

G.T. DE GÉOMÉTRIE : OPÉRATEURS DE DIRAC

RAPHAËL PONGE

13 DÉCEMBRE 95

Dans tout cet exposé on désigne par M une variété compacte riemannienne, et par \mathcal{E} un fibré vectoriel sur M .

1. Opérateurs de Dirac et modules de Clifford.

Définition 1 *On appelle opérateur différentiel sur \mathcal{E} d'ordre k un élément du sous espace vectoriel de $\text{End}(\Gamma(M, \mathcal{E}))$:*

$$\mathcal{D}^k = \Gamma(M, \text{End}(\mathcal{E})) \text{Vect}\{\nabla_{X_1} \cdots \nabla_{X_j} ; j \leq k \text{ et } X_i \in \Gamma(M, TM)\},$$

où $\Gamma(M, \text{End}(\mathcal{E}))$ agit par multiplication sur $\Gamma(M, \mathcal{E})$ et ∇ est une connexion sur \mathcal{E} .

Soit π la submersion canonique de T^*M sur M . On note $\pi^* \text{End}(\mathcal{E})$ le fibré vectoriel sur T^*M , image réciproque du fibré $\text{End}(\mathcal{E})$ par π .

Définition 2 *Soit $P \in \mathcal{D}^k$. On appelle symbole principal de P la section $\sigma_k(P) \in \Gamma(T^*M, \pi^* \text{End}(\mathcal{E}))$ définie par :*

$$\sigma_k(P)(x, \xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-k} e^{-itf(x)} P(e^{itf})(x),$$

où $x \in M$, $\xi \in T_x^*M$ et f est une fonction lisse sur M telle que $d_x f = \xi$.

La définition a bien un sens car si $P \in \mathcal{D}^k$, alors pour tout $x \in M$ et tout $f \in C^\infty(M)$, la fonction :

$$t \longmapsto e^{-itf(x)} P(e^{itf})(x),$$

est un polynôme de la variable réelle t , à valeurs dans $\text{End}(\mathcal{E}_x)$, de degré $\leq k$, et dont le coefficient dominant ne dépend que de $d_x f$.

On a les propriétés suivantes du symbole principal :

Proposition 1 *Soit $P \in \mathcal{D}^k$ et $Q \in \mathcal{D}^l$. Alors on a :*

$$\sigma_{k+l}(PQ) = \sigma_k(P)\sigma_l(Q),$$

$$\sigma_k(P)(df) = \frac{1}{i^k k!} (\text{ad}_f)^k(P) \quad \forall f \in C^\infty(M),$$

où pour tout $f \in C^\infty(M)$ on convient d'encore noter f l'opérateur de multiplication par f sur $\Gamma(M, \mathcal{E})$, et où on désigne par ad la représentation adjointe de $\text{End}(\Gamma(M, \mathcal{E}))$ (i.e. $\text{ad}_T = [\cdot, T] \quad \forall T$).

Exemple. Sur $\mathcal{E} = \bigwedge T^*M$ la différentielle extérieure d est un opérateur différentiel d'ordre 1 et son symbole principal est donné par :

$$\sigma_1(d)(\omega) = i\varepsilon(\omega) \quad \forall \omega \in T^*M,$$

où $\varepsilon(\omega)$ désigne l'opérateur de multiplication extérieure à gauche par la 1-forme ω .

Supposons maintenant que \mathcal{E} soit muni d'une métrique hermitienne. On définit alors un produit scalaire sur $\Gamma(M, \mathcal{E})$ en posant :

$$\langle s_1 | s_2 \rangle = \int_M \langle s_1(x) | s_2(x) \rangle_x |dx| \quad \forall (s_1, s_2) \in \Gamma(M, \mathcal{E})^2,$$

où $|dx|$ est la densité riemannienne de M .

Proposition 2 Si $P \in \mathcal{D}^k$, son adjoint P^* pour ce produit scalaire est un opérateur différentiel d'ordre k dont le symbole principal vérifie :

$$\sigma_k(P^*)(\omega) = \sigma_k(P)(\omega)^* \quad \forall \omega \in T^*M.$$

Exemple. Rappelons qu'on munit $\bigwedge T^*M$ d'une métrique hermitienne de la façon suivante : si e_1, \dots, e_n est une base orthonormée de T_x^*M on munit $\bigwedge T_x^*M$ du produit scalaire tel que les $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ ($i_1 < \dots < i_p$) forment une base orthonormée. On obtient alors un produit scalaire sur $\Gamma(M, \bigwedge T^*M)$ L'adjoint de d a pour symbole principal :

$$\sigma_1(d^*)(\omega) = -i.\iota(\omega) \quad \forall \omega \in T^*M,$$

où $\iota(\omega)$ est l'opérateur de contraction par la 1-forme ω .

Définition 3 On dit que $P \in \mathcal{D}^2$ est un laplacien généralisé, si et seulement si, on a :

$$\sigma_2(P)(x, \xi) = |\xi|^2 \text{id}_{\mathcal{E}_x} \quad \forall x \in M, \forall \xi \in T_x^*M.$$

Remarque. Si $P \in \mathcal{D}^2$ alors c'est un laplacien généralisé si, et seulement si, il s'écrit en coordonnées locales :

$$P = \sum_{i,j} g^{ij}(x) \partial_i \partial_j + \text{op. diff. d'ordre 1.}$$

On suppose désormais que \mathcal{E} est un super-fibré: $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$.

Définition 4 On dit que l'opérateur différentiel D d'ordre 1 impair :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^+ \\ D^- & 0 \end{pmatrix},$$

avec $D^\pm : \Gamma(M, \mathcal{E}^\mp) \rightarrow \Gamma(M, \mathcal{E}^\pm)$, est un opérateur de Dirac si, et seulement si, l'opérateur différentiel d'ordre 2 :

$$D^2 = \begin{pmatrix} D^- D^+ & 0 \\ 0 & D^+ D^- \end{pmatrix},$$

est un laplacien généralisé.

Exemple. Sur $\bigwedge T^*M = \bigwedge^{\text{ev}} T^*M \oplus \bigwedge^{\text{odd}} T^*M$, l'opérateur de Rham $d + d^*$ est un Dirac. Son carré $(d + d^*)^2 = dd^* + d^*d$ est appelé l'opérateur de Laplace-Beltrami.

On rappelle que le fibré en algèbre de Clifford de M est le fibré vectoriel $Cl(M)$ sur M dont la fibre en $x \in M$ est l'algèbre de Clifford $Cl(T_x^*)$.

Définition 5 On dit que \mathcal{E} est un module de Clifford s'il existe une action \mathbb{Z}_2 -graduée de $Cl(M)$ sur $\Gamma(M, \mathcal{E})$, laquelle est notée :

$$c : \Gamma(M, Cl(M)) \longrightarrow \text{End}(\Gamma(M, \mathcal{E})).$$

La proposition suivante établit qu'il y a une correspondance biunivoque entre actions de Clifford et symboles principaux d'opérateurs de Dirac.

Proposition 3 Supposons que \mathcal{E} soit un module de Clifford, alors tout opérateur différentiel D d'ordre 1, impair, tel que :

$$[D, f] = c(df) \quad \forall f \in C^\infty(M),$$

est un opérateur de Dirac sur \mathcal{E} .

Réciproquement, si D un opérateur de Dirac sur \mathcal{E} , alors il existe une action de Clifford c sur \mathcal{E} telle que :

$$c(df) = [D, f] \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Démonstration. Supposons que \mathcal{E} soit un module de Clifford et soit D un opérateur différentiel d'ordre 1, impair, tel que :

$$[D, f] = c(df) \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Soit $x \in M$ et $\xi \in T_x^*M$. Si $f \in C^\infty(M)$ est telle que $d_x f = \xi$, alors on a :

$$\sigma_2(D^2)(x, \xi) = (\sigma_1(D)(x, \xi))^2 = (\sigma_1(D)(df)(x))^2 \quad \text{et}$$

$$\sigma_1(D)(df) = -i.[D, f] = -i.c(df).$$

On en déduit que $\sigma_2(D)(x, \xi) = -(c(df)(x))^2 = -|\xi|^2$. Il en résulte que D^2 est un laplacien généralisé et que D est un opérateur de Dirac.

Réciproquement, soit D un opérateur de Dirac sur \mathcal{E} . Pour tout $f \in C^\infty(M)$ on pose :

$$c(df) = [D, f].$$

La définition a bien un sens, car D étant un opérateur différentiel d'ordre 1, si $f \in C^\infty(M)$, alors pour tout $x \in M$ l'endomorphisme de \mathcal{E}_x :

$$[D, f](x) = i.\sigma_1(D)(df)(x) = i.\sigma_1(D)(x, d_x f),$$

ne dépend que de $d_x f$. Cette remarque permet de plus de prolonger c à T^*M tout entier en posant pour tout $x \in M$ et tout $\xi \in T_x^*M$:

$$c(x, \xi) = c(df)(x) = [D, f](x) = i.\sigma_1(D)(x, \xi),$$

où f est une fonction lisse sur M telle que $d_x f = \xi$. On voit qu'en outre, pour $x \in M$ fixé, l'application $\xi \mapsto c(x, \xi)$ est une application linéaire de T_x^*M dans $\text{End}(\mathcal{E}_x)$ vérifiant :

$$c(x, \xi)^2 = -\sigma_1(D)(x, \xi)^2 = -\sigma_2(D)(x, \xi) = -|\xi|^2, \quad \forall \xi \in T_x^*M.$$

Elle se prolonge par conséquent en un morphisme d'algèbres de $Cl(T_x^*M)$ dans $\text{End}(\mathcal{E}_x)$. On obtient ainsi une action de Clifford sur \mathcal{E} . \square

Exemple. Le fibré $\bigwedge T^*M$ est un module de Clifford pour l'action :

$$c(\alpha) = \varepsilon(\alpha) - \iota(\alpha) \quad \forall \alpha \in T^*M.$$

Cette action provient de l'opérateur de Rham car pour tout $f \in C^\infty(M)$ on a :

$$[d + d^*, f] = i(\sigma_1(d)(df) - \sigma_1(d^*)(df)) = \varepsilon(df) - \iota(df).$$

2. Formule de Mac Kean-Singer.

Soit D un opérateur de Dirac sur \mathcal{E} . On suppose que le super-fibré $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ est muni d'une métrique hermitienne, pour laquelle \mathcal{E}^+ et \mathcal{E}^- sont orthogonaux, et telle que l'opérateur D soit *auto-adjoint* pour le produit scalaire induit par cette métrique.

L'opérateur D^2 est alors elliptique et auto-adjoint. Il existe par conséquent une base orthonormée $(e_m^\pm)_{m \geq 0}$ de $L^2(M, \mathcal{E}^\pm)$ formée de fonctions propres de D^2 :

$$D^2 e_m^\pm = \lambda_m^\pm e_m^\pm \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

L'opérateur de Green associé à D^2 , qui est nul sur $\ker D^2$, et qui est l'inverse de D^2 sur $\text{im } D^2$ est alors donné par :

$$G = \sum_{\lambda_m^\pm > 0} \frac{1}{\lambda_m^\pm} |e_m^\pm\rangle \langle e_m^\pm|$$

Le comportement des valeurs propres en l'infini est donné par l'asymptotique de Weyl :

$$\lambda_m^\pm \sim \alpha \cdot m^{\frac{2}{\dim M}} \quad \text{lorsque } m \rightarrow \infty.$$

Au moyen des fonctions propres on caractérise les éléments de $\Gamma(M, \mathcal{E})$ parmi ceux de $L^2(M, \mathcal{E}^\pm)$:

$$(s^\pm = \sum s_m^\pm e_m^\pm \text{ section } C^\infty) \Leftrightarrow ((s_m^\pm)_{m \geq 0} \text{ est à décroissance rapide}).$$

En particulier $\ker D^2$ est de dimension finie. Comme D est auto-adjoint et que $\ker D = \ker D^*D = \ker D^2$, le super-espace $\ker D = \ker D^+ \oplus \ker D^-$ est aussi de dimension finie. Ceci nous amène la définition de l'indice de D .

Définition 6 On appelle indice de D l'entier défini par :

$$\text{ind } D = \dim \ker D^+ - \dim \ker D^- = \dim \ker D^+ - \dim \text{coker } D^+.$$

Exemple. Soit $d + d^*$ l'opérateur de Rham sur $\bigwedge T^*M$ et Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami. Le théorème de Hodge-Rham affirme que la cohomologie de Rham $H^*(M)$ est isomorphe à l'espace (gradué) des formes différentielles harmoniques sur M , c.a.d. à l'espace vectoriel $\ker \Delta = \ker d + d^*$. En particulier les espaces de cohomologies $H^k(M)$ sont de dimensions finies et $\text{ind } d + d^*$ est égal à la caractéristique d'Euler de M :

$$\chi(M) = \sum_k (-1)^k \dim H^k(M).$$

Définition 7 On appelle semi-groupe engendré par D^2 , l'application de \mathbb{R}_+ vers les opérateurs bornés de $L^2(M, \mathcal{E})$:

$$t \mapsto e^{-tD^2},$$

où :

$$e^{-tD^2} = \sum_{m, \pm} e^{-t\lambda_m^\pm} |e_m^\pm\rangle \langle e_m^\pm| \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Définition 8 On appelle noyau de la chaleur de D^2 , le noyau $K_t(x, y) \in \text{Hom}(\mathcal{E}_y, \mathcal{E}_x)$ de e^{-tD^2} donné par :

$$K_t(x, y) = \sum_{m, \pm} e^{-t\lambda_m^\pm} e_m^\pm(x) \otimes e_m^\pm(y)^* \quad \forall (x, y) \in M^2,$$

de telle sorte que :

$$(e^{-tD^2} s)(x) = \int_M K_t(x, y) \cdot s(y) |dy| \quad \forall s \in L^2(M, \mathcal{E}).$$

La formule de Mac Kean-Singer relie l'indice de D à une intégrale de $K_t(x, x)$; elle est à la base de la démonstration du théorème de l'indice par l'équation de la chaleur.

Théorème 1 (Mac Kean-Singer) . Pour tout $t > 0$, on a :

$$\text{ind } D = \text{Str}(e^{-tD^2}) = \int_M \text{Str}(K_t(x, x)) |dx|.$$

Démonstration. L'opérateur e^{-tD^2} est un opérateur pair du super-espace $L^2(M, \mathcal{E}) = L^2(M, \mathcal{E}^+) \oplus L^2(M, \mathcal{E}^-)$:

$$e^{-tD^2} = \begin{pmatrix} e^{-tD^-D^+} & 0 \\ 0 & e^{-tD^+D^-} \end{pmatrix},$$

où $e^{-tD^\mp D^\pm}$ est l'opérateur de $L^2(M, \mathcal{E}^\pm)$ de noyau L^2 donné par :

$$K_t^\pm(x, y) = \sum_m e^{-t\lambda_m^\pm} e_m^\pm(x) \otimes e_m^\pm(y)^* \in \text{Hom}(\mathcal{E}_y^\pm, \mathcal{E}_x^\pm) \quad \forall (x, y) \in M^2.$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \text{Str}(e^{-tD^2}) &= \text{Tr}(e^{-tD^-D^+}) - \text{Tr}(e^{-tD^+D^-}), \\ &= \int_M \text{Tr}(K_t^+(x, x)) |dx| - \int_M \text{Tr}(K_t^-(x, x)) |dx|, \\ &= \int_M \text{Str}(K_t(x, x)) |dx|. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\text{Str}(e^{-tD^2}) = \sum_{\lambda \geq 0} (n_\lambda^+ - n_\lambda^-) e^{-t\lambda} \quad \forall t > 0,$$

où pour tout $\lambda \geq 0$ on a posé :

$$n_\lambda^\pm = \dim \mathcal{H}_\lambda^\pm \quad \text{avec } \mathcal{H}_\lambda^\pm = \ker(D^2 - \lambda) \cap L^2(M, \mathcal{E}^\pm).$$

Or pour tout $\lambda > 0$ l'opérateur D induit un isomorphisme de \mathcal{H}_λ^+ sur \mathcal{H}_λ^- , donc $n_\lambda^+ = n_\lambda^-$. Il en résulte que $\text{Str}(e^{-tD^2}) = n_0^+ - n_0^- = \text{ind } D$.

Corollaire 1 Si $(D_v)_{v \in \mathbb{R}}$ est une famille lisse à un paramètre d'opérateurs de Dirac auto-adjoints, alors $\text{ind } D_v$ ne dépend pas de v .

Démonstration. Par Mac Kean-Singer $\text{ind } D_v = \text{Str}(e^{-tD_v^2})$. Mais la formule de Duhamel montre que :

$$\frac{d}{dv} \text{Str}(e^{-tD_v^2}) = -t \text{Str}\left(\frac{\partial D_v^2}{\partial v} e^{-tD_v^2}\right) = -t \text{Str}([D_v, \frac{\partial D_v^2}{\partial v} e^{-tD_v^2}]) = 0;$$

où $[\cdot, \cdot]$ est le super-commutateur sur les opérateurs de $L^2(M, \mathcal{E})$. \square

Remarque. On montre que e^{-tD^2} est un opérateur régularisant, c.a.d. qu'il s'étend en un opérateur continu de $\mathcal{D}'(M)$ dans $C^\infty(M)$. Il en résulte que K_t est un noyau C^∞ . De plus comme $K_t(x, y)$ vérifie une équation de la chaleur, c'est en fait une fonction lisse des 3 variables x, y et t .

3. Connexions de Clifford.

On suppose que \mathcal{E} est un module de Clifford.

Définition 9 Soit ∇ une connexion sur \mathcal{E} . On dit que ∇ est une connexion de Clifford si pour tout $a \in \Gamma(M, Cl(M))$ et tout $X \in \Gamma(M, TM)$ on a :

$$[\nabla_X, c(a)] = c(\nabla_X^{LC} a),$$

où ∇_X^{LC} est la connexion de Levi-Civita étendue au fibré $Cl(M)$.

Si ∇ est une connexion de Clifford on lui associe un opérateur de Dirac D_∇ au moyen des compositions :

$$\Gamma(M, \mathcal{E}) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(M, T^*M \otimes \mathcal{E}) \xrightarrow{c} \Gamma(M, \mathcal{E}),$$

où T^*M agit sur \mathcal{E} via $c : a \otimes s \rightarrow c(a)s$. Comme en coordonnées locales on a :

$$\nabla = \sum dx^i \otimes \nabla_{\partial_i},$$

on voit que :

$$D_\nabla = \sum c(dx^i) \nabla_{\partial_i}$$

Par conséquent pour tout $f \in C^\infty(M)$ on a :

$$[D, f] = \sum c(dx^i) [\nabla_{\partial_i}, f] = \sum c(dx^i) \partial_i f = c(df).$$

ce qui grâce à proposition 3 montre que D_∇ est bien un opérateur de Dirac.

Exemples. 1. La connexion de Levi-Civita sur $\wedge T^*M$ est de Clifford et l'opérateur de Dirac associé est l'opérateur de Rham $d + d^*$.

2. Supposons que M soit une variété spinorielle ($\dim M = 2p$): cela signifie qu'il existe un fibré $\text{Spin}(n)$ principal $\text{Spin } M$ tel que :

$$SO(M) \simeq \text{Spin } M \times_{\text{Spin}(n)} SO_n .$$

On a alors :

$$Cl(M) = \text{Spin } M \times_{\text{Spin}(n)} Cl(\mathbb{R}^n).$$

Le fibré spineurs sur M :

$$\mathcal{S} = \text{Spin } M \times_{\text{Spin}(n)} \mathcal{S},$$

est alors un module de Clifford et la connexion de Levi-Civita sur \mathcal{S} est de Clifford. L'opérateur de Dirac qui lui est associé est souvent appelé l'opérateur de Dirac sur M .

Remarques. 1. Si M est spinorielle, tout module de Clifford \mathcal{E} sur M est de la forme twistée : \mathcal{E} est isomorphe en tant que $Cl(M)$ -module à un fibré de la forme $\mathcal{W} \otimes \mathcal{S}$, où \mathcal{W} est un fibré auxiliaire (on prend $\mathcal{W} = \text{End}_{Cl(M)}(\mathcal{S}, \mathcal{E})$, l'isomorphisme étant donné par l'application $w \otimes s \mapsto w(s)$).

2. Supposons que \mathcal{E} soit muni d'une métrique hermitienne et soit ∇ une connexion de Clifford sur \mathcal{E} . On montre que ∇ est unitaire, au sens qu'on a l'égalité entre 1-formes :

$$d\langle s_1 | s_2 \rangle = \langle \nabla s_1 | s_2 \rangle + \langle s_1 | \nabla s_2 \rangle \quad \forall (s_1, s_2) \in \Gamma(M, \mathcal{E})^2,$$

si et seulement si, l'opérateur de Dirac associé à ∇ est auto-adjoint.

3. On définit de même les super-connexions de Clifford. Si \mathbb{A} est une super-connexion de Clifford, on lui associe un opérateur de Dirac $D_{\mathbb{A}}$ grâce aux compositions :

$$\Gamma(M, \mathcal{E}) \xrightarrow{\mathbb{A}} \Gamma(M, \bigwedge T^*M \otimes \mathcal{E}) \xrightarrow{\mathbf{c} \otimes 1} \Gamma(M, Cl(M) \otimes \mathcal{E}) \xrightarrow{\mathbf{c}} \Gamma(M, \mathcal{E}),$$

où \mathbf{c} est l'application de quantification de $\bigwedge T^*M$ sur $Cl(M)$ définie par :

$$\mathbf{c}(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p) = \alpha_1 \dots \alpha_p \quad \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in (T^*M)^p.$$

On établit que cela définit une correspondance biunivoque entre opérateurs de Dirac et super-connexions de Clifford. Ainsi, tous les opérateurs de Dirac sur \mathcal{E} ne viennent pas forcément d'une connexion de Clifford. Néanmoins ceux pour qui c'est le cas sont seulement ceux pour lesquels on possède des "théorèmes géométriques".

Références

- [BGV] N. Berline, E. Getzler et M. Vergne. *Heat Kernel and Dirac Operators*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 298, Springer Verlag, 1992.
- [LM] B. Lawson et M.L. Michelson. *Spin Geometry*. Princeton Mathematical Series 38, Princeton University Press, 1989.