УДК 517.98

Теорема Понтрягина и анализ спектральной устойчивости солитонов.

Т.Я. Азизов [*], М.В. Чугунова [†]

1 Введение

Рассмотрим гамильтонову систему заданную уравнением:

$$\frac{du}{dt} = JE'(u(t)), \qquad u(t) \in \mathcal{X} \tag{1}$$

где $E : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \quad E \in C^2$ — функционал, определенный на некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{X}$ и $J : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \quad J = -J^* = -J^{-1}$. Критическая точка уравнения (1) — это такая точка $\varphi \in \mathcal{X}$, в которой $E'(\varphi) = 0$. В том случае, когда φ является локализованным (экспоненциально убывающим на бесконечности) решением, оно называется солитоном.

Солитонные решения были найдены для многих нелинейных эволюционных уравнений, в которых дисперсионное поведение задано дифференциальным оператором, в то время как нелинейный потенциал описывается с помощью быстро убывающей функции. Наиболее известными примерами нелинейных эволюционных уравнений с одно-пульсными солитонными решениями являются нелинейное уравнение Шредингера, нелинейное волновое уравнение Клейна-Гордона, а также иерархия уравнений Кортевьега-де-Фриза с различными его модификациями [10, 4]. Например, уравнение Кортевьега-де-Фриза пятого порядка обладает не только одно-пульсными солитонными решениями, но также и N-пульсными

[*]Работа Т.Я. Азизова поддержана грантом РФФИ 05-01-00203-а
[†]Работа М.В. Чугуновой поддержана стипендией NSERC

[16, 17]. Исследование устойчивости локализованных N-пульсных решений, как численно, так и аналитически, является одним из новых направлений в теории динамических систем [19, 12].
Устойчивость критической точки уравнения (1), или, другими словами, устойчивость решения φ, можно исследовать, линеаризуя гамильтонову систему в окрестности φ :

$$\frac{dv}{dt} = JE''(\varphi)v + O(||v||^2) \tag{2}$$

и анализируя спектр оператора JE'' [8, 9, 3]. В том случае, когда оператор JE'' допускает блочное представление вида

$$JE'' = \left[\begin{array}{cc} 0 & L_- \\ -L_+ & 0 \end{array} \right],$$

задача на собственные значения оператора JE'' записывается системой

$$L_+u = -\lambda w, \qquad L_-w = \lambda u. \tag{3}$$

В статье [7] М. Гриллякис, исходя из модельных примеров таких, как нелинейное уравнение Шредингера и уравнение Клейна–Гордона, сводит задачу устойчивости солитонов к изучению линейного операторного пучка вида $R - zS$. При этом предполагается, R и S — самосопряженные операторы такие, что их ядра тривиальны: $\ker R = \ker S = \{0\}$, $R = H + W$, $S^{-1} = H + V$, где H — самосопряженный равномерно положительный оператор, а операторы V и W являются H-компактными, т.е. $H^{-1}V$ и $H^{-1}W$ — компактные операторы. Одним из главных признаков неустойчивости солитонов является наличие у рассматриваемого пучка отрицательных собственных значений.
В [11] показано, что при различии количества отрицательных собственных значений операторов R и S линейный пучок имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение.
В то же время в [6] доказан более точный результат, а именно, если $|N(R) - N(S)| = n > 0$, то у линейного пучка есть не меньше чем n отрицательных собственных значений (см. также ниже теорему 10 и более общий результат в следствии 11), т.е. соответствующее солитонное решение будет неустойчивым. Здесь через $N(R)$ и $N(S)$ обозначено количество с учетом кратности отрицательных собственных значений оператора R и S, соответственно.

Также в [6] показано, что данная оценка не является оптимальной, так как в случае равенства количества отрицательных значений у операторов R и S и выполнения дополнительного условия $C(R) \cap C(S) = \emptyset$ (где $C(R) = \{p : (Rp, p) < 0\}$) и $C(S) = \{p : (Sp, p) < 0\}$)) у линейного пучка все же будет по крайней мере одно отрицательное собственное значение. Эти результаты использовались для изучения спектральной устойчивости солитонов во многих других нелинейных динамических системах (см. например [15], [20]).

Мотивом для настоящей работы послужила следующая [7, Теорема 2.6]: Задача $(R - zS)p = 0$, $(Sp, p) \leq 0$, имеет ровно $\max\{N(R), N(S)\} - d(C(R) \cap C(S))$ отрицательных собственных значений.

Здесь $d(C(R) \cap C(S))$ — линейная размерность конуса $C(R) \cap C(S)$.

Сложность для понимания утверждения была не только в отсутствии полного доказательства, но и в том, что символ $C(\cdot)$ в работе имеет два различных значения, в одном месте (с.311) так обозначается множество нейтральных векторов (например, $C(R) = \{p : (Rp, p) = 0\}$), в другом (с.325), множество отрицательных векторов (например, $C(R) = \{p : (Rp, p) < 0\}$). Однако, в любом варианте этот результат не может быть правильным хотя бы потому, что количество отрицательных собственных значений, которым отвечают S-неположительные собственные векторы: $(Sp, p) \leq 0$, не может быть более $N(S)$ (см. ниже следствие 6), $d(C(R) \cap C(S)) \leq N(S)$, однако при $N(R) > 2N(S) + 1$ мы получили бы противоречие.

Цель нашей работы — развить некоторые аспекты теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой и применить к исследованию линейного операторного пучка, в частности, к оценке числа его отрицательных собственных значений.

1.1 Постановка задачи.

В этой работе L_+ и L_- — самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{X}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющие следующему условию:

(**A**) непрерывные спектры $\sigma_c(L_+)$ и $\sigma_c(L_-)$ и множества собственных значений бесконечной кратности операторов L_+ и L_- ограничены снизу числами $\omega_+ > 0$ и $\omega_- > 0$ соответственно.

Как мотивацию для введения условия (**A**) приведем следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим скалярное нелинейное уравнение Шредингера [7, 8]:

$$i\psi_t = -\Delta\psi + f(x, |\psi|^2)\psi, \qquad \Delta = \partial^2_{x_1x_1} + ... + \partial^2_{x_dx_d}, \tag{4}$$

где $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ и $\psi \in \mathbb{C}$. Если $f(x, |\psi|^2)$ является локализованным потенциалом, например f принадлежит C^∞ и $f(0) = 0$, нелинейное уравнение Шредингера (4) обладает локализованным волновым решением $\psi = \varphi(x)e^{i\omega t}$, где $\omega > 0$ и $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Следовательно, $\varphi(x)$ является экспоненциально убывающей функцией и принадлежит C^∞. Существование, единственность и устойчивость таких решений (4) подробно разобраны в работе [14]. Линеаризация (4) с помощью подстановки

$$\psi = \Big(\varphi(x) + [u(x) + iw(x)]e^{\lambda t} + [\bar{u}(x) + i\bar{w}(x)]e^{\bar{\lambda}t}\Big)\, e^{i\omega t}, \tag{5}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $(u, w) \in \mathbb{C}^2$, приводит к гамильтоновой системе (3), где $L_\pm$ — операторы Шредингера:

$$\begin{aligned} L_+ &= -\Delta + \omega + f(x, \varphi^2) + 2\varphi^2 f'(x, \varphi^2), \qquad (6)\\ L_- &= -\Delta + \omega + f(x, \varphi^2). \qquad (7) \end{aligned}$$

Операторы $L_\pm$ не являются ограниченными и $\sigma_c(L_\pm) = [\omega, \infty)$ с $\omega_+ = \omega_- = \omega > 0$. Ядро оператора L_- включает по крайней мере один собственный вектор $\varphi(x)$ и ядро оператора L_+ включает по крайней мере d собственных векторов $\partial_{x_j}\varphi(x)$, $j = 1, ..., d$. В качестве гильбертова пространства $\mathcal{X}$ рассмотрим пространство Соболева $\mathcal{X} := W^1_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$; ограничение (A) на спектральные свойства операторов выполнено поскольку потенциальные функции $f(x, \varphi^2)$ and $\varphi^2 f'(x, \varphi^2)$ экспоненциально убывают. $\square$

Мы будем изучать задачу (3), где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $(u, w) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Таким образом, нас будут интересовать спектральные свойства оператора

$$\mathfrak{A} := \begin{bmatrix} 0 & L_- \\ -L_+ & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Так как из определения оператора $\mathfrak{A}$ следует, что $\ker \mathfrak{A} = \ker L_+ \times \ker L_-$, то сосредоточимся на изучении ненулевых собственных значений и соответствующих корневых линеалов.

В силу условия (**A**) ядро $\ker L_-$ оператора L_- конечномерно, собственное значение $\lambda = 0$ этого оператора изолировано, а потому его область значений $\operatorname{ran} L_- =: \mathcal{H}$ замкнута. Отсюда $\mathcal{X} = \ker L_- \oplus \mathcal{H}$ и

$$\mathcal{X} \times \mathcal{X} = (\ker L_- \oplus \mathcal{H}) \times (\ker L_- \oplus \mathcal{H}). \tag{9}$$

Если предположить дополнительно, что $\ker L_-$ содержится в области определения $\operatorname{dom} L_+$ оператора L_+ (в конкретных примерах часто выполнено даже более строгое условие: $\operatorname{dom} L_+ = \operatorname{dom} L_-$), то оператор $\mathfrak{A}$ представляется в следующем матричном виде относительно разложения (9):

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_-^{(2)} \\ -L_+^{(1)} & -L_+^{(12)} & 0 & 0 \\ -L_+^{(12)*} & -L_+^{(2)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

с естественным определением составляющих. В силу конечномерности $\ker L_-$ операторы $L_\pm^{(2)}$ обладают теми же спектральными свойствами, что и $L_\pm$, причем $L_-^{(2)}$ непрерывно обратим. Непосредственно проверяется, что $\lambda \in \sigma_p(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда $-\lambda^2 =: \gamma$ — собственное значение линейного пучка

$$L(\gamma) := A - \gamma K : \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

где $A := -L_+^{(2)}$, а $K := {L_-^{(2)}}^{-1}$ — ограниченный самосопряженный оператор. При этом между собственными векторами задачи (3) ($\equiv$ собственными векторами оператора $\mathfrak{A}$) и линейного пучка L непосредственно устанавливается взаимно-однозначное соответствие.
Таким образом, без ограничения общности в дальнейшем можно предполагать оператор L_- непрерывно обратимым.

2 Теорема Понтрягина.

Прежде чем доказывать Теорему 3, аналог теоремы Понтрягина о существовании конечномерного инвариантного подпространства, остановимся на следующем широко известном простом, но очень полезном факте, авторство которого достаточно трудно проследить.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, пусть $G : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ — ограниченный самосопряженный положительный оператор. Введем G-скалярное произведение $[\cdot,\cdot] = (G\cdot,\cdot)$ и пополним по нему $\mathcal{H}$ до $\widetilde{\mathcal{H}}$.*

Тогда оператор G допускает расширение до ограниченного оператора $\widetilde{G} : \widetilde{\mathcal{H}} \mapsto \mathcal{H}$ и область значения оператора $\widetilde{G}$ совпадает с областью значения оператора $G^{1/2}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из равенств

$$[x,y] = (Gx,y) = (G^{1/2}x, G^{1/2}y)$$

следует, что $G^{1/2}$ — изометрический оператор из G-скалярного произведения в исходное, а потому он допускает изометрическое расширение $\widetilde{G^{1/2}} : \widetilde{\mathcal{H}} \mapsto \mathcal{H}$. Поскольку область значений оператора $G^{1/2}$ плотна в $\mathcal{H}$, то область значений $\widetilde{G^{1/2}}$ совпадает с $\mathcal{H}$, т.е. $\widetilde{G^{1/2}}$ — унитарный оператор. Остается заметить, что G — ограниченный оператор из G-скалярного произведения в исходное и потому допускает ограниченное расширение $\widetilde{G}$ на $\widetilde{\mathcal{H}}$ и при этом $\widetilde{G} \supset G^{1/2}\widetilde{G^{1/2}}$. Так как оператор $G^{1/2}\widetilde{G^{1/2}}$ определен на всем $\widetilde{\mathcal{H}}$, то включение переходит в равенство и тем самым лемма доказана. □

Теорема 3. *Пусть B и G — ограниченные самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Введем в рассмотрение G-метрику $[\cdot,\cdot] = (G\cdot,\cdot)$ и G-самосопряженный оператор $A := BG : [Ax,y] = [x,Ay]$ при всех $x,y \in \mathcal{H}$.*

Если $\lambda = 0$ не является собственным значением операторов B и G, а отрицательный спектр оператора G состоит из $\varkappa : 0 < \varkappa < \infty$ собственных значений (с учетом кратности), то у оператора A существует $\varkappa$-мерное неположительное инвариантное подпространство.

Доказательство. Пусть $G = J|G|$ — полярное разложение оператора G. Введем $|G|$-скалярное произведение и пополним $\mathcal{H}$ по нему до гильбертова пространства $\widetilde{\mathcal{H}}$. Так оператор G самосопряжен, то J является самосопряженным и изометрическим как относительно исходного скалярного произведения, так и относительно $|G|$-скалярного произведения. Поэтому J допускает по непрерывности расширение до оператора $\widetilde{J}$, являющегося в $\widetilde{\mathcal{H}}$ унитарным и самосопряженным. Введем в $\widetilde{\mathcal{H}}$ индефинитную $\widetilde{J}$-метрику $[\cdot,\cdot]^{\sim}$. Заметим, что для $x, y \in \mathcal{H}$ имеем $[x,y]^{\sim} = [x,y]$. Оператор A допускает расширение по непрерывности до оператора $\widetilde{A}$, являющегося $\widetilde{J}$-самосопряженным в $\widetilde{\mathcal{H}}$. Поскольку $\widetilde{A} \supset BJ|\widetilde{G}|$, то из леммы 2 следует, что $\widetilde{A} = BJ|\widetilde{G}|$. Из условий на B и G имеем $\ker A = \{0\}$. Следовательно, все конечномерные инвариантные подпространства оператора $\widetilde{A}$ лежат в $\mathcal{H}$, а потому конечномерные инвариантные подпространства операторов $\widetilde{A}$ и A совпадают.

Остается заметить, что из условий на спектр оператора G следует, что $\widetilde{\mathcal{H}}$ с $\widetilde{J}$-метрикой — пространство Понтрягина с $\varkappa$ отрицательными квадратами. Из известной теоремы Понтрягина [18] следует, что оператор $\widetilde{A}$ имеет $\varkappa$-мерное $\widetilde{J}$-неположительное инвариантное подпространство, которое будет инвариантным и относительно A. Поскольку, как отмечалось выше, на векторах из $\mathcal{H}$ значения G-метрики и J-метрики совпадают, то теорема доказана. □

Замечание 4. Отметим, что если G-самосопряженный оператор A не представлен как произведение двух непрерывных операторов, либо представлен $A = BG$, но $\ker B \neq \{0\}$, то, вообще говоря, у оператора A может не быть $\varkappa$-мерного неположительного инвариантного подпространства (см. [2]).

Рассмотрим линейный операторный пучок

$$L(\gamma) = A - \gamma K, \tag{11}$$

где A и K — операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Точка γ_0 называется регулярной для этого пучка ($\gamma_0 \in \rho(L)$), если оператор $L(\gamma_0)$ непрерывно обратим на всем пространстве.

Теорема 5. *Пусть A и K — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, причем K ограничен,* $\ker K = \{0\}$, *и неположительный спектр оператора A состоит из конечного числа изолированных собственных значений конечной кратности.*

Тогда:

(i) множество $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ состоит из регулярных точек пучка (11), *за исключением быть может счетного набора изолированных собственных значений конечной кратности;*

(ii) существует такое $\delta > 0$, что множество

$$\Omega_\delta := \{\gamma \in \mathbb{C} \mid 0 < |\gamma| < \delta\}$$

состоит из регулярных точек этого пучка.

Доказательство. (i) Доказательство этого утверждения проведем в три этапа:

(i_1) сперва покажем, что без ограничения общности можно считать и оператор A ограниченным;

(i_2) докажем утверждение (i) в предположении, что пучок (11) имеет хотя бы одну регулярную точку;

(i_3) проверим, что в условиях теоремы линейный пучок (11) имеет хотя бы одну регулярную точку.

(i_1) Рассмотрим разложение пространства

$$\mathcal{H} = \operatorname{ran} A \oplus \ker A. \tag{12}$$

Введем линейный оператор $A_{1/2}$, заданный матрицей относительно разложения (12):

$$A_{1/2} = \begin{bmatrix} |A|^{1/2}_{\operatorname{ran} A} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Оператор $A_{1/2}$ самосопряжен и непрерывно обратим, а потому

$$L(\gamma) = A_{1/2}(A^{-1}_{1/2} A A^{-1}_{1/2} - \gamma A^{-1}_{1/2} K A^{-1}_{1/2}) A_{1/2}.$$

Следовательно, непрерывная обратимость пучка (11) эквивалентна непрерывной обратимости пучка

$$L_1(\gamma) = A_1 - \gamma K_1, ,$$

где $A_1 = A_1^*$ — замыкание оператора $A^{-1}_{1/2} A A^{-1}_{1/2}$, а $K_1 = A^{-1}_{1/2} K A^{-1}_{1/2} = K_1^*$. Оба оператора A_1 и K_1 ограничены (более того, A_1 — частично изометрический оператор), $\ker K_1 = \{0\}$, и неположительный спектр оператора

A_1 состоит из конечного числа изолированных собственных значений конечной кратности; в этом случае $\sigma(A_1) \cap \{-\infty, \infty\} = \{0, -1\}$, если $\ker A \neq \{0\}$ и $\sigma(A_1) \cap \{-\infty, \infty\} = \{-1\}$, если $\ker A = \{0\}$.

Следовательно, без потери общности будем считать, что в (11) оператор A также ограничен. Более того, сделаем замену $\gamma = 1/\lambda$.
Далее будем рассматривать линейный операторный пучок

$$\widetilde{L}(\lambda) = K - \lambda A, \tag{13}$$

где A и K — ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, причем неположительный спектр оператора A состоит из конечного числа изолированных собственных значений конечной кратности.

(i_2) В силу условий на спектр оператора A, он допускает представление в виде суммы двух ограниченных самосопряженных операторов

$$A = X + Y \tag{14}$$

где X — равномерно положительный оператор, а Y — конечномерный. Так как множество регулярных точек линейного пучка $K - \lambda X$совпадает с множеством регулярных точек ограниченного самосопряженного оператора $X^{-1/2}KX^{-1/2}$, то открытое множество

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \left\{ [\,-\|X^{-1/2}KX^{-1/2}\|\,,\, \|X^{-1/2}KX^{-1/2}\|\,] \right\}$$

состоит из регулярных точек пучка $K - \lambda X$.
Перепишем $\widetilde{L}(\lambda)$ в следующем виде:

$$\widetilde{L}(\lambda) = (I - \lambda Y(K - \lambda X)^{-1})(K - \lambda X). \tag{15}$$

Отсюда следует, что $\lambda \in \rho(\widetilde{L}) \cap \Omega$ тогда и только тогда, когда оператор $I - T(\lambda)$, где $T(\lambda) := \lambda Y(K - \lambda X)^{-1}$, непрерывно обратим. Оператор-функция $T(\lambda)$ является голоморфной на Ω и принимает значения во множестве компактных операторов. Предположим (далее мы это докажем), что в Ω существует хотя бы одна точка λ_0, не являющаяся собственным значением для пучка $\widetilde{L}$, а потому $\ker(I - T(\lambda_0)) = \{0\}$. Тогда, согласно [5, Теорема I.5.1], все точки $\lambda \in \Omega$, за исключением некоторого множества изолированных, таковы, что операторы $I - T(\lambda)$ непрерывно обратимы. Таким образом, в Ω все точки, за исключением некоторого множества изолированных точек, являются регулярными для пучка $\widetilde{L}$. Поскольку $T(\lambda)$ принимает значения во множестве компактных операторов, то в упомянутых изолированных точках $\dim\ker\widetilde{L}(\lambda) < \infty$. Из связи параметров $\lambda = 1/\gamma$ следует, в частности, утверждение (i).

Следовательно, для доказательства (i) достаточно проверить существование хотя бы одной невещественной точки, не являющейся собственным значением для пучка (13).

(i_3) Обозначим через $\kappa(A)$ суммарную кратность неположительных собственных значений оператора A. Если $\kappa(A) = 0$, т.е. A — равномерно положительный оператор, то, как указывалось выше, множество регулярных точек пучка включает в себя, в частности, все невещественные точки, т.е. это множество непусто.

Пусть $\kappa(A) \neq 0$. Предположим противное: множество регулярных точек линейного пучка L пусто. Покажем, что тогда существует линейный пучок

$$\widetilde{L}_(\lambda) = \widetilde{K} - \lambda\widetilde{A} \tag{16}$$

с ограниченными самосопряженными операторами $\widetilde{K}$ и $\widetilde{A}$, действующими в гильбертовом пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$ и удовлетворяющими тем же условиям, что A и K, причем $\kappa(\widetilde{A}) < \kappa(A)$ и множество регулярных точек пучка $\widetilde{A}$ пусто. Поскольку $\kappa(A)$ — фиксированное натуральное число, то через конечное количество шагов придем к существованию пучка вида (20) с $\kappa(\widetilde{A}) = 0$ и пустым регулярным множеством. Последнее, как пояснено выше, невозможно.

Прежде всего заметим, что если множество регулярных точек пучка L пусто, то $\ker A \neq \{0\}$: в противном случае множество регулярных точек пучка L совпало бы с множеством регулярных точек ограниченного оператора $A^{-1}K$, которое, как известно, непусто.

Разложим пространство:

$$\mathcal{H} = \operatorname{ran} A \oplus \ker A.$$

Пусть $P_{\ker A}$ — ортопроектор на $\ker A$. Тогда оператор $K_0 = P_{\ker A} K P_{\ker A}|_{\ker A}$ самосопряжен и действует в конечномерном пространстве $\ker A$. Поэтому

$$\ker A = \operatorname{ran} K_0 \oplus \ker K_0,$$

что влечет разложение всего пространства:

$$\mathcal{H} = \operatorname{ran} A \oplus \operatorname{ran} K_{22} \oplus \ker K_{22}. \tag{17}$$

Относительно этого разложения операторы K и A, а с ними и пучок $L(\lambda)$, представимы в матричном виде:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12}^* & K_{22} & 0 \\ K_{13}^* & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} K_{11} - \lambda A_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12}^* & K_{22} & 0 \\ K_{13}^* & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

По построению $\ker K_{22} = \{0\}$, а потому существует оператор K_{22}^{-1}. Так как по предположению все невещественные λ являются собственными значениями для пучка (13), то это означает существование такого вектора $x_\lambda = (x_{\lambda,1}, x_{\lambda,2} x_{\lambda,3})^t$, что $L(\lambda)x_\lambda = 0$, т.е. имеет место система равенств:

$$\begin{cases} (K_{11} - \lambda A_{11})x_{\lambda,1} + K_{12}x_{\lambda,2} + K_{13}x_{\lambda,3} = 0 \\ K_{12}^* x_{\lambda,1} + K_{22}x_{\lambda,2} = 0 \\ K_{13}^* x_{\lambda,1} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Отсюда находим, что $x_{\lambda,2} = -K_{22}^{-1}K_{12}^* x_{\lambda,1}$ и потому система (20) переходит в эквивалентную систему

$$\begin{cases} (K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{12}^* - \lambda A_{11})x_{\lambda,1} + K_{13}x_{\lambda,3} = 0 \\ K_{13}^* x_{\lambda,1} = 0 \\ x_{\lambda,2} = -K_{22}^{-1}K_{12}^* x_{\lambda,1}. \end{cases} \tag{21}$$

Таким образом, в пространстве

$$\mathcal{H}_1 = \operatorname{ran} A \oplus \ker K_{22}$$

построен операторный пучок

$$L_1(\lambda) = \begin{bmatrix} K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{12}^* - \lambda A_{11} & K_{13} \\ K_{13}^* & 0 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

с операторами

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{12}^* & K_{13} \\ K_{13}^* & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

удовлетворяющими тем же условиям, что и операторы A и K, причем $\kappa(A_1) \leq \kappa(A)$. В самом деле, последнее условие вытекает из того, что A_1 — сужение оператора A на подпространство $\mathcal{H}_1$. Кроме того, операторы K_1 и A_1 ограничены и самосопряжены, причем $\ker K_1 = \{0\}$. Последнее вытекает из того, что $(x_1, x_3)^t \in \ker K_1$ влечет $(x_1, -K_{22}^{-1}K_{12}^* x_1, x_3)^t \in \ker K$, а по условию $\ker K = \{0\}$. Из (21) следует, что у пучка (22) нет регулярных точек.

Таким образом, не ограничивая общности можно считать $K_0 = 0$, а потому $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, $K_1 = K$, $A_1 = A$ и $L_1(\lambda) = L(\lambda)$:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{13}^* & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} K_{11} - \lambda A_{11} & K_{13} \\ K_{13}^* & 0 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Так как $\ker A \neq \{0\}$, то

$$\kappa(A_{11}) < \kappa(A). \tag{24}$$

Условие отсутствия регулярных точек линейного пучка, как отмечалось выше, в данном случае означает, что все невещественные точки — собственные значения этого пучка или, что эквивалентно, для каждого невещественного λ найдется вектор $y_\lambda \in \ker K_{13}^*$ такой, что $(K_{11} - \lambda A_{11})y_\lambda \in \operatorname{ran} K_{13}$. Так как

$$\operatorname{ran} A = \ker K_{13}^* \oplus \operatorname{ran} K_{13},$$

то обозначив через P ортопроектор на $\ker K_{13}^*$ и положив

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \ker K_{13}^*, \quad \widetilde{K} = PK_{11}P|_{\ker K_{13}^*}, \quad \widetilde{A} = PA_{11}P|_{\ker K_{13}^*},$$

получим искомый линейный пучок (20), не имеющий регулярных точек, $\kappa(\widetilde{A}) < \kappa(A)$. Условие $\ker \widetilde{K} = \{0\}$ проверяется непосредственным счетом с учетом того, что $\ker K = \{0\}$.

(ii) Пусть γ достаточно мало по модулю. Перепишем пучок (11) в следующем виде:

$$L(\gamma) = (I + Y(X - \gamma K)^{-1})(X - \gamma K),$$

где X и Y те же, что в (14). Поскольку это выражение имеет смысл при $|\gamma| < 1/\|KX^{-1}\|$, то (см. [5, Теорема I.5.1]) все точки открытого круга радиуса $1/\|KX^{-1}\|$ являются регулярными для пучка L, за исключением, быть может не более чем счетного множества изолированных собственных значений. В частности, если $\gamma = 0$ — регулярная точка пучка L (эквивалентно, $0 \in \rho(A)$), то и некоторая ее δ-окрестность состоит из регулярных точек этого пучка. Если $\gamma = 0$ — собственное значение (11) (эквивалентно, $0 \in \sigma_p(A)$), то оно изолировано и потому существует искомая окрестность Ω_δ. $\square$

Следствие 6. *В условиях теоремы 5 справедливы следующие утверждения.*

(a) *Пучок (11) имеет вещественную регулярную точку γ_0 такую, что отрицательный спектр оператора $L(\gamma_0)$ состоит из конечного числа $N(L(\gamma_0))$:*

$$N(A) \leq N(L(\gamma_0)) \leq N(A) + \dim\ker A \tag{25}$$

собственных значений (с учетом кратности); здесь и далее через $N(\cdot)$ обозначается количество отрицательных собственных значений (с учетом кратности) соответствующего оператора.

(b) *Зададим в $\mathcal{H}$ A-метрику: $[x,y]_A = (Ax, y)$. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ — множество невещественных собственных значений линейного пучка $L(\gamma)$, расположенных в верхней полуплоскости, $\varkappa_\lambda$ — кратность λ_j $j = \overline{1,m}$. Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^s$ — множество таких ненулевых вещественных собственных значений $L(\gamma)$, что $\ker L(\mu_k)$ содержит хотя бы один A-неположительный вектор, т.е. неположительный относительно A-метрики, и $\varkappa_{\mu_k}$ — размерность максимального в $\ker L(\mu_k)$ A-неположительного подпространство $\mathcal{L}_k$, $k = \overline{1,s}$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^m \varkappa_{\lambda_j} + \sum_{k=1}^s \varkappa_{\mu_j} \leq N(A) \leq N(L(\gamma_0)). \tag{26}$$

Доказательство. (a) немедленно следует из утверждения (ii) теоремы 5 и известного факта теории возмущений (см. [5, Теорема I.3.1], что количество отрицательных собственных значений оператора $L(\gamma_0) = A - \gamma_0 K$ при достаточно малом γ_0 не уменьшится, но и не увеличится более чем на $\ker \dim A$ поскольку неотрицательный спектр оператора A состоит из конечного числа изолированных конечнократных собственных значений;

(b) Пусть λ и μ — собственные значения линейного пучка $L(\gamma)$, $\lambda \neq \overline{\mu}$. Тогда ядра $\ker L(\lambda)$ и $\ker L(\mu)$ A-ортогональны, т.е. $[x, y]_A = 0$ для всех $x \in \ker L(\lambda)$, $y \in \ker L(\mu)$. В самом деле, без ограничения общности будем считать $\mu \neq 0$ и тогда утверждение следует из равенств:

$$[x, y]_A = (Ax, y) = (\lambda Kx, y) = \lambda(x, Ky) = \frac{\lambda}{\mu}(x, Ay) = \frac{\lambda}{\mu}[x, y]_A.$$

Следовательно, подпространство $\mathcal{L} :=$ з.л.о. $\{\ker L(\lambda_j), \mathcal{L}_k\}_{j=1,k=1}^{m,s}$ является A-неположительным. Так как $\mathcal{L} \cap \ker A = \{0\}$, то справедливо левое неравенств в (26), а правое следует из (25). $\square$

Замечание 7. Оценка (26) является достаточно грубой, не учитывающей длины жордановых цепочек линейного пучка. Мы не приводим формулировку и доказательство более точного факта так как это чисто технический результат. Читатель без труда улучшит эту оценку, применив схему рассуждений, использованную при доказательстве аналогичной теоремы для диссипативных операторов в пространстве Понтрягина (см. [2, Теорема 2.2.26]).

3 Оценка сверху на количество неустойчивых собственных значений для операторного пучка.

Точку $\lambda \in \mathbb{C}$ называют спектрально устойчивой для оператора $\mathfrak{A}$ (см. (8)), если пространство $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ можно разложить на два $\mathfrak{A}$-инвариантных подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ так, что:

- (a) оператор $\mathfrak{A}\,|_{\mathcal{L}_1}$ устойчив в том смысле, что является генератором равномерно ограниченной группы или, что эквивалентно в силу известной теоремы Б. С.-Надя, подобен оператору вида iA, где $A : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ — самосопряженный оператор.

(b) λ — регулярная точка оператора $\mathfrak{A}\,|_{\mathcal{L}_2}$.

Отсюда немедленно следует, что спектрально устойчивыми могут быть только чисто мнимые точки, а если речь идет о собственных значениях, то только полупростые, т.е. те, которым соответствуют только тривиальные жордановы цепочки. Более того, в этом случае подпространство $\mathcal{L}_1$ представимо в виде прямой суммы двух $\mathfrak{A}$-инвариантных подпространств, одно из которых является ядром оператора $\mathfrak{A} - \lambda$.

Отметим, что по определению оператора $\mathfrak{A}$ вместе с λ собственным значением этого оператора будет и $-\lambda$.

Особое внимание обратим на точку $\lambda = 0$. Из условий на оператор $\mathfrak{A}$ эта точка является либо регулярной для $\mathfrak{A}$, либо нормальным собственным значением (определение и свойства см. [5, Глава I]). Следовательно, если $\lambda = 0$ — собственное значение оператора $\mathfrak{A}$, то оно является спектрально устойчивым для $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда оно — полупростое собственное значение.

Пусть операторы A и K удовлетворяют условиям теоремы 5. Приведенное выше определение позволяет нам ввести понятие спектрально устойчивого собственного значения для линейного операторного пучка (11), связанное с аналогичным понятием для оператора $\mathfrak{A}$.

Но прежде напомним, что собственное значение γ_0 линейного пучка называется полупростым, если $\operatorname{ran}(A - \gamma_0) \cap K\ker L(\gamma_0) = \{0\}$.

Определение 8. Собственное значение γ обобщенной задачи $Au = \gamma Ku$ будем называть спектрально устойчивым, если оно неотрицательно, является полупростым, и при $\gamma > 0$ ядро $\ker(A - \gamma K)$ невырождено относительно квадратичной формы $[x, y]_A = (Ax, y)$ (эквивалентно, относительно квадратичной формы $[x, y]_K = (Kx, y)$). В противном случае собственное значение называется спектрально неустойчивым.

Из описанной выше связи оператора $\mathfrak{A}$ и линейного операторного пучка $L(\gamma)$ (см. (11)) следует, что $\gamma_0 = -\lambda_0^2$ является спектрально устойчивым собственным значением для $L(\gamma)$ тогда и только тогда, когда обе точки λ_0 и $-\lambda_0$ — спектрально устойчивые собственные значения оператора $\mathfrak{A}$. Следовательно, если γ_0 — неустойчивое собственное значение задачи $Au = \gamma Ku$, то существует λ_0, приводящее к неустойчивости соответствующей критической точки или, другими словами, к неустойчивости солитонного решения.

Прежде чем сформулировать основной результат этого раздела, Теорему 10, и доказать необходимую для этого Лемму 9, сделаем некоторые пояснения. Пусть $\{\mathcal{H},\ [\cdot,\cdot]\}$ — пространство Понтрягина с $\varkappa < \infty$ отрицательными квадратами. Тогда оно допускает (каноническое) представление:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{+}[+]\mathcal{H}^{-},$$

в котором подпространства $\{\mathcal{H}^{\pm},\ \pm[\cdot,\cdot]\}$ гильбертовы, взаимно ортогональны и $\dim \mathcal{H}^{-} = \varkappa$. Пространство $\mathcal{H}$ становится гильбертовым после введения (канонического) скалярного произведения:

$$(x, y) = [x_+, y_+] - [x_-, y_-], \quad x = x_+ + x_-,\ y = y_+ + y_-,\ x_\pm, y_\pm \in \mathcal{H}^{\pm}.$$

Пространство Понтрягина теперь можно рассматривать как J-пространство, т.е. гильбертово пространство с введенной J-метрикой: $[x, y] = (Jx, y)$, где $J = P^{+} - P^{-}$, $P^{\pm}$ — ортопроектор на $\mathcal{H}^{\pm}$, соответственно.

Пусть T — самосопряженный оператор в пространстве Понтрягина. Тогда JT — гильбертов самосопряженный оператор. Обозначим через $N(JT)$ количество отрицательных собственных значений оператора JT.

Пусть $(\cdot,\cdot)_1$ — другое, отличное от $(\cdot,\cdot)$ скалярное произведение в $\mathcal{H}$, причем нормы порожденные этими скалярными произведениями эквивалентны. Тогда существуют такой равномерно положительный ограниченный оператор W и самосопряженный относительно $(\cdot,\cdot)_1$ ограниченный и ограничено обратимый оператор G, что

$$(x, y)_1 = (Wx, y), \quad [x, y] = (Gx, y)_1,$$

т.е. пространство Понтрягина является G-пространством по отношению к новому скалярному произведению.

Рассмотрим оператор GT и докажем, что $N(GT) = N(JT)$. В самом деле, так как по определению $G = W^{-1}J$, то

$$N(GT) = N(W^{-1}JT) = N(W^{-1/2}(W^{-1/2}JTW^{-1/2})W^{1/2}) =$$

$$= N(W^{-1/2}JTW^{-1/2}) = N(JT).$$

Таким образом, число отрицательных собственных значений оператора вида GT, где T — самосопряженный оператор в пространстве Понтрягина, а G — оператор порождающий индефинитное скалярное произведение, не зависит от выбора эквивалентного скалярного произведения, или, что то же, от выбора оператора G.

Лемма 9. *Пусть T — самосопряженный оператор в J-пространстве Понтрягина с $\varkappa$ отрицательными квадратами, пусть $N(JT)$ — конечное число, причем $N(JT) > \varkappa$. Тогда $N(T) \geq N(JT) - \varkappa$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}_-$ — существующее в силу Теоремы Понтрягина $\varkappa$-мерное неположительное инвариантное подпространство оператора T, а $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_-^{[\perp]}$ — его J-ортогональное дополнение, являющееся максимальным неотрицательным подпространством, также инвариантным относительно T. Обозначим $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-$ — нейтральное подпространство, инвариантное относительно T. Тогда $\mathcal{L}_\pm = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{H}_\pm$. Без ограничения общности будем считать, что $\mathcal{H}_\pm \subset \mathcal{H}^\pm$, где $\mathcal{H}^\pm$ — составляющие канонического разложения. Тогда

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \oplus J\mathcal{L}_0.$$

Относительно этого разложения операторы J и T представляются в следующем матричном виде:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & J_{03} \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ J_{03}^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} T_0 & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ 0 & T_1 & 0 & T_{13} \\ 0 & 0 & T_2 & T_{23} \\ 0 & 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Отсюда

$$JT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & J_{03}T_3 \\ 0 & T_1 & 0 & T_{13} \\ 0 & 0 & -T_2 & -T_{23} \\ J_{03}^*T_0 & J_{03}^*T_{01} & J_{03}^*T_{02} & J_{03}^*T_{03} \end{bmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{F}_-$ — спектральное подпространство оператора JT, отвечающее его отрицательному спектру. По условию, $\dim \mathcal{F}_- = N(JT)$. Так как $\dim(\mathcal{L}_- \oplus J\mathcal{L}_0) = \varkappa$ и $N(JT) > \varkappa$, то $\dim(\mathcal{F}_- \cap \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{H}_+) \geq N(JT) - \varkappa$. Отсюда следует, что оператор $P_{\mathcal{L}_+} JT|\mathcal{L}_+$, где $P_{\mathcal{L}_+}$ — ортопроектор на $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{H}_+$, имеет не менее $N(JT) - \varkappa$ отрицательных собственных значений. Поскольку

$$P_{\mathcal{L}_+} JT|\mathcal{L}_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_1 \end{bmatrix},$$

то оператор $N(T_1) \geq N(JT) - \varkappa$. Остается воспользоваться формой (27) оператора T и получить, что $N(T) \geq N(JT) - \varkappa$.

□

Заметим что при доказательстве нами не использовалась обратимость и даже непрерывность оператора T.

Теорема 10. *Пусть A и K — самосопряженные операторы, отрицательные спектры которых состоят из конечного числа $N(A)$ и $N(K)$, соответственно, собственных значений (с учетом кратности). Пусть A непрерывно обратим, а K ограничен с $\ker K = \{0\}$ и $N(A) \neq N(K)$. Тогда количество отрицательных собственных значений $N(L)$ линейного пучка $L(\gamma) = A - \gamma K$ не менее $|N(A) - N(K)|$.*

Как следствие заключаем, что существуют неустойчивые солитонные решения соответствующие отрицательным собственным значениям задачи $Au = \gamma Ku$.

Доказательство. Так как A непрерывно обратим, то количество отрицательных собственных значений пучка L совпадает с количеством отрицательных собственных значений оператора KA^{-1} и $N(A^{-1}) = N(A)$. Для определенности положим $N(A) > N(K)$; случай $N(A) < N(K)$ рассматривается аналогично, только надо поменять ролями операторы A^{-1} и K. Пусть $A^{-1} = J|A^{-1}|$ — полярное разложение самосопряженного оператора A^{-1}. Поскольку

$$N(KA^{-1}) = N(|A^{-1}|^{1/2} K |A^{-1}|^{1/2} J),$$

$$N(A^{-1}) = N(J), \quad N(|A^{-1}|^{1/2} K |A^{-1}|^{1/2}) = N(K),$$

остается воспользоваться Леммой 9. □

Следствие 11. *Пусть A и K — самосопряженные операторы, отрицательные спектры которых состоят из конечного числа $N(A)$ и $N(K)$, соответственно, собственных значений (с учетом кратности). Пусть 0 — конечнократное изолированное собственное значение оператора A, а K ограничен и $\ker K = \{0\}$.*
Если $N(A) > N(K)$, то количество отрицательных собственных значений $N(L)$ линейного пучка $L(\gamma) = A - \gamma K$ не менее $N(A) - N(K)$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 10, следствием 6 и в нем неравенствами (25). □

Из доказанной теоремы прямо получаем и следующий результат.

Теорема 12. *Если в условиях теоремы 10 имеем $N(A) = N(K)$, то либо задача $Au = \gamma Ku$ имеет неустойчивые собственные значения, либо существует $n = N(A) = N(K)$ ее линейно независимых решений $\{u_j\}_{j=1}^n$, отвечающих положительным собственным значениям и таких, что $(Ku_j, u_j) < 0$, $(Ku_j, u_m) = 0$, $k, m = \overline{1, n}$.*

Замечание 13. Линейная оболочка указанной в теореме 12 системы решений $\{u_j\}_{j=1}^n$ с указанными свойствами, вообще говоря, не единственна, однако множество отвечающих этой системе собственных значений определяется однозначно.

Следующая теорема даст оценку сверху множества отрицательных собственных значений пучка (11).

Теорема 14. *Пусть A и K те же, что и в следствии 11, но с той разницей, что 0 может быть как конечнократным изолированным собственным значением оператора A, так и его регулярной точкой. Тогда отрицательный спектр пучка (11) состоит из конечнократных собственных значений и $N(L)$, количество отрицательных собственных значений пучка (11) с учетом кратности, не превосходит числа $N(A) + N(K)$.*

Доказательство. Для простоты изложения, дабы не вводить понятие кратности собственного значения для пучка, мы докажем упрощенный вариант этого утверждения, а именно, что $N_0(L)$, количество различных отрицательных собственных значений пучка, не превосходит $N(A) + N(K)$. С учетом того, что спектры операторов A и K состоят из конечного числа конечнократных изолированных собственных значений и 0 — либо регулярная точка оператора A, либо его конечнократное собственное значение, из теории возмущений линейных операторов следует, что отрицательный спектр пучка (11) состоит из конечнократных изолированных собственных значений. Наша цель — доказать, что их не более $N(A) + N(K)$. Для этого заметим, что если γ_1 и γ_2 — различные вещественные собственные значения пучка L и x, y — соответствующие собственные векторы: $L(\gamma_1)x = 0$, $L(\gamma_2)y = 0$, то

$$(Ax, y) = (Kx, y) = 0. \tag{28}$$

Пусть теперь $\gamma < 0$ — собственное значение L и v — соответствующий собственный вектор. Тогда $(Av, v) = \gamma(Kv, v)$. Следовательно, отрицательные собственные значения пучка могут быть разделены на 3 подгруппы:

(a) существует такой собственный вектор v, что $(Av, v) = (Kv, v) = 0$.

(b) для любого собственного вектора v: $(Av, v) > 0$, $(Kv, v) < 0$.

(c) для любого собственного вектора v: $(Av, v) < 0$, $(Kv, v) > 0$.

Воспользуемся (28) и тем, что размерность A-неположительных подпространств не превосходит $N(A) + \dim\ker A$, а размерность K-неположительных подпространств не превосходит $N(K)$. Следовательно, $N_0(L) \le N(A) + N(K) + \dim\ker A$. Для завершения доказательства заметим, что если размерность A-неположительного подпространства больше $N(A)$, то такое подпространство должно содержать векторы из $\ker A$. Однако в данном случае, когда рассматривается линейная оболочка собственных векторов, отвечающих отрицательным собственным значениям, это невозможно. Поэтому $N_0(L) \le N(A) + N(K)$.

$\square$

В заключение приведем укажем условия на операторы A и K, при которых $N(L)$ принимает крайние значения, $|N(A) - N(K)|$ или $N(A) + N(K)$. Далее будем предполагать, что существует такая конечная постоянная $\alpha \neq 0$, что либо

$$A + \alpha K \ge 0, \tag{29}$$

либо выполнено симметричное условие для конечной постоянной $\beta \neq 0$

$$K + \beta A \ge 0, \tag{30}$$

Условие (29) эквивалентно тому, что либо все A-неположительные векторы, $(Ax, x) \le 0$, являются K-неотрицательными, $(Kx, x) \ge 0$, и

тогда $\alpha > 0$, либо все K-неотрицательные векторы являются A-неотрицательными, $(Ax, x) \geq 0$, и тогда $\alpha < 0$ (см., например, [2, Следствие 1.1.36]). Аналогичная интерпретация относится и к (30). В частности, оба этих условия, (29) и (30), имеют место при некоторых α и β, если множество A-нейтральных векторов, $(Ax, x) = 0$, пересекается со множеством K-нейтральных векторов, $(Ky, y) = 0$, только в нуле.
Известно, что при равенстве нулю одного из чисел $N(A)$ или $N(K)$ справедливо равенство $N(L) = N(A) + N(K)$. Этим обусловлено то, что ниже в теореме 15 будем считать оба числа $N(A)$ и $N(K)$ отличными от нуля.

Теорема 15. *Пусть A и K — самосопряженные операторы, отрицательные спектры которых состоят из конечного числа $N(A) \neq 0$ и $N(K) \neq 0$, соответственно, собственных значений (с учетом кратности), но не исчерпывают спектры этих операторов. Пусть A непрерывно обратим, K ограничен с $\ker K = \{0\}$ и при некотором $\alpha \neq 0$ имеет место неравенство* (29) *или* (30)*.*
Тогда:

(*a*) *при $\beta < 0$ справедливо равенство $N(L) = N(A) - N(K)$;*

(*b*) *при $\alpha < 0$ справедливо равенство $N(L) = N(K) - N(A)$;*

(*c*) *при $\alpha > 0$ или $\beta > 0$ справедливо равенство $N(L) = N(A) + N(K)$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что без ограничения общности оператор A можно (и будем) считать непрерывным, в противном случае перейдем к пучку $A|A|^{-1} - \gamma|A|^{-1/2}K|A|^{-1/2}$.
(*a*) Так как $\beta < 0$, то для решения поставленной перед нами задачи без ограничения обощности будем считать $-\beta = 1$ и перепишем (30) в виде

$$(Kx, x) \geq (Ax, x). \tag{31}$$

Так как A — ограниченный и ограниченно обратимый оператор, являющийся конечномерным возмущением равномерно положительного оператора, то из (31) следует, что и оператор K обладает тем же свойством. Напомним, что дефект оператора K относительно A равен нулю: $\operatorname{def} K/A = 0$, если вместе с $K \geq A$ имеет место неравенство $A^{-1} \geq K^{-1}$, или, что эквивалентно, оператор $A^{-1}K$ подобен равномерно положительному (см., напр., [1]).

В силу [1, Lemma 3.2] существует такой ограниченный равномерно положительный оператор G, что имеет место разложение пространства $\mathcal{H}$ в G-ортогональную сумму подпространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2, \tag{32}$$

инвариантных относительно операторов GK и GB, причем $\operatorname{def}(GK)_1/(GA)_1 = 0$, $(GK)_2$ — равномерно положительный оператор, а $(GA)_2$ — равномерно отрицательный оператор, где $(GK)_j$ и $(GA)_j$ — сужения операторов GK и GA на $\mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$. Поскольку $\operatorname{def}(GK)_1/(GA)_1 = 0$, то оператор $(GA)_1^{-1}(GK)_1$ подобен равномерно положительному и потому его спектр положителен. Из положительности $(GK)_2$ и отрицательности $(GA)_2$ имеем подобие оператора $(GA)_2^{-1}(GK)_2$ отрицательному оператору, а потому его спектр отрицателен. Следовательно, количество отрицательных собственных значений оператора $A^{-1}K = (GA)^{-1}(GK)$ равно размерности подпространства $\mathcal{H}_2$, которая совпадает с $N(A) - N(K)$. Поскольку $N(L) = N(A^{-1}K)$, то утверждение (a) доказано.

(b) Доказательство проведем по той же схеме, что и для (a), положив без ограничения общности $-\alpha = 1$. Рассмотрим операторы $(A+\varepsilon)^{-1}(K+\varepsilon)$. Так как операторы $A+\varepsilon$ и $K+\varepsilon$ ограничены и ограниченно обратимы и для достаточно малого ε имеем $N(A+\varepsilon) = N(A)$ и $N(K+\varepsilon) = N(K)$, то в силу (a) получаем $N((A+\varepsilon)^{-1}(K+\varepsilon)) = N(A) + N(K)$. Поскольку при малых возмущениях оператора $A^{-1}K$ количество отрицательных собственных значений не меньше $N(A^{-1}K) \geq N(K) - N(A)$ и в тоже время равно $N(K) - N(A)$, то $N(L) = N(A^{-1}K) = N(K) - N(A)$.

(c) Поскольку условия (29) и (30) при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ выполняются одновременно, например, при $\beta = 1/\alpha$, то будем рассматривать (29) и перепишем условие на собственные значения для операторного пучка в следующем виде:

$$(A + \alpha K)x = (\gamma + \alpha)Kx. \tag{33}$$

Из неотрицательности оператора $A+\alpha K$ следует, что собственным значениям $\gamma < -\alpha$ отвечают K-отрицательные векторы, а собственным значениям $\gamma > -\alpha$ K-положительные собственные векторы. Обозначим через $n_\alpha(K)$ количество с учетом кратности собственных значений $\gamma < -\alpha$ и $n(K) = N(K) - n_\alpha(K)$.

Совершенно аналогично из неотрицательности оператора $\frac{1}{\alpha}A + K$ следует, что собственным значениям $-\alpha < \gamma < 0$ отвечают A-отрицательные собственные векторы, а собственным значениям вне $[-\alpha, 0]$ A-положительные собственные векторы. Обозначим через $n_\alpha(A)$ количество с учетом кратности собственных значений $-\alpha < \gamma < 0$ и $n(A) = N(A) - n_\alpha(A)$. Так как количество отрицательных собственных значений пучка $L(\gamma)$ совпадает с количеством отрицательных собственных значений оператора $A^{-1}K$, то остается проверить равенства $N(A^{-1}K) = N(A) + N(K)$.

Из теоремы 3 следует, что оператор $A^{-1}K$ имеет $N(K)$-мерное K-неположительное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_K$. Следовательно, $\sigma(A^{-1}K|\mathcal{L}_K) \subset [-1/\alpha, 0)$ и потому корневой линеал $L_{-1/\alpha}(A^{-1}K)$ оператора $A^{-1}K$, отвечающий собственному значению $\gamma = -1/\alpha$, содержит $n(K)$-мерное K-неположительное инвариантное относительно $A^{-1}K$ подпространство.

Аналогично из теоремы 3 следует, что оператор $A^{-1}K$ имеет $N(A)$-мерное A-неположительное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_A$. Следовательно, $\sigma(A^{-1}K|\mathcal{L}_A) \subset (\infty, -1/\alpha]$ и потому $L_{-1/\alpha}(A^{-1}K)$ содержит $n(A)$-мерное A-неположительное инвариантное относительно $A^{-1}K$ подпространство.

Рассмотрим разложение подпространства $\ker(A^{-1}K + 1/\alpha)$:

$$\ker(A^{-1}K + 1/\alpha) = \mathcal{L}^0 + \mathcal{L}_A^+ + \mathcal{L}_A^-, \tag{34}$$

где $\mathcal{L}^0$ — A-нейтральное подпространство и такое, что $(Ax, y) = 0$ при всех $x \in \mathcal{L}^0$, $y \in \ker(A^{-1}K + 1/\alpha)$, $\mathcal{L}^+$ — A-положительное подпространство, а $\mathcal{L}^-$ — A-отрицательное подпространство. В разложении (34) составляющая $\mathcal{L}^0$ определяется единственным образом, также не меняются размерности $\mathcal{L}^\pm$, хотя сами подпространства определяются, вообще говоря, неоднозначно.

Так как оператор $A^{-1}K + 1/\alpha$ является A-неотрицательным:

$$A(A^{-1}K + 1/\alpha) = 1/\alpha(A + \alpha K) \geq 0,$$

то векторы из $\mathcal{L}^0$ и только эти векторы имеют присоединенные, длины жордановых цепочек равны 2 и в линейной оболочке векторов из жордановой цепочки есть как A-положительные, так и A-отрицательные векторы (см., наприм., [2]). Следовательно,

$$\dim L_{-1/\alpha}(A^{-1}K) = 2\dim \mathcal{L}^0 + \dim \mathcal{L}_A^+ + \dim \mathcal{L}_A^-. \tag{35}$$

Отсюда,

$$n(A) = \dim \mathcal{L}^0 + \dim \mathcal{L}_A^-. \tag{36}$$

Так как имеет место разложение, аналогичное (34):

$$\ker (A^{-1}K + 1/\alpha) = \mathcal{L}^0 + \mathcal{L}_K^+ + \mathcal{L}_K^-, \tag{37}$$

с тем же пространством $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}_K^\pm = \mathcal{L}_A^\mp$, то

$$n(K) = \dim \mathcal{L}^0 + \dim \mathcal{L}_K^- = \dim \mathcal{L}^0 + \dim \mathcal{L}_A^+. \tag{38}$$

Таким образом, из (36) и (38) следует, что оператор $A^{-1}K$ имеет ровно $N(A) + N(K)$ отрицательных собственных значений, а потому $N(L) = N(A) + N(K)$.

□

Список литературы

[1] T.Ya. Azizov, A. Dijksma, V.L. Khatskevich, "On the defect of noncontractive operators in Krein spaces: a new formula and some applications", *Operator Theory: Adv.& Appl.* , **106** (1998), 91–112.

[2] Т.Я. Азизов, И.С. Иохвидов, "Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой", М.: Наука, 1986.

[3] M.Chugunova, D.Pelinovsky, "Block-diagonalization of the symmetric first-order coupled-mode system", *SIAM Journal of Applied Dynamical Systems*, **5**(2006), 66–83.

[4] F.Dias, E.A.Kuznetsov, "Nonlinear stability of solitons in the fifth-order KdV equation", *Phys. Lett. A*, **263** (1999), 98–104.

[5] И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн, "Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве", М.: Наука, 1967.

[6] M.Grillakis, "Linearized instability for nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, **41** (1988), 747–774.

[7] M.Grillakis, "Analysis of the linearization around a critical point of an infinite dimensional Hamiltonian system", *Comm. Pure Appl. Math.*, **43** (1990), 299–333.

[8] M.Grillakis, J.Shatah, W.Strauss, "Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I", *J. Funct. Anal.*, **74** (1987), 160–197.

[9] M.Grillakis, J.Shatah, W.Strauss, "Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. II", *J. Funct. Anal.*, **94** (1990), 308–348.

[10] A.T.Illichev, A.Y.Semenov, "Stability of solitary waves in dispersive media described by a fifth-order evolution equation", *Theor. Comp. Fluid Dyn.*, **3** (1992), 307–326.

[11] C.K.R.T. Jones, "An instability mechanism for radially symmetric standing waves of a nonlinear Schrödinger equation", *J. Diff. Eq.*, **71** (1988), 34–62.

[12] Y.Kodama, D.Pelinovsky, "Spectral stability and time evolution of N solitons in KdV hierarchy", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38** (2005), 6129–6140.

[13] P.D.Lax, "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves", *Comm. Pure. Appl. Math.*, **21**(1968), 467–490.

[14] K.McLeod, "Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in R^n ", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **339** (1993), 495–505.

[15] D.E.Pelinovsky, "Inertia law for spectral stability of solitary waves in coupled nonlinear Schrödinger equations", *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **461** (2005), 783–812.

[16] D.E.Pelinovsky, J.Yang, "Instabilities of multihump vector solitons in coupled nonlinear Schrodinger equations",*Stud. Appl. Math.*, **115** (2005), 109–137.

[17] G.Perelman, "Asymptotic stability of multi-soliton solutions for nonlinear Schrödinger equations", *Comm. Partial Differential Equations*, **29** (2004), 1051–1095.

[18] Л.С. Понтрягин, "Эрмитовы операторы в пространствах с индефинитной метрикой", *Изв. АН СССР, Сер. Матем.*, **8** (1944), 243–280.

[19] B.Sandstede, "Stability of multiple-pulse solutions", *Trans. Am. Math. Soc.*, **350** (1998), 429–472

[20] S.Cuccagna, D.Pelinovsky and V.Vougalter, "Spectra of positive and negative energies in the linearized NLS problem", *Comm.Pure Appl.Math.*, **58**:1 (2005), 1–29

[21] N.J.Zabusky, M.D.Kruskal, "Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states", *Phys.Rev.Lett.*, **15** (1965), 240–243.

[22] V.Zakharov, A.B.Shabat, "Interaction between solitons in a stable medium", *Soviet Phys, JETR* **34** (1972), 62–69.