denique $x + \frac{d\overline{y^2}}{dx} \sqcap \frac{a^2}{x}$. cujus jam non difficilis solutio ejusmodi ponendo x arithmeticas, fiet: $\int x + \frac{y^2}{2} \sqcap \int \frac{a^2}{x}$, sive fiet:

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \sqcap \text{Log}\,y$ sive $\sqrt{x^2+y^2} \sqcap AC \sqcap \sqrt{2\,\text{Log}\,AD}$ quae expressio satis curva satis est simplex. Reperiendum autem ipsas AB. progressionis arithmeticae. Contra si sint y progressionis arithmeticae fieret: $x + \frac{y}{dx} \sqcap \frac{a^2}{x}$. ~~Notandum dx [illegible] x~~ esse sed hinc non facile habebitur natura curvae.

Videamus an possit esse curva in qua ipsae AC ipsis BP aequales, fiet: $\sqrt{x^2+y^2} \sqcap \omega$. et $\omega \sqcap \frac{dy^2}{2dx}$ si x progressionis arithmeticae, fiet: ——

$(\int\sqrt{x^2+y^2} \sqcap)\int AC \sqcap y^2$ sed hoc non sufficit nisi ad curvam mechanice describendam, per puncta scilicet proxime accedentia. ut sit $x \sqcap 1$. [illegible] habetur (y) inde $y^4 - y^2 + \frac{1}{4} \sqcap 1 + \frac{1}{4}$ et $BC \sqcap (y)$ erit $\sqrt{1 + (y^2)} \sqcap (y^2)$ sive $1 + (y)^2 \sqcap (y)^4$.

sive $(y^2) \sqcap \frac{\sqrt{5}}{2}$. et $(y) \sqcap \frac{\sqrt{[illegible]5}}{\sqrt{2}}$. porro eadem $\overline{1 + (y)^2} + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}} \sqcap ((y^2))$ ita usque poterimus invenire $((y))$. Et hinc [illegible] AC et ita $A(C)$ [illegible] aliquod curvilineum quod eo similius, quo minor assumta est unitas x. esse progressionis Arithmeticae significat motum (utile describendum) [illegible] in arcu AB. esse uniformem. Descriptionis autem quae supponunt motus aliquem esse uniformem non satis puto in nostra potestate. Neque enim possumus producere motum uniformem, nisi ex uno in alium [illegible]. Videndum an $dx\,dy$. idem sit quod $d\overline{xy}$ et an $\frac{dx}{dy}$ idem quod $d\frac{x}{y}$ et videtur [illegible] sit $y \sqcap z^2 + bz$. [illegible] x fit [illegible] $cz + d$. fiet $dy \sqcap \overline{z^2} + 2\beta z + \beta^2 + bz + b\beta, -z^2 - bz$ at fiet $dy \sqcap 2z + b\beta - [illegible]$ modo $dx \sqcap + c\beta$. et ita [illegible] $dz\,dx \sqcap 2z + bc\beta^2$ At idem prodiret si statim fecisset $d\overline{xy}$. [illegible] dispendio fit, alterum in alterum [illegible] [illegible] [illegible] Sed jam cum eadem summa quaeritur [illegible] differentiis videndum est, $\int dx \sqcap x$ $\int dy \sqcap y$.

Error unde ortus

$\int [illegible] \sqcap xy$. Si jam sit aequatio $dx\,dy \sqcap x$. erit $\int dx\,dy \sqcap \int x$. Jam $\int x \sqcap \frac{x^2}{2}$. ergo $\int dx\,dy \sqcap \frac{x^2}{2}$. sive $xy \sqcap \frac{x^2}{2}$. sive $\frac{x}{2} \sqcap y$. quod satisfacit aequationi $dx\,dy \sqcap x$. nam [illegible] pro y ponendo ejus valorem fiet: $dx\,d\frac{x}{2} \sqcap x$. sive $d\frac{x^2}{2} \sqcap x$. quod verum esse patet. In summis haec non procedunt, nam $\int x \int y$ non est idem quod $\int xy$. ratio est, quod differentia est quantitas unica, at summa est quantitatum plurium aggregatum. Summae differentiarum est [illegible] terminus novissimus, [illegible] [illegible] summarum productorum, modum analyticum, certa ratione ex summis facilitatum, invenire Wallisius non demonstratione, sed felici inductione nititur progressus, et quae in eo genere fecit Wallisius magni ea forent momenti. Sint $\int z\,dy$ [illegible] Demonstrationem tamen ejus invenire. ponatur $\int zy \sqcap \omega$. Erit $zy \sqcap d\omega$, et $y \sqcap \frac{d\omega}{z}$

$\int zy$ [illegible] et $\int y \sqcap \int \frac{d\omega}{z}$. eodem modo $\int z \sqcap \int \frac{d\omega}{y}$. ponatur $\int y$ [illegible] $\sqcap v$. et $\int z$ [illegible] $\sqcap \psi$ fiet $dv \sqcap \frac{d\omega}{z}$ et $d\psi \sqcap \frac{d\omega}{y}$. et $\frac{dv}{d\psi} \sqcap \frac{z}{y}$. unde sequi videtur $d\frac{v}{\psi} \sqcap \frac{z}{y}$ adeoque $\frac{v}{\psi} \sqcap \int\frac{z}{y}$ hoc foret $\int\frac{z}{y} \sqcap \frac{\int z}{\int y}$. quod est absurdum. Unde sequitur $\int\frac{dv}{d\psi}$ non esse $\frac{v}{\psi}$. quid ergo erit? differentia ipsarum v, divisa per differentiam ipsarum ψ. summanda est. Nota: Quaelibet ergo differentiarum, adeoque et tota v, dividenda erit per singulas ipsius ψ. non in quam, quia singula tantum per singulas respondentes sibi dividuntur, non quaelibet per omnes. Ergo aliud est $\int\frac{dv}{d\psi}$ quam $\frac{\int dv \sqcap v}{\int d\psi \sqcap \psi}$. Si idem est etiam $\int d\frac{v}{\psi}$ erit $\sqcap \int\frac{dv}{d\psi}$ sive $\frac{v}{\psi} \sqcap \int\frac{dv}{d\psi} \sqcap \frac{\int dv}{\int d\psi}$ Ergo aliud erit $d\frac{v}{\psi}$ quam $\frac{dv}{d\psi}$? quod absurdum est. Eodem modo an $d\overline{v\psi} \sqcap dv\,d\psi$. Ergo $\int d\overline{v\psi}$ sive $v\psi \sqcap \int dv\,d\psi$. Ergo jam $v\psi \sqcap \int dv \int d\psi$. Ergo $\int dv\,d\psi \sqcap \int dv \int d\psi$. quod est absurdum. Ergo absurdum esse videtur $dv\,d\psi$. idem esse quod $d\overline{v\psi}$, itemque $\frac{dv}{d\psi} \sqcap d\frac{v}{\psi}$ quod tamen paulo ante asserueram. et quod videtur demonstratum. Difficilis nodus. Sed jam distinguendum video: si sit [illegible] v. et ψ et faciant $v\psi$ vel $\frac{v}{\psi}$ quantitatem aliquam viz. $\Omega \sqcap v\psi$ vel $\frac{v}{\psi}$, sintque valores tam ipsius v. quam ipsius ψ. rationales per unam quandam, v.g. abscissam x, expressi tunc calculus semper docebit eandem prodire differentiam, sive idem fore $d\Omega$ et $dv\,d\psi$ vel $\frac{dv}{d\psi}$

2

jam junctis AC, A(C) sunt $\sqcap \sqrt{x^2+y^2}$. Centro A, radio AC describatur arcus C E, itaque E cadet in rectam A E(C), eritque ipsa E(C) differentia inter AC et A(C), sive $EC \sqcap e \sqcap d\sqrt{x^2+y^2}$.

Ergo $e \sqcap \frac{2a^2}{y}$. Si ergo liceret y sumere arithmeticae progressionis, haberemus quaesitum, videtur tamen nihil referre ipsas x progressionis arithmeticae sumserimus. Sumtis enim x progressionis Arithmeticae, sequitur ipsas AD sive y, esse ipsis EC sive e reciproce proportionales esse. Quod si autem sunt semel, erunt semper. Summa autem infinitarum reciproce proportionalium habetur quacunque sint progressione ex quibus reciproce proportionales sumuntur, neque enim hic rectangulorum illa ratio habetur, ubi aequialtitudine opus est, sed summa linearum omnium simpliciter E(C) initur. Sed jam video difficultatem ipsam omnium e summas sive omnes $\frac{2a^2}{y}$ seu ipsas A(C) non haberi, nisi sciatur cujus progressionis sint ipsae y. Quod hoc loco ignoratur. Quoniam ipsas x necesse est esse progressionis Arithmeticae non ipsas y. Si jam in aequatione superiore $x + \frac{y^2}{2a^2}\frac{x}{d} \sqcap \frac{a^2}{y}$ faciamus y. progressionis Arithmeticae, fiet: $x + \frac{y\,dx}{dx} \sqcap \frac{a^2}{y}$. et $xy + \frac{y^2}{dx} \sqcap a^2$. $\frac{y\,dx^2}{dx}$. ⊙ [illegible] progressionem, fiet: $xy + [illegible] \sqcap a^2$.

Sed nondum quiescam in ista, considerandum ergo ex doctrina indivisibilium, esse producta P C S. Dum ipsi AD occurrat in S. esse omnes AP applicatas ad AB, aequales summae omnium AS applicatarum ad AD. id est [illegible] vocando DS, $\sqcap v$. fiet

$dy\int y \sqcap dx\int x + dx\int a$. sive $dy\int y + dy\int v \sqcap dx\int\frac{a^2}{y}$. ponendo jam y. progressionis Arithmeticae, fiet. $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} \sqcap dx\,\text{Log}\,y$. At paulo ante eadem facta suppositione ipsarum y progressionis Arithmeticae fuit $xy + \frac{y^2}{dx} \sqcap a^2$ fiet: $dx \sqcap \frac{[illegible]}{y^2}$ et [illegible] $dx \sqcap \frac{y^2+x^2}{2\,\text{Log}\,y}$. ergo tollendo denique aequationem $\frac{y^2+x^2}{y+x^2}$, $a^2 - yx \sqcap 2y^2\,\text{Log}\,y$

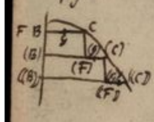
in qua sola supersunt x. et y. extra vincula, nempe: [illegible] quae aequatio cum sit determinata locum dabit quaesitum. Et valde memorabilis est hoc methodus cum enim non possit esse in nostra potestate tot aequationes habere quot incognitas, poterimus tamen saepe plusculas obtinere aequationes, et earum ope quosdam terminos elidere, ut hic dx. quae sola nobis obstabat. Singulae aequationes totam includebant quaestionis naturam, nec tamen ex iis erui poterat solutio, quod media facta dederunt ex ipsis conjunctis aequationum demonstrationem. Videor idem aliter obtinere potuisse per momenta. Ubi in mentem venit consideratio nova non inelegans. In fig. 2. est $BC \sqcap y$. $FC \sqcap dy$ sit punctum G medium ipsius FC. patet momentum ipsius FC, esse rectangulum sub FC et BG, id est rectangulum BFC. nam cum sit BFC + GFC posterius quippe prioris ratione infinite parvum negligi potest, adeoque erit $\int y\,dy \sqcap \frac{y^2}{2}$. sive momentum omnium differentiarum FC, aequalitur ultimi termini momento. et $y\,dy \sqcap d\frac{y^2}{2}$ et $y^2 dy \sqcap y\,d\frac{y^2}{2}$. Porro supra in aeq. ⊙ faciendo x arithmeticam fuit $y\,d\frac{y^2}{2} \sqcap a^2 - xy$ sive $d\frac{y^2}{2} \sqcap \frac{a^2-xy}{y}$ at idem $\sqcap y\,dy$. fiet ergo $y\,dy \sqcap \frac{a^2-xy}{y}$. et erit

$\int y\,dy \sqcap \int\frac{a^2}{y} - \int x\,\frac{x^2}{2}$. at jam invenimus esse $\int y\,dy \sqcap \frac{y^2}{2}$ fiet ergo $y^2 + x^2 \sqcap 2\int\frac{a^2}{y}$. ut ante, vel $dy^2 + x \sqcap \frac{2a^2}{y}$. ubi factis res notabilis in his aequationibus in quibus reperiuntur $\int$ et d. ubi jam una, vg. hic x. pro arithmetice procedente sumta est, non posse ejus inveniri, nec dici nobis habere valorem ipsius x, nempe $x \sqcap \frac{2a^2}{y} - dy^2$. quia dy^2 non potest intelligi nisi determinata progressionis natura, ipsius y. ipsius y. autem progressio ut differentialis sumi potest, debet ut sint x progressionis Arithmeticae, hoc ipse dy supponunt ipsas x, non ergo per ipsas inveniuntur x. Caeterum hac arte multa poterunt praeclara haberi theoremata de curvis aliis intractabilibus, jungendo scilicet plures ejusmodi aequationes.

omnes

$dx \sqcap \frac{y^2}{a^2 - yx}$

fig. 2.



Ut in hujusmodi quaestionibus saepe difficillimis fruar speculationes, utile erit adhuc unum experiri, ut scilicet ipsae Aβ sint ipsis AB reciproce proportionales. fiet: $x + \omega \sqcap \frac{a^2}{x}$ et $z\omega \sqcap d\,y^2$. et $z \sqcap dx$. adeoque fiet: $\omega \sqcap \frac{dy^2}{2z} \sqcap \frac{dy^2}{2\,dx}$. et denique $x + \frac{dy^2}{2\,dx} \sqcap \frac{a^2}{x}$. cujus jam non difficilis solutio est, nam ponendo x arithmeticas, fiet: $\int x + \frac{y^2}{2} \sqcap \int\frac{a^2}{x}$, sive fiet:

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \sqcap \text{Log}\,y$ sive $\sqrt{x^2+y^2} \sqcap AC \sqcap \sqrt{2\,\text{Log}\,AD}$ quae expressio satis curvae satis est simplex. Reperientur autem ipsae Aβ progressionis arithmeticae. Contra si sint y progressionis arithmeticae fieret: $x + \frac{y}{dx} \sqcap \frac{a^2}{x}$. esse sed hinc non facile habebitur natura curvae.

Videamus an possit esse curva in qua ipsae AC ipsis BP aequales, fiet: $\sqrt{x^2+y^2} \sqcap \omega$. et $\omega \sqcap \frac{dy^2}{2\,dx}$ si x progressionis arithmeticae, fiet: ———

$(\int\sqrt{x^2+y^2} \sqcap)\int AC \sqcap y^2$ sed hoc non sufficit nisi ad curvam mechanice describendam, per puncta scilicet proxime accedentia. ut fit $x \sqcap 1$. [illegible] $1 + (y)^2 \sqcap (y)^4$. unde habetur (y) nempe $y^4 - y^2 + \frac{1}{4} \sqcap 1 + \frac{1}{4}$ et $BC \sqcap (y)$ erit $\sqrt{1 + (y^2)} \sqcap (y^2)$ sive $(y^2) \sqcap \frac{\sqrt{5}}{2}$. et $(y) \sqcap \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$. porro eadem $+(y)^2 + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}} \sqcap ((y^2))$ ita inde poterunt inveniri (y). Et hinc est repertis tum AC et ita A(C) respectu polygonus aliquod curvilineo proximum et quidem quo major assumitur est minus X. esse progressionis Arithmeticae significat motum (ut describendam) sed in recta AB. esse uniformem. descriptionem autem quae supponunt motum aliquem esse uniformem non semper possumus in nostra potestate. Neque enim possumus producere motum uniformem, nisi genere interruptum. Videndum an $dx\,dy$ idem sit quod $d\,xy$ et an $\frac{dx}{dy}$ idem quod $d\frac{x}{y}$ et videtur ut fit $y \sqcap z^2 + bz$. erit ex x fit $cz + d$. fiet $dy \sqcap z^2 + 2\beta z + \beta^2 + bz + b\beta, -z^2 - bz$ et fiet $dy \sqcap 2z + b\beta$ - [illegible] modo $dx \sqcap + c\beta$. et ita [illegible] $dz\,dx \sqcap 2z + bc\beta^2$ At idem prodit si statim facias $d\,xy$ [illegible] dispendio sit, altero in alterum non influente [illegible] de diversis. Sed jam cum habeam summae [illegible] videndum est, $\int dx \sqcap x$. $\int dy \sqcap y$.

Error unde ansa

[illegible] $\sqcap xy$. Si jam sit aequatio $dx\,dy \sqcap x$. erit $\int dx\,dy \sqcap \int x$. Jam $\int x \sqcap \frac{x^2}{2}$. ergo $\int dx\,dy \sqcap \frac{x^2}{2}$. sive $xy \sqcap \frac{x^2}{2}$. sive $\frac{x}{2} \sqcap y$. quod satisfacit aequationi $dx\,dy \sqcap x$. nam pro y ponendo ejus valorem fiet: $dx\,d\frac{x}{2} \sqcap x$. sive $d\frac{x^2}{2} \sqcap x$. quod verum esse patet. In summis hoc non procedunt, nam $\int x \int y$ non est idem quod $\int xy$. ratio est, quod differentia est quantitas unica, at summa est quantitatum plurium aggregatum. Summae differentiarum est [illegible] terminus novissimus [illegible] et summis facillima, inveniendo summas productorum, nondum analytice, certa ratione sed felici inductione nituntur, et quae in eo genere fecit Wallisius non demonstratione [illegible] demonstrationem tamen [illegible] magis res foret momenti. Sint $\int z\,dy$ [illegible] $\int zy$ [illegible] ponatur $\int zy \sqcap \omega$. erit $zy \sqcap d\omega$, et $y \sqcap \frac{d\omega}{z}$ et $\int y \sqcap \int\frac{d\omega}{z}$. eodem modo $\int z \sqcap \int\frac{d\omega}{y}$. ponatur $\int y$ vocetur $\sqcap v$. et $\int z$ vocetur $\sqcap \psi$ fiet $dv \sqcap \frac{d\omega}{z}$ et $d\psi \sqcap \frac{d\omega}{y}$. et $\frac{dv}{d\psi} \sqcap \frac{z}{y}$. unde sequi videtur $d\frac{v}{\psi} \sqcap \frac{z}{y}$ adeoque $\frac{v}{\psi} \sqcap \int\frac{z}{y}$ hoc foret $\int\frac{z}{y} \sqcap \frac{\int z}{\int y}$. quod est absurdum. Unde sequitur $\int\frac{dv}{d\psi}$ non esse $\frac{v}{\psi}$. quod ergo erit? Nota differentia ipsarum v, divisa per differentiam ipsarum ψ. summanda est. prohibet ergo differentiarum, adeoque et tota v, dividendas esse per singulas ipsius ψ. non ergo quia singula tantum per singulas respondentes sibi dividuntur, non quaelibet per omnes. Ergo aliud est $\int\frac{dv}{d\psi}$ quam $\frac{\int dv}{\int d\psi}$ $\sqcap \frac{v}{\psi}$ si idem est etiam $\int d\frac{v}{\psi}$ erit $\int\frac{dv}{d\psi}$ sive $\frac{v}{\psi} \sqcap \int\frac{dv}{d\psi}$ et $\frac{\int dv}{\int d\psi}$ Ergo aliud erit $d\frac{v}{\psi}$ quam $\frac{dv}{d\psi}$? Eodem modo an $dv\psi \sqcap dv\,d\psi$. Ergo $\int dv\psi$ sive $v\psi \sqcap \int dv\,d\psi$. Ergo quod absurdum est. Ergo [illegible] jam $v\psi \sqcap \int dv \int d\psi$. Ergo $\int dv\,d\psi \sqcap \int dv \int d\psi$. quod est absurdum. Ergo absurdum esse videtur $dv\,d\psi$ idem esse quod $dv\psi$, itemque $\frac{dv}{d\psi} \sqcap d\frac{v}{\psi}$ quod tamen paulo ante asserueram. et quod videtur demonstrativum. Difficilis nodus. Sed jam distinguendum video: si sit [illegible] v. et ψ. et faciant vψ vel $\frac{v}{\psi}$ quantitatem aliquam vg. $\sqcap$ vψ vel $\frac{v}{\psi}$, sintque valores tam ipsius v. quam ipsius ψ. rationales per unam quandam, v.g. abscissam x. expressi tunc calculus semper docebit eandem prodire differentiam, sive idem fore [illegible] et $dv\,d\psi$ vel $\frac{dv}{d\psi}$

2

[illegible] x. Sed jam video ipsi nunquam procedere, nec per partes in [illegible] posse, nam v.g. sit $x^{\theta} + \beta$, $\frown x + \beta$ [illegible] $- x, x$, fiet $\beta = 2\beta x$. Quod longe aliud est quam $x + \beta, - x$ [illegible] $x + \beta, - x$. Quod dare β^2. Concludendum ergo aliud esse $d\,\overline{v\psi}$ quam $dv\,d\psi$, aliudque $\frac{dv}{d\psi}$ quam $\frac{dv}{d\psi}$.

primus gradus

sit $a + bx + cy \sqcap 0$. ordinando et accommodando ad tangentes, fiet: $bt \sqcap -cy$. et $t \sqcap \frac{-cy}{b}$. eodem modo: $\theta \sqcap \frac{-bx}{c}$. sit $\omega c \sqcap \omega$. [illegible] patet esse: $\frac{t}{y} \sqcap \frac{\beta}{\omega}$. et fiet: $\omega \sqcap \frac{-\beta b}{c}$. eodem modo $\beta \sqcap \frac{-\omega c}{b}$.

Secundus gradus: $a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fyx \sqcap 0$. ordinando ad tangentes, fiet: $bt + 2dxt + fyt \sqcap -cy - 2ey^2 - fyx$. adeoque $t \sqcap \frac{-cy - 2ey^2 - fyx}{b + 2dx + fy}$. unde facile patet semper t per y (et θ per x) dividi posse et quoniam $\omega \sqcap \frac{\beta y}{t}$. ideo fiet hic $\omega \sqcap \frac{\beta b + 2dx + fy}{-c - 2ey - fx}$. adeoque fiet: $y \sqcap \frac{-\omega c + fx}{f + 2e}$ [illegible] $\frac{-\beta b + 2dx}{f + 2e}$. at paulo ante $y \sqcap \frac{-a - bx - dx^2}{c + ey + fx}$

et fiet: $y \sqcap \frac{-\omega c + fx \frown -\beta b + 2dx \frown c + fx \,\text{[illegible]}\, + f + 2e \frown a + bx + dx^2}{\text{[illegible]} - \omega c + fx \frown -\beta b + 2dx \frown -e} \sqcap \frac{-\omega c + fx \frown -\beta b + 2dx}{f + 2e}$

~~Quem valorem [illegible] valore ipsius ω, habebimus aequationem in qua nulla y. quod ut fiat commodius, quaeramus [illegible] per partes in exiguis: $yx \sqcap$ [illegible] differentia erit $yt \sqcap$ [illegible] $\theta \sqcap -y$ [illegible] $y \sqcap \frac{a}{x}$. [illegible] $\omega \sqcap \frac{-\beta a}{x^2}$. [illegible] $\frac{-a\omega}{x^2}$~~ Et omnes figuras, quarum aequatio ex hac aequatione pro variis explicatione literarum constantium formari potest quadrari possunt. Illae item quae ipsi per methodos alias ostendi possunt ~~[illegible]~~ σύγνωτα.

11. Novembr. 1673. Methodi tangentium inversae exempla.

Jam superiore anno [illegible] pro [illegible] quaestionibus quae inter difficillimas totius Geometriae [illegible] potest vel ideo quod nihil conferunt methodi [illegible] vulgatae: Nimirum quaeritur curva $C(C)$ in qua intervalla ordinatarum BC, et perpendicularium ad curvam PC, in axe $AB(B)$ sumta, sint ipsis ordinatis BC reciproce proportionalia. Sit alia recta AD ad ipsam AB axem normalis, in quam ducantur ordinatae CD ita ut ipsae AD abscissae ex axe AD sint ipsis BC ordinatis ad axem $AB(B)$ aequales. Erunt ex CD ordinatae ad axem AD aequales ipsis AB abscissis ex axe $AB(B)$. Appellemus $AP \sqcap BC \sqcap y$. et $AB \sqcap DC \sqcap x$. ~~Constat ex alibi a me demonstratis~~ ipsam BP vocemus ω ~~Constat ex alibi a me demonstratis esse~~ ~~[illegible]~~ ~~$\omega \sqcap \frac{y^2}{2d}$~~ et ipsam $B(B)$ vocemus z. Constat ex alibi a me demonstratis: esse $\int \overline{\omega z} \sqcap \frac{y^2}{2}$. sive esse $\omega z \sqcap \frac{y^2}{2d}$. At ex quadratura triangulorum patet esse $\frac{y^2}{2d} \sqcap y$. Ergo $\omega z \sqcap y$ jam ex hypothesi est $\omega \sqcap \frac{b}{y}$. ita enim erunt ipsae ω ipsis y reciproce proportionales. Ergo fiet: $\frac{bz}{y} \sqcap y$. adeoque $z \sqcap \frac{y^2}{b}$. jam $\int z \sqcap x$. Ergo $x \sqcap \int \frac{y^2}{b}$. At $\int \frac{y^2}{b} \sqcap \frac{y^3}{3ba}$ ex quadratura Parabolae; ergo $x \sqcap \frac{y^3}{3ba}$. quae est aequatio explicans relationem inter ordinatas y et abscissas x, curvae quaesitae $C(C)$ inventam ergo habemus curvam quae est Analytica & uno verbo Parabola Cubica, cuius vertex A.

Videbimus ergo an verum sit hoc Theorema sane memorabile: „In Parabola Cubica $C(C)$ sunt BP intervalla perpendicularium „ad curvam PC et ordinatarum BC ad axem, in axe $AB\beta$ sumta „ipsis ordinatis BC reciproce proportionalia. Hoc calculo tangentium facile ostendet. Aequatio Parabolae Cubicae: $xc^2 \sqcap y^3$. ponendo c latere recto, sive pro c^2 ponendo $3ba$, sive $c \sqcap \sqrt{3ba}$, fiet: $3xba \sqcap y^3$. Ergo ex methodo tangentium Slusii erit $t \sqcap \frac{3y^3}{3ba}$. ponendo $BT \sqcap t$. intervallo inter tangentem & ordinatam in axe: jam $BP \sqcap \omega$ est $\sqcap \frac{y^2}{t}$. Ergo $\omega \sqcap \frac{y^2}{\frac{y^3}{ba}} \sqcap \frac{ba}{y}$. Sunt ergo ipsae ω ipsis y reciproce proportionales quod desiderabatur.

Analyseos huius artificium in eo fuit, quod ex ordinata abscissam fecimus; cuius stratagematis antea non venerat in mentem.

Non est difficilior quaestio, si quaeratur curva in qua ipsae BT intervalla ordinatarum et perpendicularium sint ipsis AB abscissis reciproce proportionales. Nempe $\omega \sqcap \frac{a^2}{x}$. et ~~[illegible]~~: jam $\int \omega \sqcap \frac{y^2}{2}$. ergo $y \sqcap \sqrt{2\int \omega}$ # jam $\int \omega$ non potest invenire nisi ope curvae logarithmicae. Ergo et figura quae satisfaciat est ~~logarithmica~~ se in ~~subduplicata~~ ratione logarithmorum ab [illegible] in qua ordinatae sunt in subduplicata ratione logarithmorum ab abscissis; quae figura est ex numero transcendentium. At revera difficilior est quaestio, cum quaeritur ut ipsae AP sint ipsis BC ordinatis ~~abscissis reciproce~~ reciproce proportionales. Nempe $x + \omega \sqcap \frac{a^2}{y}$ et $\omega z \sqcap \frac{y^2}{2d}$. et $\int z \sqcap x$ sive $z \sqcap \frac{x}{d}$ sive fiet: $\omega \frac{x}{d} \sqcap \frac{y^2}{2d}$. et $\omega \sqcap \frac{y^2}{2d} \cup \frac{x}{d}$. et fiet: $x + \frac{y^2}{2d} \cup \frac{x}{d} \sqcap \frac{a^2}{y}$ ponendo ipsas x arithmeticas, ut $\frac{x}{d} \sqcap z$ constans et fiet: $x + \frac{y^2}{2d} \sqcap \frac{a^2}{y}$ et $\int x \sqcap \int \sqrt{\frac{a^2}{y}} - \frac{y^2}{2}$. et $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \sqcap \int \sqrt{\frac{a^2}{y}}$ ~~[illegible]~~ sive $\sqrt{x^2 + y^2} \sqcap \frac{a^2}{y}$ ~~in qua momentum ordinatarum ex axe, et abscissarum ex vertice~~ ~~[illegible]~~ jam

vel $\sqrt{2\int \frac{a^2}{x}}$

1