

# OLYMON

## Issue 7:1

Veillez envoyer vos solutions à

Prof. Edward J. Barbeau  
Department of Mathematics  
University of Toronto  
40 St. George Street, Room 6290  
Toronto, ON M5S 2E4

au plus tard le 28 février 2006. Il est important que votre adresse postale et votre adresse courriel apparaissent en première page. Si vous écrivez votre nom de famille avant votre prénom, soulignez-le.

### PROBLÈMES POUR JANVIER 2006

423. Prouvez ou réfutez: si  $x$  et  $y$  sont des nombres réels avec  $y \geq 0$  et  $y(y+1) \leq (x+1)^2$ , alors  $y(y-1) \leq x^2$ .
424. Transformer l'expression suivante:

$$\frac{x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} - 2}{x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} + 2}$$

en une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont de la forme  $u\sqrt{v}$  où  $u$  et  $v$  représentent des polynômes de degré 1. Quelles sont les valeurs de  $x$  pour lesquelles cette fraction existe?

425. Soit  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  une séquence de nombres réels positifs. Montrer que cette séquence est une série arithmétique si et seulement si, pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}x_n} = \frac{n-1}{x_1x_n}.$$

426. (a) La méthode de pliage suivant permet de faire la trisection d'un angle aigu.

(1) Transcrivez l'angle sur le coin  $P$  d'une feuille rectangulaire de telle sorte qu'il corresponde à l'angle formé par le bord de la feuille ( $PY$ ) et la droite joignant  $P$  et  $X$ . Nommons cet angle  $XPY$ .

(2) Plier le long de  $QZ$  afin que le segment  $PY$  corresponde maintenant au segment  $RW$ , tel que  $PQ = QR$  et  $PY$ ,  $QZ$  et  $RW$  sont parallèles.  $QZ$  se trouve entre  $PY$  et  $RW$ .

(3) Plier la ligne  $AC$  avec  $A$  sur la feuille et  $C$  sur le segment  $PY$  tel que  $P$  se retrouve à présent au point  $P'$  sur  $QZ$  et  $R$ , au point  $R'$  sur  $PX$ .

(4) Supposons que le pliage  $AC$  croise le pliage  $QZ$  au point  $B$  et fait correspondre  $Q$  avec  $Q'$ ; faites un pliage sur  $BQ'$ .

On affirme que le pliage  $BQ'$  passe par  $P$  et divise en trois angles égaux l'angle  $XPY$ .

Expliquer pourquoi la partie (3) est possible. Est-ce que la méthode fonctionne? Pourquoi?

(b) Qu'arrive-t-il si on applique la méthode à un angle droit?

(c) Est-ce que la méthode peut être adaptée pour un angle obtus?

427. Les rayons des trois cercles excrits et du cercle inscrit d'un triangle sont des termes consécutifs dans une série géométrique. Déterminer le plus grand angle de ce triangle.

428.  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  représentent 3 droites dans l'espace.  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  ne sont pas perpendiculaires à  $\mathbf{c}$ . Les points  $P$  et  $Q$  sont situés respectivement sur les droites  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ , de telle sorte que la droite passant par  $P$  et  $Q$

est perpendiculaire à  $\mathbf{c}$ . Le plan perpendiculaire à  $\mathbf{b}$  passant par  $P$  rencontre  $\mathbf{c}$  au point  $R$  et le plan perpendiculaire à  $\mathbf{a}$  passant par  $Q$  rencontre  $\mathbf{c}$  au point  $S$ . Prouver que la distance  $RS$  est constante.

429. Prouver que

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \binom{kn}{n} = (-1)^{n+1} n^n .$$