

Conjecture de type de Serre et formes compagnons pour GSp_4

F. Herzig*

J. Tilouine†

Résumé

On présente une conjecture de type de Serre sur la modularité d'une représentation galoisienne modulo p de rang 4 à valeurs dans le groupe symplectique. Nous supposons que la représentation est irréductible et impaire (au sens symplectique). Nous formulons la condition de modularité en utilisant la cohomologie étale et la cohomologie de de Rham algébrique des variétés de Siegel de niveau premier à p . On se concentre sur le cas où la représentation est ordinaire en p et on donne une liste des poids de Serre correspondante. Lorsque la représentation est modérée, nous conjecturons que chaque poids de cette liste est réalisé, et sinon, nous décrivons un sous-ensemble des poids de la liste qui doivent être réalisés. Nous proposons une construction des classes de cohomologie de de Rham qui réalisent certains de ces poids à l'aide du complexe BGG dual.

Abstract

We present a Serre-type conjecture on the modularity of four-dimensional symplectic mod p Galois representations. We assume that the Galois representation is irreducible and odd (in the symplectic sense). The modularity condition is formulated using the étale and the algebraic de Rham cohomology of Siegel modular varieties of level prime to p . We concentrate on the case when the Galois representation is ordinary at p and we give a corresponding list of Serre weights. When the representation is moreover tamely ramified at p , we conjecture that all weights of this list are modular, otherwise we describe a subset of weights on the list that should be modular. We propose a construction of de Rham cohomology classes using the dual BGG complex, which should realise some of these weights.

*Partiellement soutenu par la NSF (grant DMS-0902044 et accord DMS-0635607).

†Partiellement soutenu par le Projet Blanc ANR-10-BLAN 0114.

1 Introduction

Dans cet article, on présente une conjecture de type de Serre sur la modularité d’une représentation galoisienne modulo p de rang 4 à valeurs dans le groupe symplectique $\bar{\rho} : \Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{GSp}_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Nous supposons la représentation irréductible et motiviquement impaire (c’est-à-dire, que $p = 2$ ou bien que les espaces propres pour l’action de la conjugaison complexe pour les deux valeurs propres 1 et -1 sont des plans lagrangiens). Nous proposons une conjecture sur les poids, mais nous n’abordons pas la question des niveaux de la variété de Siegel dans la cohomologie de laquelle $\bar{\rho}$ apparaît.

La question de la modularité d’une telle représentation, au moins lorsque $\bar{\rho}|_{I_p}$ est supposée ordinaire et de Fontaine–Lafaille de poids p -petits, a été posée par l’un des auteurs en 1995 ([28] et sect. 4 ci-dessous). Dans sa thèse, le premier auteur a formulé pour GL_n/\mathbb{Q} une conjecture de modularité de type de Serre, en donnant la liste complète des poids réguliers possibles lorsque $\bar{\rho}|_{I_p}$ est semi-simple. Le formalisme qu’il a développé est valide pour des groupes réductifs plus généraux. Il produit des systèmes locaux en $\overline{\mathbb{F}}_p$ -vectoriels associés à des $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ sur les espaces localement symétriques de niveau premier à p dans la cohomologie desquels devraient exister des classes propres pour le système de valeurs propres de Hecke associé à $\bar{\rho}$. Ces systèmes locaux, appelés poids de Serre, remplacent le poids $k(\bar{\rho})$ de la conjecture de Serre [25].

Nous discutons maintenant quelques conjectures et résultats dans le cas de $\mathrm{GSp}_4/\mathbb{Q}$ qui expliquent plusieurs poids de cette conjecture de type de Serre. On formule la condition de modularité en utilisant la cohomologie étale et la cohomologie de de Rham algébrique des variétés de Siegel de niveau premier à p , et on se concentre sur le cas où $\bar{\rho}$ est ordinaire en p . Dans le cas où $\bar{\rho}|_{I_p}$ est de plus modérément ramifiée, nous explicitons les poids de Serre prédits. En général, notre liste compte vingt éléments. Parmi ceux-ci, huit ont une interprétation en termes de formes compagnons (p -ordinaires). Ils correspondent de manière naturelle à des twists de $\bar{\rho}$ par des puissances convenables du caractère cyclotomique modulo p comme pour les formes compagnons dans la conjecture de Serre [14]. Quant aux douze autres poids on peut au moins exhiber, dans le cas où la restriction $\bar{\rho}|_{D_p}$ à tout le groupe de décomposition est totalement décomposée, des relèvements cristallins avec les poids de Hodge–Tate correspondants (voir la proposition 4.17 ci-dessous).

Par ailleurs, lorsque $\bar{\rho}$ est p -ordinaire non nécessairement modérée, d’exposants $i_0 = 0 \leq i_1 < i_2 \leq i_3 < p - 1$, nous conjecturons l’existence d’une forme cuspidale holomorphe propre p -ordinaire de poids (k, ℓ) pour $\ell = i_1 + 2$ et $k = i_2 + 1$, de niveau premier à p et de représentation galoisienne résiduelle $\bar{\rho}$.

Sous des hypothèses de décomposabilité partielle de $\bar{\rho}|_{I_p}$, il y a trois twists de $\bar{\rho}$ pour lesquelles nous conjecturons qu'ils sont associés à des formes cuspidales cohomologiques (holomorphes ou de Whittaker) de niveau premier à p et ordinaires en p . Il y a quatre autres twists de $\bar{\rho}$ pour lesquels nous conjecturons aussi qu'ils sont associés à des formes cuspidales cohomologiques ordinaires, mais qui dans notre approche géométrique semblent moins accessibles.

Comme on le décrira avec plus de détails dans la section 5, ces quatre premiers twists correspondent de manière naturelle aux représentants de Kostant dans le groupe de Weyl de GSp_4 modulo le groupe de Weyl du sous-groupe de Levi du parabolique de Siegel. Dans un travail récent [30], le deuxième auteur démontre l'existence d'une forme cuspidale p -adique (et conjecturalement classique) dans le Cas 1, sous certaines hypothèses globales. La méthode consiste à généraliser le travail de Faltings–Jordan en utilisant le complexe BGG dual (introduit par [8], et étudié dans [22] et [24]). Il se peut que les deux autres cas non-triviaux puissent se démontrer avec la même méthode, mais avec des difficultés techniques supplémentaires.

Cependant, notons que, après une version antérieure de cet article, notre conjecture pour les huit poids qu'on vient de mentionner a été récemment établie par Gee et Geraghty [11] par une méthode de relèvement automorphe d'une représentation galoisienne résiduelle modulaire.

Notons que [34] étudie une question préalable à des généralisations ultérieures de la conjecture de type de Serre : étant donné H réductif sur \mathbb{Q}_p et $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow H(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ un homomorphisme « géométrique », quel est le meilleur groupe réductif G/\mathbb{Q} sur lequel chercher une représentation automorphe π et une représentation $r : {}^L G \rightarrow H$ telles que $\rho = r \circ \rho_\pi$ (ρ_π associée à π par la correspondance de Langlands). Par exemple, pour nous si $H = \mathrm{GSp}_4$, la réponse est $G = \mathrm{GSp}_4$ et $r = \mathrm{spin}$.

Le plan de l'article est le suivant. Dans la section 2 on introduit les notations liées au groupe GSp_4 et on discute la condition d'ordinarité dans la section 3. Puis on énonce les conjectures de type de Serre dans la section 4, on donne une explicitation de la liste des poids et on décrit les relèvements cristallins correspondants dans le cas totalement décomposé. Ensuite on étudie dans la section 5 en détail les twists de $\bar{\rho}$ qui correspondent à des formes compagnons et énonce les conjectures correspondants. Finalement, en section 6 on esquisse la méthode, utilisant le complexe BGG dual, qui fournit une forme compagnon (modulo p puis un relèvement p -adique) dans le premier cas.

Remerciements : Le premier auteur tient à remercier Matthew Emerton, Toby Gee et David Geraghty pour des discussions utiles, ainsi que l'I.H.É.S., l'Université de Paris 7 et l'IAS où une partie de ce travail a été réalisée. Le

second auteur remercie Kyoto University, Columbia University et l'Academia Sinica de Taipei où une partie de ce travail a été réalisée, pour leur hospitalité. Les auteurs remercient enfin le rapporteur dont les remarques ont améliorées la qualité de cet article.

2 Notations

Soit (V, ψ) un \mathbb{Z} -module symplectique unimodulaire de rang 4, de base (e_1, e_2, e_3, e_4) avec $\psi(e_1, e_4) = \psi(e_2, e_3) = 1$ et $\psi(e_i, e_j) = 0$ si $i \leq j$ autres que $(1, 4)$ et $(2, 3)$. La matrice de ψ dans cette base est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $G = \mathrm{GSp}_4(V, \psi) = \{X \in \mathrm{GL}_4 : {}^tXJX = \nu \cdot J\}$ le schéma en groupes réductif connexe sur \mathbb{Z} des similitudes de (V, ψ) . Le facteur de similitude ν définit un caractère $\nu_{\mathrm{sim}} : G \rightarrow \mathbb{G}_m$; son noyau est le \mathbb{Z} -schéma en groupes Sp_4 .

Soit $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $s' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, et $1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note $B = TN$, resp. $Q = MU$, $P = M_1U_1$ les décompositions de Levi standard du sous-groupe de Borel B de G stabilisateur du drapeau $\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle$, du parabolique de Siegel Q stabilisateur du plan isotrope $\langle e_1, e_2 \rangle$, resp. du parabolique de Klingen P stabilisateur de la droite $\langle e_1 \rangle$. On a

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \cdot t_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \cdot t_1^{-1} \end{pmatrix} \right\},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cap G,$$

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \right\} \cap G,$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}; {}^tAsDs = \nu \cdot 1_2 \right\},$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1_2 & C \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}; sC \text{ symétrique} \right\},$$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & A & * \\ 0 & 0 & \det A \cdot a^{-1} \end{pmatrix}; A \in \mathrm{GL}_2 \right\} \cap G.$$

Notons que dans cette notation certaines étoiles (resp. certains zéros) représentent des matrices 1×2 ou 2×1 . De même, avec ces notations, on a

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \cdot a^{-1} \end{pmatrix}; A \in \mathrm{GL}_2 \right\},$$

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y & * \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soit $W_G = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl de (G, T) . Son action sur le groupe des caractères est donnée par $w \cdot \lambda(t) = \lambda(w^{-1}tw)$. Il est engendré par (les classes de) $s_0 = \begin{pmatrix} s & 0_2 \\ 0_2 & s \end{pmatrix}$ et $s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il admet la présentation :

$$W_G = \langle s_0, s_1; s_0^2, s_1^2, (s_0 s_1)^4 \rangle.$$

Le groupe de Weyl W_M de M est engendré par s_0 . On a un système de représentants de Kostant de $W_M \backslash W_G$ donné par $W^M = \{1_4, s_1, s_1 s_0, s_1 s_0 s_1\}$.

Soit $X(T)$ (resp. $Y(T)$) le groupe des caractères (resp. cocaractères) de T . On identifie $X(T)$ au réseau de \mathbb{Z}^3 des triplets $(a, b; c) \in \mathbb{Z}^3$ avec $c \equiv a + b \pmod{2}$ par la formule

$$\lambda : t = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \nu t_2^{-1}, \nu t_1^{-1}) \mapsto t_1^a t_2^b \nu^{(c-a-b)/2}.$$

Notons qu'on a alors $\lambda(\mathrm{diag}(z, z, z, z)) = z^c$. Avec ces notations, notre choix des racines simples de G est $\alpha_0 = (1, -1; 0)$ et $\alpha_1 = (0, 2; 0)$; α_0 est la racine courte. De plus, le facteur de similitude $\nu_{\mathrm{sim}} : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ définit le poids de coordonnées $(0, 0; 2)$. Notons $X(T)_+ = \{(a, b; c) \in X(T) : a \geq b \geq 0\}$ l'ensemble des poids dominants. Les α_i correspondent aux réflexions s_i . L'élément $s_1 s_0$, resp. $s_1 s_0 s_1$, envoie $(a, b; c)$ sur $(b, -a; c)$, resp. sur $(-b, -a; c)$.

Soit $(\widehat{G}, \widehat{B}, \widehat{T})$ le groupe réductif dual de (G, B, T) , déterminé à isomorphisme près. Fixons un isomorphisme entre les données radicielles basées

$\psi_0(\widehat{G}) \cong \psi_0(G)^*$. Alors le groupe W_G s'identifie canoniquement au groupe de Weyl $W_{\widehat{G}} = N_{\widehat{G}}(\widehat{T})/\widehat{T}$ de \widehat{G} .

Fixons de plus des épinglages de (G, B, T) et de $(\widehat{G}, \widehat{B}, \widehat{T})$. Alors l'isomorphisme $\mathrm{spin} : \widehat{G} \cong G$ respecte ces épinglages et induit un certain isomorphisme $\psi_0(\widehat{G}) \cong \psi_0(G)$ sur les données radicielles basées, ce qui le caractérise. On donne une formule explicite pour ce dernier isomorphisme dans la section 4, équation (2). L'isomorphisme spin applique le groupe de Weyl $W_{\widehat{G}}$ isomorphiquement sur $W_G = N_G(T)/T$. Le composé

$$\iota : W_G = W_{\widehat{G}} \xrightarrow{\mathrm{spin}} W_G$$

induit un automorphisme qui échange les deux générateurs s_0 et s_1 . Notons que ceci est compatible avec l'invariance de la présentation de W_G par échange de s_0 et s_1 . Voir [22] pour les détails. Ainsi, via ι , $s_1 s_0$ agit par $(a, b; c) \mapsto (-b, a; c)$, et $s_1 s_0 s_1$ agit par $(a, b; c) \mapsto (-a, b; c)$.

3 Ordinarité

Considérons une représentation cuspidale π de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ dont la composante à l'infini est dans la série discrète holomorphe de paramètre de Harish-Chandra $(a+2, b+1; a+b)$ avec $a \geq b \geq 0$; en posant $k = a+3$ et $\ell = b+3$, la construction de Harish-Chandra permet de lui associer des formes modulaires holomorphes de poids (k, ℓ) avec $k \geq \ell \geq 3$. On fixe une telle forme, que l'on note f .

Soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$; fixons un nombre premier p et considérons la représentation galoisienne

$$\rho_{\pi,p} = \rho_{f,p} : \Gamma \rightarrow \mathrm{GSp}_4(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

non ramifiée hors de $\mathrm{Ram}(\pi) \cup \{p, \infty\}$ et telle que le polynôme caractéristique du Frobenius arithmétique ϕ_ℓ en $\ell \neq p$, $\ell \notin \mathrm{Ram}(\pi)$ soit le polynôme de Hecke $P_{\pi,\ell}(X)$, c'est-à-dire le polynôme tel que $P_{\pi,\ell}(\ell^{-s})$ soit l'inverse du facteur d'Euler en ℓ de la fonction L spinorielle de π décalée de $\frac{k+\ell-3}{2}$. On note aussi $P_{f,\ell}(X) = P_{\pi,\ell}(X)$.

L'existence de cette représentation résulte des travaux de R. Taylor [27], Laumon [20] et Weissauer [32], mis à part la symplecticité, qui résulterait de travaux non publiés de Weissauer ou de travaux à paraître de J. Arthur. On la suppose acquise.

Soit \mathcal{H}_q la \mathbb{Z} -algèbre de Hecke sphérique de G en q (c'est le \mathbb{Z} -module des fonctions à support compact sur $G(\mathbb{Q}_q)$, biinvariantes par $G(\mathbb{Z}_q)$). On note $T_{q,1}$,

$T_{q,2}$, resp. $T_{q,0}$ les générateurs de \mathcal{H}_q associés à $\mathrm{diag}(1, 1, q, q)$, $\mathrm{diag}(1, q, q, q^2)$, resp. $\mathrm{diag}(q, q, q, q)$.

Pour tout premier q où π est non ramifiée, on définit les valeurs propres $a_{q,i}$ des opérateurs de Hecke $T_{q,i}$ ($i = 1, 2$).

Définition 3.1. Supposons que π est non ramifié en p . On dit que π est *ordinaire en p* (ou *p -ordinaire*) si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite.

- $\mathrm{ord}_p(a_{p,1}) = 0$ et $\mathrm{ord}_p(a_{p,2}) = b = \ell - 3$.
- On peut ordonner les racines du polynôme de Hecke

$$P_{\pi,p}(X) = P_{f,p}(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)(X - \delta)$$

de sorte que $\mathrm{ord}_p(\alpha) = 0$, $\mathrm{ord}_p(\beta) = \ell - 2$, $\mathrm{ord}_p(\gamma) = k - 1$ et $\mathrm{ord}_p(\delta) = k + \ell - 3$.

L'équivalence provient de la formule $P_{f,p}(X) = X^4 - a_{p,1}X^3 + (pa_{p,2} + 2p^{k+\ell-3}\eta(p))X^2 - p^{k+\ell-3}a_{p,1}\eta(p)X + (p^{k+\ell-3}\eta(p))^2$, où η désigne le caractère de Dirichlet donnant la partie finie du caractère central de π (on l'appelle aussi le Nebentypus de f) ; pour cette formule, voir sect. 3.5 de [26]. On dit aussi que la forme f est p -ordinaire.

Remarque 3.2. Les valuations des racines de $P_{f,p}(X)$ sont deux à deux distinctes par la condition $k \geq \ell \geq 3$. De plus, $a_{p,1} \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{m}_{\mathbb{Z}_p}}$.

Soit \mathcal{O} un anneau de valuation discrète fini et plat sur \mathbb{Z}_p contenu dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ suffisamment grand pour que ρ soit définie dessus, c'est-à-dire qu'il existe un \mathcal{O} -réseau L stable par ρ . Soit ϖ un paramètre uniformisant de \mathcal{O} , $\kappa = \mathcal{O}/(\varpi)$ et soit $\bar{\rho}_{f,p} : \Gamma \rightarrow \mathrm{GSp}_4(\kappa)$ la représentation de Γ sur $L/\varpi L$.

Soit D_p un groupe de décomposition en p dans Γ ; soit $I_p \subset D_p$ son sous-groupe d'inertie. Soit ϵ , resp. ω le caractère cyclotomique p -adique, resp. modulo p . Pour tout nombre u (p -adique ou mod p) on note $\mathrm{nr}(u)$ le caractère non-ramifié de D_p qui envoie le Frobenius arithmétique sur u . Si π est ordinaire en p ([16], [29]), on a par [31] :

$$\rho_{f,p}|_{D_p} \sim \begin{pmatrix} \epsilon^{k+\ell-3}\mathrm{nr}\left(\frac{\delta}{p^{k+\ell-3}}\right) & * & * & * \\ 0 & \epsilon^{k-1}\mathrm{nr}\left(\frac{\gamma}{p^{k-1}}\right) & * & * \\ 0 & 0 & \epsilon^{\ell-2}\mathrm{nr}\left(\frac{\beta}{p^{\ell-2}}\right) & * \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{nr}(\alpha) \end{pmatrix},$$

donc

$$\rho_{f,p}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \epsilon^{k+\ell-3} & * & * & * \\ 0 & \epsilon^{k-1} & * & * \\ 0 & 0 & \epsilon^{\ell-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et aussi

$$\bar{\rho}_{f,p}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & * & * & * \\ 0 & \omega^{k-1} & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 Conjecture de type de Serre pour GSp_4

Soit S un ensemble fini de places de \mathbb{Q} contenant p et ∞ . Pour chaque $\ell \in S$, on fixe un sous-groupe d'inertie $I_\ell \subset \Gamma$. Soit κ un corps fini de caractéristique p . Fixons une fois pour toutes un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$.

Soit $\bar{\rho} : \Gamma \rightarrow \mathrm{GSp}_4(\kappa)$ une représentation S -ramifiée, c'est-à-dire un homomorphisme continu tel que $\bar{\rho}(I_\ell) = 1$ pour tout nombre premier $\ell \notin S$. Supposons que $\bar{\rho}$ soit absolument irréductible. Dans [26], l'un des auteurs a conjecturé que, sous l'hypothèse que $\bar{\rho}$ est modulaire (c'est-à-dire provient d'une forme cuspidale cohomologique π non ramifiée en p pour $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$) et que sa restriction à D_p est triangulaire supérieure avec des caractères sur la diagonale deux à deux distincts, il en est de même pour ses déformations de même type (un ordre des caractères de la diagonale étant fixé).

Il a introduit ([28], section 9) une condition nécessaire de modularité pour $\bar{\rho}$, appelée l'imparité motivique : $\bar{\rho}$ est dite *motiviquement impaire* si $p = 2$ ou $\nu_{\mathrm{sim}} \circ \bar{\rho}(c) = -1$ (pour une conjugaison complexe c) ou, de manière équivalente si

$$\bar{\rho}(c) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

la conjugaison ayant lieu dans GSp_4 .

Il a posé la question suivante (Cours au Tata Institute, 1995, non publié) : si la représentation $\bar{\rho}$ est absolument irréductible, motiviquement impaire et p -ordinaire d'exposants $i_0 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3$ (voir l'équation (1) ci-dessous) où les i_j sont deux à deux distincts avec $i_3 - i_0 < p - 1$, provient-elle d'une représentation cuspidale de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ avec π_∞ dans la série discrète ?

On peut formuler une conjecture légèrement plus générale et plus précise. Supposons que la représentation $\bar{\rho}$ est p -ordinaire. On a donc à conjugaison

près dans GL_4 :

$$(1) \quad \bar{\rho}|_{D_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{i_3} \mathrm{nr}(u_3) & * & * & * \\ 0 & \omega^{i_2} \mathrm{nr}(u_2) & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{i_1} \mathrm{nr}(u_1) & * \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{i_0} \mathrm{nr}(u_0) \end{pmatrix}.$$

Après torsion par une puissance de ω , on peut supposer que les exposants satisfont $i_0 = 0 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3$ et $i_j \leq j(p-2)$ pour $j = 1, 2, 3$. On a nécessairement $i_0 + i_3 = i_1 + i_2$. Cette relation est évidente sous l'hypothèse $i_3 < p-1$, mais en fait, elle est toujours satisfaite car on peut toujours supposer que la conjugaison (1) a lieu dans GSp_4 , comme nous l'a fait remarquer D. Prasad (lettre à l'un des auteurs).

Notons que ce choix d'entiers croissants $i_j \in \mathbb{Z}$ n'est pas unique en général, même si on impose $i_j \leq j(p-2)$. Une fois un tel ordre fixé, supposons en outre que $i_1 < i_2$; il existe alors un couple unique d'entiers (k, ℓ) avec $k \geq \ell \geq 2$ tel que $i_1 = \ell - 2$ et $i_2 = k - 1$. Si de plus les i_j sont deux à deux distincts, on a même $\ell \geq 3$ de sorte qu'il existe (a, b) avec $a \geq b \geq 0$ tel que $i_1 = b + 1$ et $i_2 = a + 2$, et $k = a + 3$, $\ell = b + 3$.

Nous appellerons (k, ℓ) le poids modulaire du couple $(\bar{\rho}, (i_j)_{j=1, \dots, 3})$ constitué de la représentation p -ordinaire $\bar{\rho}$ et de la suite ordonnée $(0, i_1, i_2, i_3)$ des exposants.

Définition 4.1. On dira que les exposants sont p -petits si après torsion par une puissance de ω , on a $0 = i_0 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 < p - 1$.

Dans ce cas, le couple d'entiers (k, ℓ) satisfait la condition $k + \ell - 3 < p - 1$.

Conjecture 0. Soit $(\bar{\rho}, (i_j)_j)$ un couple constitué d'une représentation irréductible motiviquement impaire et p -ordinaire et d'un ordre des exposants avec $i_0 = 0$, $i_1 < i_2$. Supposons ces exposants p -petits. Soit (k, ℓ) son poids modulaire. Supposons que $\bar{\rho}$ soit de Fontaine–Laffaille en p (de poids dans $[0, p-2]$) ; il existe alors une forme cuspidale holomorphe f de poids (k, ℓ) , p -ordinaire et de niveau premier à p , associée à $\bar{\rho}$, au sens que $\bar{\rho}_{f,p}$ est isomorphe à $\bar{\rho}$.

Remarque 4.2. On peut montrer que lorsque les exposants sont deux à deux distincts, la représentation $\bar{\rho}$ est de Fontaine–Laffaille en p de poids dans $[0, p-2]$, en bref $FL^{[0, p-2]}$, si et seulement si les étoiles de la première surdiagonale de $\bar{\rho}|_{D_p}$ sont peu ramifiées au sens de Serre. Cette condition se produit toujours, sauf s'il existe j tel que $i_{j+1} = i_j + 1$ et $u_{j+1} = u_j$ (lorsqu'aucun tel j n'existe, on peut trouver la construction d'un relèvement cristallin dans le lemme 7.6.7 de [11], par exemple). Ainsi la condition $FL^{[0, p-2]}$ est « génériquement satisfaite ».

Préambules à la théorie des poids de Serre :

Lorsque $\bar{\rho}$ est de Fontaine–Laffaille en p , la forme f conjecturale intervient dans la cohomologie de de Rham de la variété de Siegel X de niveau premier à p , à coefficients dans le fibré à connexion associé à la représentation V_λ de GSp_4 de plus haut poids $\lambda = (a, b; a + b)$ dans les notations de [8], chap. VI. Cette remarque est en accord avec la terminologie de [29], par exemple, où l’on dit qu’un poids (k, ℓ) avec $k \geq \ell \geq 3$ est cohomologique.

Par des théorèmes de comparaison classiques, le système de valeurs propres de Hecke de f intervient aussi dans la cohomologie étale $H_{et}^3(X \otimes \bar{\mathbb{Q}}, V_\lambda(\bar{\mathbb{Q}}_p))$ du système local associé à la représentation V_λ . Lorsque la représentation résiduelle $\bar{\rho}$ est absolument irréductible, pour tout choix fixé d’un \mathbb{Z}_p -réseau stable V_λ , il en résulte que la réduction modulo p du réseau

$$\mathrm{Im} (H_{et}^3(X \otimes \bar{\mathbb{Q}}, V_\lambda(\bar{\mathbb{Z}}_p)) \rightarrow H_{et}^3(X \otimes \bar{\mathbb{Q}}, V_\lambda(\bar{\mathbb{Q}}_p)))$$

contient la contragrédiente $\bar{\rho}^\vee$ de $\bar{\rho}$.

On se propose de donner dans ce qui va suivre une formulation de la question de la modularité cohomologique de $\bar{\rho}$ purement en caractéristique p , sans aborder la question de l’existence d’un relèvement automorphe classique en caractéristique zéro. Il faut cependant *a priori* distinguer la question de l’existence d’une classe de cohomologie de de Rham modulo p ou d’une classe de cohomologie étale à coefficients dans des systèmes locaux en $\bar{\mathbb{F}}_p$ -vectoriels, qui représente $\bar{\rho}$. On dit qu’une classe de cohomologie de de Rham c représente $\bar{\rho}$ si elle est propre pour les correspondances de Hecke pour tout $\ell \notin S \cup \{p\}$ premier, et que le polynôme de Hecke $P_{c,\ell}(X)$ est le polynôme caractéristique de l’image du Frobenius (géométrique) par la contragrédiente $\bar{\rho}^\vee$.

La comparaison entre les deux formulations, celle en termes d’une classe de cohomologie de de Rham, et celle en termes d’une classe de cohomologie étale, repose sur la validité du théorème de comparaison étale–cristallin modulo p [7] de Faltings. Les poids permis *a priori* pour ce théorème de comparaison modulo p , sont les (k, ℓ) tels que $k \geq \ell \geq 3$ avec $k + \ell - 3 < p - 1$ qui correspondent, comme on le verra, à des points entiers de l’alcôve fondamentale, alors que la conjecture ci-dessous qui donne les poids de Serre possibles pour une représentation résiduelle $\bar{\rho}$ fait intervenir des poids p -restreints qui peuvent être néanmoins hors de cette alcôve. Pour ces poids, la comparaison modulo p n’est pas valable, à moins que ces classes ne se relèvent en caractéristique nulle car la limitation sur les poids pour le théorème de comparaison disparaît alors.

Le travail récent d’un des auteurs [15], a permis de formuler une conjecture presque complète dans le cas de GL_n lorsque la représentation galoisienne résiduelle est modérée en p . Elle est exprimée en termes de classes de cohomologie singulière à coefficients dans des systèmes locaux en $\bar{\mathbb{F}}_p$ -vectoriels, et

non pas en termes de cohomologie étale, puisqu'il n'y a pas en général d'action de Galois sur la cohomologie des espaces localement symétriques, non algébriques, associés à GL_n .

Dans le cas de $G = \mathrm{GSp}_4$, l'objet de la présente section est de spécifier, sous des hypothèses similaires, les systèmes locaux étales en $\overline{\mathbb{F}}_p$ -vectoriels sur la variété de Siegel sur \mathbb{Q} de niveau premier à p dans la cohomologie desquels la contragrédiente $\overline{\rho}^\vee$ intervient. Ces systèmes locaux sont associés à des représentations irréductibles du groupe fini $G(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qu'on appellera poids de Serre. *A posteriori*, on peut interpréter la question de 1995 comme celle de l'existence de l'une d'entre elles, de plus haut poids $(a, b; a + b)$. Nous donnons ici la liste complète des poids de Serre réguliers (voir déf. 4.6) pour $\overline{\rho}$ p -ordinaire modérée.

Nous commençons en posant la définition suivante.

Définition 4.3. Un *poids de Serre* est une représentation irréductible du groupe fini $G(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, à isomorphisme près.

Cette notion apparaissait implicitement dans [2] pour GL_2 puis a été utilisée systématiquement dans [1] et [5].

Jusqu'à la prop. 4.11 on considérera G comme groupe sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Pour $\lambda \in X(T)$ dominant, le G -module dit de Weyl dual est défini par l'induction algébrique

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= \mathrm{Ind}_{B^-}^G(\overline{\mathbb{F}}_p(\lambda)) \\ &= \{f \in \mathrm{Mor}(G, \mathbb{A}^1) : f(bg) = \lambda(b)f(g) \forall g \in G, b \in B^-\} \end{aligned}$$

où B^- désigne le Borel opposé de B . Le plus grand G -sous-module semisimple $F(\lambda) := \mathrm{soc}_G W(\lambda)$ est isomorphe au G -module simple de plus haut poids λ [18], II.2.4.

Définition 4.4. On introduit le sous-ensemble $X_1(T)$ de $X(T)$ des *poids p -restreints*,

$$\begin{aligned} X_1(T) &= \{\lambda \in X(T) : 0 \leq \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle < p \quad \forall i\} \\ &= \{(a, b; c) \in X(T) : 0 \leq a - b < p, 0 \leq b < p\}, \end{aligned}$$

ainsi que le sous-groupe

$$\begin{aligned} X^0(T) &= \{\lambda \in X(T) : \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle = 0 \quad \forall i\} \\ &= \{(0, 0; c) : c \in 2\mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Comme $G' \cong \widehat{\mathrm{Sp}}_4$ est simplement connexe, on a par une généralisation simple d'un théorème classique de Steinberg (voir [15], prop. 1.3 dans l'appendice).

Proposition 4.5. *Tout poids de Serre est la restriction aux points \mathbb{F}_p -rationnels d'un G -module simple $F(\lambda)$ avec $\lambda \in X_1(T)$. Si $\lambda, \lambda' \in X_1(T)$ on a $F(\lambda) \cong F(\lambda')$ comme représentation de $G(\mathbb{F}_p)$ si et seulement si $\lambda - \lambda' \in (p-1)X^0(T)$.*

Définition 4.6. Un poids de Serre F est dit *régulier* si $F \cong F(\lambda)$ avec $0 \leq \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle < p-1$ pour $i = 1, 2$. On dit de même qu'un tel λ est p -régulier et on note $X_{\mathrm{rég}}(T) \subset X_1(T)$ l'ensemble des poids p -réguliers.

En particulier, il y a $p^2(p-1)$ poids de Serre dont $(p-1)^3$ sont réguliers.

Soit X le modèle canonique, défini sur \mathbb{Q} , de la tour $(X_K)_K$ des variétés de Shimura pour G dont le niveau K parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de $G(\widehat{\mathbb{Z}}) = G(\widehat{\mathbb{Z}}^p) \times G(\mathbb{Z}_p)$ de la forme $K = K^p \times G(\mathbb{Z}_p)$ pour un K^p arbitraire de niveau premier à p . Soit $f : A \rightarrow X$ la variété abélienne universelle principalement polarisée avec structure de niveau premier à p . En fixant un point géométrique \bar{x} de X , on obtient une représentation continue $\phi_{\bar{x}} : \pi_1(X, \bar{x}) \rightarrow \mathrm{GSp}(A_{\bar{x}}[p]^\vee) \cong G(\mathbb{F}_p)$ associée au faisceau étale localement constant $R^1 f_* \mathbb{Z}/p$. Pour toute représentation (W, r) de G définie sur \mathbb{F}_p , la composée $r \circ \phi_{\bar{x}}$ fournit par la théorie du π_1 un faisceau étale localement constant W_X sur X .

Définition 4.7. On dit que $\bar{\rho}$ est *modulaire de poids de Serre* $F(\lambda)$ si sa contragrédiente $\bar{\rho}^\vee$ intervient comme sous-représentation du Γ -module $H_{\mathrm{ét}}^*(X \times \overline{\mathbb{Q}}, F(\lambda)_X)$. On note $\mathcal{W}(\bar{\rho})$ l'ensemble de ces poids de Serre, et $\mathcal{W}_{\mathrm{rég}}(\bar{\rho})$ le sous-ensemble de ceux qui sont réguliers.

Supposons maintenant que $\bar{\rho}$ soit modérément ramifiée en p . Pour énoncer la conjecture, on va définir une représentation $V(\bar{\rho}|_{I_p})$, de dimension finie sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$, du groupe fini $G(\mathbb{F}_p)$, ainsi qu'un opérateur \mathcal{R} envoyant les poids de Serre vers les poids de Serre réguliers.

Commençons par l'opérateur \mathcal{R} . Soient $\tilde{\rho} = (2, 1; 3) \in X(T)$ la demi-somme des racines positives à translation par $X^0(T)$ près, et $w_0 = (s_0 s_1)^2$ l'élément le plus long de W_G . Si $w \in W_G$ et $\mu \in X(T)$ on note

$$w \cdot \mu = w(\mu + \tilde{\rho}) - \tilde{\rho}.$$

Pour tout $\mu \in X(T)$ on définit $F(\mu)_{\mathrm{rég}}$ de la manière suivante : on choisit $\mu' \in X_{\mathrm{rég}}(T)$ tel que $\mu - \mu' \in (p-1)X(T)$ et on pose $F(\mu)_{\mathrm{rég}} = F(\mu')$. Il est facile de vérifier que c'est indépendant du choix de μ' . Finalement on définit

$$\mathcal{R}(F(\lambda)) := F(w_0 \cdot (\lambda - p\tilde{\rho}))_{\mathrm{rég}}.$$

Passons à $V(\bar{\rho}|_{I_p})$. Dans ce qui suit, on utilisera le groupe dual \widehat{G} (sur \mathbb{F}_p), identifié avec GSp_4 par l'isomorphisme spin (voir p. 6). Pendant les paragraphes suivants on utilisera le langage classique pour les groupes algébriques, donc on écrira G à la place de $G(\overline{\mathbb{F}}_p)$, etc. On note Fr le morphisme de Frobenius sur G ou \widehat{G} . On a une dualité entre les couples (\mathbb{T}, θ) constitués d'un tore maximal rationnel $\mathbb{T} \subset G$ et d'un caractère $\theta : \mathbb{T}^{\mathrm{Fr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ et les couples $(\widehat{\mathbb{T}}, \sigma)$ constitués d'un tore maximal rationnel $\widehat{\mathbb{T}} \subset \widehat{G}$ et d'un élément $\sigma \in \widehat{\mathbb{T}}^{\mathrm{Fr}}$. De tels couples en dualité sont dits *maximalement déployés* si le rang rationnel de $\widehat{\mathbb{T}}$ est maximal parmi tous les tores maximaux rationnels de \widehat{G} qui contiennent σ [6], §5.

L'application V est alors définie par le diagramme suivant [15], §6.4 (utilisant que $Z(G) \cong \mathbb{G}_m$ est connexe). Ici l'action de $\widehat{G}^{\mathrm{Fr}}$, resp. de G^{Fr} , est donnée par conjugaison. Les bijections verticale à gauche et horizontale en bas dépendent du choix d'un générateur du groupe d'inertie modéré I_p^{mod} , mais l'application V est indépendante de ce choix. La représentation $R_{\mathbb{T}}^\theta$ associée à un couple (\mathbb{T}, θ) est celle définie par Deligne–Lusztig [6].

$$\begin{array}{ccc} \cong \left\{ \begin{array}{l} \tau : I_p \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{F}}_p) \text{ modérées} \\ \text{qui s'étendent à } D_p \end{array} \right\} & \xrightarrow{-V-} & \left\{ \begin{array}{l} \text{représentations virtuelles} \\ \text{de } G^{\mathrm{Fr}} \text{ sur } \overline{\mathbb{Q}}_p \end{array} \right\} / \cong \\ \updownarrow & & \updownarrow R_{\mathbb{T}}^\theta \\ \widehat{G}^{\mathrm{Fr}} \backslash \left\{ \begin{array}{l} \text{couples } (\widehat{\mathbb{T}}, \sigma), \sigma \in \widehat{\mathbb{T}}^{\mathrm{Fr}} \\ \text{max. déployés} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\text{dualité}} & \left\{ \begin{array}{l} \text{couples } (\mathbb{T}, \theta), \theta : \mathbb{T}^{\mathrm{Fr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times \\ \text{max. déployés} \end{array} \right\} / G^{\mathrm{Fr}} \end{array}$$

Remarquons que $(-1)^{3-\mathrm{rg}_{\mathbb{F}_p} \mathbb{T}} V(\tau)$ est toujours une représentation effective [6], 10.10. Les classes de G^{Fr} -conjugaison de tores maximaux rationnels sont paramétrées par les classes de conjugaison de W (voir par exemple [6], 1.14 ou [15], §4.1). En utilisant la preuve de [6], 10.10, on peut vérifier que $(-1)^{3-\mathrm{rg}_{\mathbb{F}_p} \mathbb{T}} V(\tau)$ est l'induite d'un caractère de $B(\mathbb{F}_p)$, resp. l'induite parabolique d'une représentation cuspidale de $M(\mathbb{F}_p)$, resp. l'induite parabolique d'une représentation cuspidale de $M_1(\mathbb{F}_p)$, resp. une représentation cuspidale de $G(\mathbb{F}_p)$ si \mathbb{T} est un tore de type $\{1\}$, resp. $\{s_0, s_1 s_0 s_1\}$, resp. $\{s_1, s_0 s_1 s_0\}$, resp. $\{s_0 s_1, s_1 s_0\}$ ou $\{w_0\}$.

Pour $\bar{\rho}$ modérément ramifiée en p posons

$$\mathcal{W}^2(\bar{\rho}|_{I_p}) = \mathcal{R}(\mathrm{JH}(\overline{V(\bar{\rho}|_{I_p})})).$$

Conjecture 1. *Soit $\bar{\rho} : \Gamma \rightarrow \mathrm{GSp}_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$ une représentation irréductible et motiviquement impaire. Alors,*

(i) *l'ensemble $\mathcal{W}(\bar{\rho})$ des poids de Serre de $\bar{\rho}$ est non-vide et son sous-ensemble $\mathcal{W}_{\mathrm{rég}}(\bar{\rho})$ des poids réguliers est contenu dans $\mathcal{W}^2(\bar{\rho}|_{I_p}^{\mathrm{ss}})$,*

(ii) si de plus $\bar{\rho}$ est modérément ramifiée en p , on a

$$\mathcal{W}_{\text{rég}}(\bar{\rho}) = \mathcal{W}^?(\bar{\rho}|_{I_p}).$$

Remarque 4.8. La détermination des poids de Serre irréguliers semble pour le moment hors d'atteinte. On s'attend néanmoins à ce que dans le cas où $\bar{\rho}|_{I_p}$ est modérée et générique, $\mathcal{W}(\bar{\rho})$ ne contienne aucun poids irrégulier.

Remarque 4.9. L'inclusion prédite dans la partie (i) de la conjecture est analogue à la propriété de $W_p(\rho)$ dans la conjecture de Buzzard–Diamond–Jarvis pour les représentations de degré deux d'un corps totalement réel [5], §3.2.

Remarque 4.10. Cette conjecture ne nécessite pas la condition de p -ordinarité de $\bar{\rho}|_{I_p}$. Cependant dans la détermination explicite qui suit de l'ensemble $\mathcal{W}^?(\bar{\rho}|_{I_p})$, on se limitera au cas p -ordinaire. *Désormais, on suppose donc que $\bar{\rho}$ est p -ordinaire.*

Pour cette détermination, la notion d'alcôve [18], II.6 sera essentielle. On note C_i ($0 \leq i \leq 3$) l'ensemble des $(x, y; z) - \tilde{\rho} \in X(T) \otimes \mathbb{R}$ tel que, respectivement,

$$\begin{aligned} C_0 &: x > y > 0, \quad x + y < p, \\ C_1 &: x + y > p, \quad y < x < p, \\ C_2 &: x - y < p < x, \quad x + y < 2p, \\ C_3 &: y < p, \quad x + y > 2p, \quad x - y < p. \end{aligned}$$

Ce sont les seules alcôves pertinentes ici car $X_1(T) = X(T)_+ \cap \bigcup_{i=0}^3 \bar{C}_i$.

Si $\mu \in X(T) \cong Y(\hat{T})$, on notera $\bar{\mu} \in Y(\mathrm{GSp}_4)$ le copoids qui correspond à μ par l'isomorphisme spin. Rappelons que si $\mu = (a, b; c) \in X(T)$, alors $\bar{\mu}$ est donné par

$$(2) \quad \bar{\mu} : t \mapsto \begin{pmatrix} t^{(a+b+c)/2} & & & \\ & t^{(a-b+c)/2} & & \\ & & t^{(-a+b+c)/2} & \\ & & & t^{(-a-b+c)/2} \end{pmatrix} \in Y(\mathrm{GSp}_4).$$

Pour $\mu \in X(T)$ définissons alors la représentation modérée du groupe d'inertie,

$$\tau(1, \mu) = \bar{\mu} \circ \omega : I_p \rightarrow \mathrm{GSp}_4(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

où le $\ll 1 \gg$ signifie qu'il s'agit d'une somme directe des puissances du caractère fondamental de niveau un.

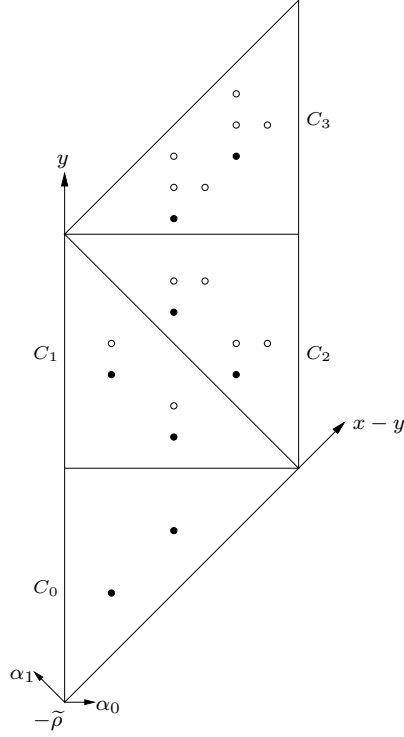


FIGURE 1 – Les vingt poids prédits (situation générique)

Soit $\bar{\rho} : \Gamma \rightarrow \mathrm{GSp}_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$ une représentation p -ordinaire et modérée, il est facile de voir qu'il existe $\mu \in X(T)$ tel que $\bar{\rho}|_{I_p} \cong \tau(1, \mu)$.

Pour la définition de l'ordre partiel \uparrow sur $X(T)$, qui est plus grossier que \leq , on renvoie à [18], II.6. Mais dans tous cet article il suffit de savoir que la restriction de \uparrow aux poids $\cup \overline{C}_i \cap X(T)$ est l'ordre partiel minimal satisfaisant la condition suivante. Pour chaque $\lambda \in \overline{C}_i \cap X(T)$ ($i = 0, 1, 2$) et r_i la réflexion affine par rapport au mur entre les alcôves C_i et C_{i+1} , on a $\lambda \uparrow r_i(\lambda)$. En particulier, pour n'importe quels $0 \leq i \leq j \leq 3$ et pour chaque $\lambda \in \overline{C}_i \cap X(T)$ il existe un unique poids $\lambda' \in \overline{C}_j \cap X(T)$ tel que $\lambda \uparrow \lambda'$.

Proposition 4.11. *Soit $\tau = \tau(1, \mu)$ une représentation de I_p comme ci-dessus. Alors*

- on a $V(\tau) \cong \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_p)}^{G(\mathbb{F}_p)}(\tilde{\mu}|_{T(\mathbb{F}_p)})$ où $\tilde{\mu} : T(\mathbb{F}_p) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ est le relèvement de Teichmüller de $\mu : T(\mathbb{F}_p) \rightarrow \mathbb{F}_p^\times$,

Pour décomposer ces modules de Weyl on utilise les formules suivantes. Puisque

$$(4) \quad W(w \cdot \lambda) = \mathrm{sgn}(w)W(\lambda) \quad \forall w \in W_G$$

[18], II.5.9(1) on peut se ramener d'abord au cas où λ est dominant et en fait p -restreint. Pour un tel poids $\lambda \in X_1(T)$, on a

$$(5) \quad W(\lambda) = F(\lambda) + F(s_1 s_0 s_1 \cdot \lambda + p(2, 2; 0)) \quad \text{si } \lambda \in C_3,$$

$$(6) \quad W(\lambda) = F(\lambda) + F(s_0 s_1 s_0 \cdot \lambda + p(2, 0; 0)) \quad \text{si } \lambda \in C_2,$$

$$(7) \quad W(\lambda) = F(\lambda) + F(s_1 s_0 s_1 \cdot \lambda + p(1, 1; 0)) \quad \text{si } \lambda \in C_1,$$

$$(8) \quad W(\lambda) = F(\lambda) \quad \text{si } \lambda \in C_0.$$

Remarquons que si $\lambda \in C_i$ avec $1 \leq i \leq 3$, les composants de $W(\lambda)$ sont dans C_i et C_{i-1} . Si $\lambda \in X_1(T) \setminus \cup_{i=0}^3 C_i$, $W(\lambda)$ est irréductible sauf si $\langle \lambda + \tilde{\rho}, \alpha_0^\vee \rangle = p$ et $p/2 < \langle \lambda + \tilde{\rho}, \alpha_1^\vee \rangle < p$, ou $p = 2$ et λ est de la forme $(1, 1; *)$. Dans ces cas exceptionnels $W(\lambda)$ se décompose selon (5) [17], §7. (Bien que les résultats soient énoncés pour Sp_4 dans cet article de Jantzen, ils sont encore valables pour GSp_4 parce que son groupe dérivé est Sp_4 .)

Nous allons maintenant étudier le membre de droite de l'égalité (3). En utilisant l'équivalence

$$(9) \quad \tau(1, \mu) \cong \tau(1, \mu') \iff \mu' \in W_G \mu + (p-1)X(T),$$

nous pouvons supposer dorénavant que

$$(10) \quad x - y \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x \leq (p-1)/2.$$

Observons que pour $G = \mathrm{GSp}_4$, pour tout poids ν p -régulier et pour tout poids $\nu' \in X(T)$ tel que $\nu' + \tilde{\rho}$ soit dominant et $\nu' \uparrow \nu$, on a

$$0 \leq \langle \nu' + \tilde{\rho}, \alpha_i^\vee \rangle < p \quad \forall i.$$

(Cette propriété est particulière à la géométrie des alcôves de GSp_4 .) Il résulte donc facilement de (9) que les ν' dans le membre de droite de (3) sont précisément

$$\begin{aligned} \nu'_{0,A} &= (x, y; z) - \tilde{\rho}, & \nu'_{0,B} &= (p-1-x, y; z+p-1) - \tilde{\rho}, \\ \nu'_{1,A} &= (p-1-y, p-1-x; z) - \tilde{\rho}, & \nu'_{1,B} &= (p-1-y, x; z+p-1) - \tilde{\rho}, \\ \nu'_{2,A} &= (y+p-1, p-1-x; z) - \tilde{\rho}, & \nu'_{2,B} &= (y+p-1, x; z+p-1) - \tilde{\rho}, \\ \nu'_{3,A} &= (x+p-1, p-1-y; z) - \tilde{\rho}, & \nu'_{3,B} &= (2p-2-x, p-1-y; z+p-1) - \tilde{\rho}, \end{aligned}$$

à $(p-1)X^0(T)$ près. (Cette liste est valable même si $x = y$ ou $y = 0$.)

Commençons à comparer les deux membres de l'équation (3). On dira qu'un $\nu' \in X(T)$ *explique* une représentation W de $G(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ si

$$(11) \quad \{F(\nu) : \nu \in X_{\mathrm{rég}}(T), \nu' \uparrow \nu\} = \mathcal{R}(\mathrm{JH}(W)).$$

Alors

$$(12) \quad \nu'_{0,X} \text{ explique } W_{3,X} \oplus W_{1,X'} \quad \text{si } \nu'_{0,X} \in C_0,$$

$$(13) \quad \nu'_{1,X} \text{ explique } W_{2,X} \oplus W_{0,X'} \quad \text{si } \nu'_{1,X} \in C_1,$$

$$(14) \quad \nu'_{2,X} \text{ explique } W_{1,X} \quad \text{si } \nu'_{2,X} \in C_2,$$

$$(15) \quad \nu'_{3,X} \text{ explique } W_{0,X} \quad \text{si } \nu'_{3,X} \in C_3,$$

où « X » signifie soit « A » soit « B ». En particulier, si ces huit conditions sont satisfaites simultanément, la proposition est prouvée. Dans une première étape on va étendre la preuve aux cas où $\nu'_{i,X} \in \overline{C}_i$ pour chaque $0 \leq i \leq 3$. Avec cette hypothèse, le même raisonnement que précédemment s'applique pourvu que $\langle \nu'_{i,X} + \tilde{\rho}, \alpha_j^\vee \rangle \neq 0$ pour chaque i, j . Si $\langle \nu'_{1,X} + \tilde{\rho}, \alpha_0^\vee \rangle = 0$, l'équation (13) n'est plus valable parce qu'un poids de Serre manque à la gauche de l'équation (11) ; mais ça ne pose pas un problème car c'est $F(\nu'_{3,Y})$ (où « Y » est ou « A » ou « B » mais pas égale à « X »). Un argument similaire s'applique si $\langle \nu'_{0,X} + \tilde{\rho}, \alpha_0^\vee \rangle = 0$, auquel cas il manquent en général deux poids au membre de gauche, ou si $\langle \nu'_{0,X} + \tilde{\rho}, \alpha_1^\vee \rangle = 0$. (Les poids qui manquent au membre de gauche de (11) dans tous ces cas correspondent aux « discontinuités » de \mathcal{R} , i.e., aux poids λ où $w_0 \cdot (\lambda - p\tilde{\rho}) \notin X_{\mathrm{rég}}(T)$; il y a alors toujours un autre ν' qui explique le poids qui manque parce que $\tau(1, -)$ est constant sur $\nu' + \tilde{\rho} + (p-1)X(T)$.)

Remarquons ensuite que (15) est vraie même si $\nu'_{3,X} \in \overline{C}_2$ (même argument que pour $\nu'_{2,X}$).

Il reste à traiter les cas où $x = y$ ou $y = 0$. Si $y = 0$ et $x \neq y$, tout marche comme $\nu'_{2,X} = \nu'_{1,X} \in \overline{C}_1$ et $W_{2,X} = W_{1,X}$.

Si $x = y$ et $0 < y < (p-1)/2$, les équations (12)–(15), sauf (13) quand $X = B$, sont satisfaites. Comme $\nu'_{1,B} = \nu'_{0,B} \in C_0$ et $W_{2,B} = W_{3,B}$ il suffit de montrer que $W_{0,B'}$ ne contribue pas à $\mathcal{R}(\mathrm{JH}(\overline{V}(\tilde{\rho}|_{I_p})))$, c'est-à-dire ne change que les multiplicités des composants. Soit $F_{1,B'}$ (resp., $F_{3,A}$) le composant de $W_{1,B'}$ (resp., $W_{3,A}$) avec plus haut poids dans \overline{C}_0 (resp. \overline{C}_2). Alors, en effet, $W_{0,B'} = -F_{1,B'}$ et $\mathcal{R}(F_{1,B'}) = \mathcal{R}(F_{3,A})$. Si $x = y$ et $y = (p-1)/2$, on traite en plus le cas (13) pour $X = A$ de la même manière.

Supposons finalement que $x = y = 0$. Observons que $\nu'_{2,A} = \nu'_{3,A} = \nu'_{1,A} \in C_1$, $W_{1,A} = W_{0,A} = W_{2,A}$ et $\nu'_{2,B} = \nu'_{1,B} = \nu'_{0,B} \in C_0$, $W_{1,B} = W_{2,B} = W_{3,B}$. Les équations (12), (13) si $X = A$ et (15) si $X = B$ sont satisfaites. Il ne reste qu'à constater que $W_{1,B'} = 0$. On vérifie aisément que l'argument de ce

paragraphe est encore valable si $p = 2$ (et c'est l'unique cas qui peut arriver si $p = 2$). \square

Lemme 4.14. *On a*

$$\mathcal{W}^2(\tau \otimes \omega^c) \cong \mathcal{W}^2(\tau) \otimes \nu_{\mathrm{sim}}^c \quad \forall c \in \mathbb{Z},$$

où $\nu_{\mathrm{sim}} : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ est le facteur de similitudes de G . De même,

$$\mathcal{W}(\bar{\rho} \otimes \omega^c) \cong \mathcal{W}(\bar{\rho}) \otimes \nu_{\mathrm{sim}}^c \quad \forall c \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Pour la première assertion, on observe que $\nu_{\mathrm{sim}}|_T = (0, 0; 2) \in X(T) \cong Y(\widehat{T})$ correspond par l'isomorphisme spin au cocaractère central $\zeta : z \mapsto \mathrm{diag}(z, z, z, z)$ de \mathbb{G}_m vers G (voir (2)). Puisque ν_{sim} et ζ sont invariants par conjugaison et $R_{\mathbb{T}}^{\theta \tilde{\nu}_{\mathrm{sim}}} \cong R_{\mathbb{T}}^{\theta} \otimes \tilde{\nu}_{\mathrm{sim}}$ ([6], 1.27), on a $V(\tau \otimes \omega^c) \cong V(\tau) \otimes \tilde{\nu}_{\mathrm{sim}}^c$. Finalement, on utilise que $\mathcal{R}(F \otimes \nu_{\mathrm{sim}}) \cong \mathcal{R}(F) \otimes \nu_{\mathrm{sim}}$.

Pour la deuxième assertion, rappelons la construction du système local F_X associé à une représentation (F, ρ_F) de $G(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Soit $f : A \rightarrow X_{\mathbb{Q}}$ le schéma abélien universel et soit $\phi_{\bar{x}} : \pi_1(X_{\mathbb{Q}}, \bar{x}) \rightarrow \mathrm{GSp}(A_{\bar{x}}[p]^{\vee}) \cong G(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ la représentation du groupe fondamental de $X \times \mathbb{Q}$ (pour un point géométrique fixé), associée au faisceau étale localement constant $R^1 f_* \mathbb{Z}/p$. Le système local F_X est associé à la représentation $\rho_F \circ \phi_{\bar{x}}$ du groupe fondamental. Soit $\rho_{\bar{x}} : \pi_1(X_{\mathbb{Q}}, \bar{x}) \rightarrow \mathrm{GSp}(A_{\bar{x}}[p]) \cong G(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ la représentation associée au revêtement étale $A[p] \rightarrow X_{\mathbb{Q}}$ des points de p -torsion. Comme la forme symplectique sur $A_{\bar{x}}[p]$ est donnée par l'accouplement de Weil, on a pour tout $P, Q \in A_{\bar{x}}[p] : \langle P^{\sigma}, Q^{\sigma} \rangle = \langle P, Q \rangle^{\nu_{\mathrm{sim}} \circ \rho_{\bar{x}}(\sigma)} = \langle P, Q \rangle^{\omega(\sigma)}$. On trouve donc $\nu_{\mathrm{sim}} \circ \rho_{\bar{x}} = \omega$ ce qui implique $\nu_{\mathrm{sim}} \circ \phi_{\bar{x}} = \omega^{-1}$. Il s'ensuit que

$$H_{\mathrm{et}}^{\bullet}(X \times \overline{\mathbb{Q}}, F(\lambda)_X \otimes \nu_{\mathrm{sim}, X}^c) = H_{\mathrm{et}}^{\bullet}(X \times \overline{\mathbb{Q}}, F(\lambda)_X) \otimes \omega^{-c}.$$

Le résultat en découle. \square

La preuve de la proposition 4.11 donne le corollaire suivant, qui fournit une description explicite de $\mathcal{W}^2(\tau)$ dans la plupart des cas, à torsion près.

Corollaire 4.15. *Supposons que $\tau : I_p \rightarrow \mathrm{GSp}_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est donnée par*

$$\tau \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \tau(1, (x, y; x + y)),$$

où $k > \ell > 3$, $k + \ell < p + 1$ et $x = k - 1$, $y = \ell - 2$. Alors $\mathcal{W}^2(\tau)$ consiste en les 20 poids de Serre $F(\nu)$ avec $\nu + \tilde{\rho} \in X_{\mathrm{rég}}(T) + \tilde{\rho}$ parcourant :

C_0	$(x, y; x + y),$	$(p - 1 - x, y; x + y + p - 1),$
C_1	$(p - 1 - y, p - 1 - x; x + y),$	$(p - 1 - y, x; x + y + p - 1),$
$C_0 \rightarrow C_1$	$(p - y, p - x; x + y),$	$(p - y, x + 1; x + y + p - 1),$
C_2	$(y + p - 1, p - 1 - x; x + y),$	$(y + p - 1, x; x + y + p - 1),$
$C_1 \rightarrow C_2$	$(y + p + 1, p - 1 - x; x + y),$	$(y + p + 1, x; x + y + p - 1),$
$C_0 \rightarrow C_2$	$(y + p, p - x; x + y),$	$(y + p, x + 1; x + y + p - 1),$
C_3	$(x + p - 1, p - 1 - y; x + y),$	$(2p - 2 - x, p - 1 - y; x + y + p - 1),$
$C_2 \rightarrow C_3$	$(x + p + 1, p + 1 - y; x + y),$	$(2p - x, p + 1 - y; x + y + p - 1),$
$C_1 \rightarrow C_3$	$(x + p + 1, p - 1 - y; x + y),$	$(2p - x, p - 1 - y; x + y + p - 1),$
$C_0 \rightarrow C_3$	$(x + p, p - y; x + y),$	$(2p - 1 - x, p - y; x + y + p - 1).$

Ici la notation $\ll C_j \rightarrow C_i \gg$ pour $j < i$, resp. $\ll C_i \gg$, veut dire que les ν correspondants sont situés dans l'alcôve C_i et qu'ils sont obtenus en commençant par un $\nu' \in C_j$, resp. par $\nu' = \nu$, dans la description de $\mathcal{W}^2(\tau)$ de la prop. 4.11. Il y a une seule exception : si $k - \ell = 1$ ou $k + \ell = p$, un ν de la rangée $\ll C_3 \gg$ se trouve sur la frontière entre C_2 et C_3 .

Remarque 4.16. Supposons que $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{f,p}$ avec f de poids (k, ℓ) et $k > \ell > 3$ et $k + \ell < p + 1$ telle que $\bar{\rho}|_{I_p}$ est p -ordinaire modérée. Notons $\lambda = (a, b; a + b) = (x, y; x + y) - \tilde{\rho}$ le « poids fondamental ». Alors les huit poids ν des rangées $\ll C_i \gg$ se répartissent en deux sous-ensembles. Le premier est le sous-ensemble des poids p -réguliers parmi $w \cdot \lambda + \mathbb{Z}(p - 1, p - 1)$ où $w \in W^M$ parcourt l'ensemble des représentants de Kostant dans W_G , et le second est le sous-ensemble des poids p -réguliers parmi $w \cdot \lambda + \mathbb{Z}(p - 1, 0)$ pour $w \in W_G \setminus W^M$. Les poids de Serre correspondants s'appellent les poids compagnons de f (ou de son poids fondamental).

Remarquons que sous la condition plus faible $k \geq \ell \geq 3$ et $k + \ell - 3 < p - 1$, qui provient de la théorie de Fontaine–Laffaille, on a toujours ces huit poids compagnons du poids fondamental. Ils sont tous p -restreints mais peuvent se situer sur des murs ou sur des alcôves contiguës à celles de la liste ci-dessus. On y reviendra dans la prochaine section.

En ce qui concerne les douze poids dans les rangées $\ll C_j \rightarrow C_i \gg$, on peut justifier leur présence dans la liste par la proposition suivante. On dira qu'une représentation $\rho_p : D_p \rightarrow \mathrm{GSp}_4(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est *cristalline à poids de Hodge–Tate* $\xi \in Y(T)$ si $j \circ \rho_p$ est cristalline à poids de Hodge–Tate $j \circ \xi$ (qui s'identifie à un multiensemble de quatre entiers), où $j : \mathrm{GSp}_4 \hookrightarrow \mathrm{GL}_4$ est l'inclusion canonique.

Proposition 4.17. *Supposons que la représentation locale $\bar{\rho}_p : D_p \rightarrow \mathrm{GSp}_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est totalement décomposée. Alors pour chaque $\mu \in X_{\mathrm{rég}}(T) + \tilde{\rho}$ tel que $F(\mu - \tilde{\rho}) \in \mathcal{W}^?(\bar{\rho}_p|_{I_p})$ il existe une représentation cristalline $\rho_p : D_p \rightarrow \mathrm{GSp}_4(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ à poids de Hodge–Tate $\bar{\mu} \in Y(T)$ qui relève $\bar{\rho}_p$.*

Remarque 4.18.

(i) Cet énoncé fournit un indice de nature locale pour l’existence pour chaque poids $\mu \in \mathcal{W}^?(\bar{\rho}_p|_{I_p})$, d’une représentation automorphe cuspidale π telle que l’on ait (globalement) : $\bar{\rho}_\pi = \bar{\rho}$. En effet, la représentation galoisienne associée à une représentation cuspidale cohomologique de poids $\mu - \tilde{\rho}$ (donc dont la composante à l’infini est de paramètre de Harish–Chandra $\mu + (0, 0; 3)$) et de niveau premier à p est cristalline de poids de Hodge–Tate $\bar{\mu}$.

(ii) L’analogie de la proposition pour GL_n/\mathbb{Q} est prédit par une conjecture de Gee [10], §4.3 même sans supposer que $\bar{\rho}|_{I_p}$ est modérée et que le poids de Serre est régulier. La généralisation de cette conjecture à beaucoup d’autres groupes réductifs (incluant $\mathrm{GSp}_4/\mathbb{Q}$) sera le sujet de [12].

Démonstration. Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ notons $\tilde{\alpha}$ le relèvement de Teichmüller de α .

La représentation $\bar{\rho}_p$ étant totalement décomposée, il existe des entiers $x \geq y \geq 0$ et z avec $x + y \leq p - 1$ et des $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ avec $\alpha\delta = \beta\gamma$ tel que

$$\bar{\rho}_p \sim \begin{pmatrix} \omega^{x+y} \mathrm{nr}(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^x \mathrm{nr}(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^y \mathrm{nr}(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{nr}(\delta) \end{pmatrix} \otimes \omega^z.$$

(On utilise les équations (9), (10).) Notons d’abord que l’énoncé dépend seulement de μ modulo $(p - 1)X^0(T)$, et donc de $F(\mu - \tilde{\rho})$, puisqu’on peut tordre ρ_p par $\epsilon^{n(p-1)}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ sans changer sa réduction. Également, après torsion nous pouvons supposer que $z = 0$.

Commençons par exhiber un relèvement cristallin à poids de Hodge–Tate $\bar{\mu}$ pour chaque élément μ de la liste du cor. 4.15 (n’importe que la restriction sur (x, y) est plus faible ici). Puis on vérifiera que l’on a obtenu ainsi (au moins) un relèvement pour chaque poids de Serre dans $\mathcal{W}^?(\bar{\rho}_p|_{I_p})$. En fait on peut déduire facilement de la preuve qu’aucun des relèvements que l’on a décrit ne correspond à un poids de Serre régulier qui n’est pas prédit.

Considérons les quatre expressions suivantes pour $\bar{\rho}_p$:

$$\begin{aligned}
 (16) \quad & \omega^{x+y} \mathrm{nr}(\alpha) \oplus \omega^x \mathrm{nr}(\beta) \oplus \omega^y \mathrm{nr}(\gamma) \oplus \mathrm{nr}(\delta), \\
 (17) \quad & \omega^{p-1} \mathrm{nr}(\delta) \oplus \omega^x \mathrm{nr}(\beta) \oplus \omega^y \mathrm{nr}(\gamma) \oplus \omega^{x+y-p+1} \mathrm{nr}(\alpha), \\
 (18) \quad & \omega^{y+p-1} \mathrm{nr}(\gamma) \oplus \omega^{x+y} \mathrm{nr}(\alpha) \oplus \mathrm{nr}(\delta) \oplus \omega^{x-p+1} \mathrm{nr}(\beta), \\
 (19) \quad & \omega^{x+p-1} \mathrm{nr}(\beta) \oplus \omega^{x+y} \mathrm{nr}(\alpha) \oplus \mathrm{nr}(\delta) \oplus \omega^{y-p+1} \mathrm{nr}(\gamma).
 \end{aligned}$$

Dans chaque cas il y a un relèvement cristallin évident obtenu en remplaçant ω par ϵ et α, \dots, δ par leurs relèvements de Teichmüller. Les poids μ correspondants sont ceux des rangées $\ll C_i \gg$ qui sont situés à la gauche.

Regardons l'équation (19). Puisque $2p-2+x-y \geq 2p-2$ et $x+p-1 \geq p-1$ le sous-lemme ci-dessous montre qu'il existe des représentations cristallines σ_i ($0 \leq i \leq 2$) telles que :

	poids de HT	réduction
σ_0	$\{x+p, y-p\}$	$\omega^{x+p-1} \mathrm{nr}(\beta) \oplus \omega^{y-p+1} \mathrm{nr}(\gamma)$
σ_1	$\{x+p, -1\}$	$\omega^{x+p-1} \mathrm{nr}(\beta) \oplus \mathrm{nr}(\delta)$
σ_2	$\{x+p+1, y-p-1\}$	$\omega^{x+p-1} \mathrm{nr}(\beta) \oplus \omega^{y-p+1} \mathrm{nr}(\gamma)$

Pour $i = 0, 2$ on obtient le relèvement cristallin $\epsilon^{x+y} \mathrm{nr}(\tilde{\alpha}) \oplus \sigma_i \oplus \epsilon^{-x-y} \mathrm{nr}(\tilde{\alpha}^{-1}) \det \sigma_i$ dont l'image est contenue dans le Levi M_1 de Klingen. Également on obtient le relèvement cristallin $\sigma_1 \oplus \epsilon^{x+y} \mathrm{nr}(\tilde{\alpha}\tilde{\delta}) \cdot s \cdot {}^t\sigma_1^{-1} \cdot s$ dont l'image est contenue dans le Levi M de Siegel. (Voir la section 2 pour les notations.) Le même argument s'applique aux expressions (18) pour $i \leq 1$ et (17) pour $i = 0$. Les poids μ correspondants sont ceux des rangées $\ll C_i \rightarrow C_j \gg$ qui sont situés à la gauche.

Ainsi on a obtenu dix relèvements cristallins qui correspondent aux poids μ à gauche dans le tableau. Comme $\bar{\rho}_p$ peut aussi être écrite sous la forme

$$\bar{\rho}_p \sim \begin{pmatrix} \omega^{x'+y'} \mathrm{nr}(\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{x'} \mathrm{nr}(\delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{y'} \mathrm{nr}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{nr}(\beta) \end{pmatrix} \otimes \omega^{p-1-x'},$$

avec $(x', y') = (p-1-x, y)$ satisfaisant les mêmes inégalités que (x, y) , on obtient dix relèvements cristallins correspondant aux poids μ à droite.

Démontrons maintenant que l'on a exhibé suffisamment de relèvements. Par la preuve de la prop. 4.11, les poids de Serre prédits sont précisément les $F(\nu)$ où $\nu'_{i,X} \uparrow \nu$ avec $\nu \in X_{\mathrm{rég}}(T)$. (Les $\nu'_{i,X}$ ont été définis dans la démonstration de cette proposition.) La symétrie $(x, y) \leftrightarrow (x', y')$ permet de nous ramener à un seul $X \in \{A, B\}$ pour chaque $0 \leq i \leq 3$.

Commençons par $i = 0$, et prenons $\nu'_{0,A}$. Comme on a $\nu'_{0,A} \in \overline{C}_0$, les poids $\nu + \tilde{\rho} \in X_{\mathrm{rég}}(T) + \tilde{\rho}$ pour lesquels $\nu'_{0,A} \uparrow \nu$ sont précisément les poids de $X_{\mathrm{rég}}(T) + \tilde{\rho}$ qui figurent dans les quatre rangées $\ll C_0(\rightarrow C_i) \gg$ de gauche dans la liste. On a déjà décrit un relèvement cristallin dans chacun de ces cas.

Pour $i = 1$ prenons $\nu'_{1,B}$. Quand $x > y$, on a $\nu'_{1,B} \in \overline{C}_1$ et tout marche comme dans le premier cas en utilisant les poids dans les trois rangées $\ll C_1(\rightarrow C_i) \gg$ à droite. Quand $x = y$ on a $\nu'_{1,B} = \nu'_{0,B}$, donc ce cas a déjà été discuté (à cause de la symétrie entre les cas $\ll A \gg$ et $\ll B \gg$).

Pour $i = 2$ prenons $\nu'_{2,B}$. Quand $y > 0$, on a $\nu'_{2,B} \in \overline{C}_2$ et tout marche comme dans le premier cas en utilisant les poids des deux rangées $\ll C_2(\rightarrow C_i) \gg$ à droite. Quand $y = 0$ on a $\nu'_{2,B} = \nu'_{1,B}$, donc ce cas a déjà été discuté.

Finalement pour $i = 3$ prenons $\nu'_{3,A}$. Quand $x > y + 1$ on a $\nu'_{3,A} \in \overline{C}_3$ et tout marche comme dans le premier cas en utilisant le poids de la rangée $\ll C_3 \gg$ à gauche. Quand $x = y + 1$ on est ramené au cas $i = 0$ car $\nu'_{3,A}$ est égale au poids dans la rangée $\ll C_0 \rightarrow C_2 \gg$ à gauche. Quand $x = y$ on a $\nu'_{3,A} = \nu'_{2,A}$, donc ce cas a déjà été discuté.

Sous-lemme 4.19. Soient $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$.

- (i) Supposons que $k \geq p + 2$. Alors il existe une représentation cristalline de D_p de dimension 2 à poids de Hodge–Tate $\{0, k - 1\}$ et de réduction $\omega^{k-2} \mathrm{nr}(\alpha) \oplus \omega \mathrm{nr}(\beta)$.
- (ii) Supposons que $k \geq 2p + 3$. Alors il existe une représentation cristalline de D_p de dimension 2 à poids de Hodge–Tate $\{0, k - 1\}$ et de réduction $\omega^{k-3} \mathrm{nr}(\alpha) \oplus \omega^2 \mathrm{nr}(\beta)$.

Pour démontrer le sous-lemme, fixons d’abord un isomorphisme $\mathbb{C} \cong \overline{\mathbb{Q}}_p$. Soit K un corps de nombres quadratique imaginaire qui est déployé en p , et fixons un plongement $K \rightarrow \mathbb{C}$. Soit $\ell \geq 1$ un entier. Nous commençons par construire une forme parabolique de type CM, f , de niveau premier à p et de poids ℓ telle que $\overline{\rho_f}|_{D_p} \sim \omega^{\ell-1} \mathrm{nr}(\alpha) \oplus \mathrm{nr}(\beta)$.

Notons \mathfrak{p} et $\overline{\mathfrak{p}}$ les idéaux premiers divisant p , tel que \mathfrak{p} correspond au plongement $K \rightarrow \mathbb{C} \cong \overline{\mathbb{Q}}_p$. Supposons donné un caractère de Hecke $\chi : K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ tel que (a) le conducteur \mathfrak{f} de χ est premier à p , (b) $\chi(z) = z^{1-\ell}$ pour $z \in \mathbb{C} \cong K_\infty$, (c) $\overline{\chi(\mathfrak{p})} p^{1-\ell} = \alpha$ et $\overline{\chi(\overline{\mathfrak{p}})} = \beta$, et (d) $\chi \neq \chi \circ c$, où c est l’unique élément non-trivial de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Alors la forme de type CM associée ([21], th. 4.8.2),

$$f(z) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathcal{O}_K \\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = 1}} \chi(\mathfrak{a}) q^{N(\mathfrak{a})},$$

est la forme cherchée.

On va même construire pour n'importe quelles racines de l'unité a, b un caractère χ satisfaisant (a), (b), (d) et (c') $\chi(\mathfrak{p})p^{1-\ell} = a, \chi(\overline{\mathfrak{p}}) = b$. En tor-dant par un caractère satisfaisant (a) et (b) on est réduit au cas $\ell = 1$ (le seul cas d'ailleurs où la condition (d) n'est pas automatique). Puisqu'il existe des caractères de Dirichlet (c'est-à-dire sur \mathbb{Q}) de conducteur premier à p de n'importe quelle valeur d'ordre fini en p , on peut remplacer la condition (c') par (c'') : $\chi(\mathfrak{p})/\chi(\overline{\mathfrak{p}}) = d := a/b$.

Soit $n \geq 1$ minimal tel que $(\mathfrak{p}/\overline{\mathfrak{p}})^n = x\mathcal{O}_K$ est principal. En considérant les extensions possibles d'un caractère $K^\times \backslash K^\times \widehat{\mathcal{O}_K}^\times K_\infty^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ à $K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times$, on peut remplacer (c'') par (c''') : $\chi(x^{(p)}) = e := d^{-n}$ où on note $x^{(p)} \in \widehat{\mathcal{O}_K}^\times$ l'idèle qui est triviale en p et ∞ et qui coïncide avec x dehors.

Alors il suffit de construire un caractère $\eta : (\mathcal{O}_K/\mathfrak{f})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ tel que $\eta(x^{(p)}) = e$ et tel que η soit trivial sur l'image de \mathcal{O}_K^\times . En remplaçant e par une 12ème racine de e et en prenant la 12ème puissance de η à la fin, on peut abandonner la condition que $\eta|_{\mathcal{O}_K^\times}$ soit triviale (puisque \mathcal{O}_K^\times est fini d'ordre divisant 12). Sans perte de généralité on peut supposer que l'ordre de e est de la forme q^r où q est premier. Il suffit donc de trouver un idéal \mathfrak{f} premier à p tel que l'ordre de $x^{(p)}$ dans $(\mathcal{O}_K/\mathfrak{f})^\times$ est un multiple de q^r . Soit h le nombre de classes de K . On va montrer qu'il existe un entier $i \geq r$ et un idéal \mathfrak{f} premier à p tel que $\mathfrak{f} \nmid x^{12hq^{r-1}} - 1$ mais $\mathfrak{f} \mid x^{12hq^i} - 1$. Choisissons $\pi \in \mathcal{O}_K$ tel que $\mathfrak{p}^h = \pi\mathcal{O}_K$. Alors il suffit de montrer que les normes des idéaux $(\pi^{12nq^i} - \overline{\pi}^{12nq^i})\mathcal{O}_K$ (qui sont premiers à p) ne sont pas bornées. C'est un argument élémentaire utilisant que $\pi/\overline{\pi}$ n'est pas une racine de l'unité.

Jusqu'ici on a construit un caractère χ satisfaisant (a), (b) et (c). Il suffit maintenant de construire un caractère χ' satisfaisant (a), (b), (c) et (d) dans le cas $a = b = 1$ (et toujours $\ell = 1$). Comme ci-dessus on réduit à construire un caractère $\eta : (\mathcal{O}_K/\mathfrak{f})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ tel que $\eta(x^{(p)}) = 1$ et tel que $\eta \neq \eta \circ c$. Soient $q \nmid 6$ et $q_1 \neq q_2$ des nombres premiers tels que $q_i \equiv 1 \pmod{q \operatorname{disc}(K)}$. Alors les q_i sont décomposés dans K/\mathbb{Q} . Choisissons $\mathfrak{q}_i \mid q_i$ des idéaux premiers de \mathcal{O}_K et posons $\mathfrak{f} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$. Puisque pour chaque élément d'un espace vectoriel de dimension deux il existe un élément non-trivial de l'espace dual qui l'annule, il existe $\eta : (\mathcal{O}_K/\mathfrak{f})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ d'ordre exactement q tel que $\eta(x^{(p)}) = 1$; évidemment on a $\eta \neq \eta \circ c$.

Cela termine la construction du caractère de Hecke χ .

La forme parabolique \overline{f} sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, la réduction de f modulo p , satisfait $\rho_{\overline{f}}|_{D_p} \sim \omega^{\ell-1} \operatorname{nr}(\alpha) \oplus \operatorname{nr}(\beta)$. Alors la forme $\overline{g} = \theta \overline{f}$ est propre et parabolique de même niveau, de poids $\ell + p + 1$ et telle que $\rho_{\overline{g}} \sim \rho_{\overline{f}} \otimes \omega$ [14], §4. Par le lemme de Deligne–Serre, il existe une forme parabolique et propre g en caractéristique nulle de même poids et niveau et tel que $\overline{\rho}_g|_{D_p} \sim \rho_{\overline{g}}|_{D_p} \sim \omega^\ell \operatorname{nr}(\alpha) \oplus \omega \operatorname{nr}(\beta)$

(notons que le poids est maintenant au moins deux). Puisque la forme g est de niveau premier à p et de poids $\ell + p + 1$, on sait que $\rho_g|_{D_p}$ est cristalline à poids de Hodge–Tate $\{\ell + p, 0\}$.

La partie (i) du sous-lemme se démontre en prenant $\ell = k - (p + 1)$, et la partie (ii) en prenant $\ell = k - 2(p + 1)$ et en appliquant θ deux fois. Bien sûr, on pourrait appliquer θ plusieurs fois et obtenir des résultats analogues pour $k \geq 3p$, etc.

Remarquons qu’une preuve locale du sous-lemme s’ensuit de [23], th. 8.6 (avant c’était connu quand $k \leq 2p$ [3], §3.2). Une preuve globale, plus sophistiquée mais valable en toute généralité, résulte aussi du travail de Kisin sur la conjecture de Breuil–Mézard, au moins si $p > 3$ [19], cor. 2.3.4. \square

Dans certains cas (comme dans le travail de l’un des auteurs sur la conjecture de modularité des surfaces abéliennes), il peut être utile de formuler des conjectures sur l’existence de classes compagnons en cohomologie de de Rham modulo p (et même de classes de de Rham classiques ou p -adiques relevant ces classes) sous des hypothèses de décomposabilité pour $\bar{\rho}|_{I_p}$ moins fortes que la décomposabilité totale. Nous formulons de telles conjectures ci-dessous pour chacun des huit poids compagnons.

5 Décomposabilité partielle et formes compagnons

Soit $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{f,p} : \Gamma \rightarrow \mathrm{GSp}_4(\kappa)$, supposée absolument irréductible, la représentation résiduelle associée à une forme cuspidale holomorphe p -ordinaire f , de poids (k, ℓ) , $k \geq \ell \geq 3$. En particulier, $\bar{\rho}$ est motiviquement impaire. Dans tout ce qui suit, on fait l’hypothèse que $k + \ell - 3 < p - 1$. Soit $k = a + 3$ et $\ell = b + 3$; la représentation $\bar{\rho}$ admet donc le poids de Serre $F(\lambda) = W(\lambda)$ où $\lambda = (a, b; a + b) \in C_0$.

Dans la formulation ci-dessous généralisant la théorie des formes compagnons dans le contexte de la conjecture de Serre pour GL_2/\mathbb{Q} (voir par exemple [14]), on va introduire des twists par des puissances du caractère cyclotomique modulo p de la représentation globale $\bar{\rho}$ et formuler une conjecture d’existence de formes compagnons pour ces twists sous des hypothèses de décomposabilité partielle. On pourrait procéder exactement de la même manière avec la représentation p -adique elle-même et des twists par des puissances du caractère cyclotomique p -adique sous des hypothèses analogues pour la représentation p -adique $\rho_{f,p}|_{D_p}$, mais alors, les formes compagnons dont l’existence est également conjecturée seraient p -adiques (voir [4] pour GL_2/\mathbb{Q}).

Cas 1 : Supposons qu'on ait

$$\bar{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & 0 & * & * \\ 0 & \omega^{k-1} & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On forme dans ce cas $\bar{\rho}_1 = \bar{\rho} \otimes \omega^{2-\ell}$, qui est toujours motiviquement impaire. On voit qu'après conjugaison par $s_0 = \iota(s_1)$, on a

$$(s_0 \cdot \bar{\rho}_1 \cdot s_0)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{k-\ell+1} & 0 & * & * \\ 0 & \omega^{k-1} & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{2-\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $(k', \ell') = (k + p - 1, 4 - \ell + p - 1)$, on obtient un poids cohomologique : $k' \geq \ell' \geq 3$; nous conjecturons alors qu'il existe une représentation cuspidale π' de ce poids, avec π'_∞ de type holomorphe de paramètre de Harish-Chandra $(k' - 1, \ell' - 2; k' + \ell' - 6)$ et telle que

$$\bar{\rho}_{\pi', p} \cong \bar{\rho} \otimes \omega^{2-\ell}.$$

Le poids de Serre correspondant est $F(\lambda')$ pour $\lambda' = (a + p - 1, p - 3 - b; a + b)$ qui est situé dans l'alcôve C_3 si $a - b > 1$. Remarquons que l'existence de π' n'implique pas tout à fait que $F(\lambda') \in \mathcal{W}(\bar{\rho})$, mais seulement (essentiellement) que $\bar{\rho}^\vee \subset H_{\text{ét}}^3(X \times \overline{\mathbb{Q}}, V_{\lambda'}(\overline{\mathbb{F}}_p))$. Rappelons que le système local $V_{\lambda'}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est réductible en général puisque $\lambda' \notin C_0$ (voir (5)–(8) ci-dessus).

Nous verrons dans la section suivante comment ceci peut être démontré en partie (les détails paraîtront dans [30]). Les deux ingrédients-clé sont : le théorème de comparaison étale–cristallin modulo p de Faltings [7], le calcul de la cohomologie de de Rham et de sa filtration de Hodge à l'aide d'un complexe filtré, dit « de Bernstein–Gelfand–Gelfand dual » introduit par Faltings–Chai [8], qui est quasi-isomorphe au complexe de de Rham logarithmique muni de sa filtration de Hodge. Ce Cas 1 est celui qui intervient dans l'étude de la conjecture de Yoshida ([33] et [29]).

Cas 2 : Supposons qu'on ait

$$\bar{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & * & 0 & * \\ 0 & \omega^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On forme dans ce cas $\bar{\rho}_2 = \bar{\rho} \otimes \omega^{1-k}$. On voit qu'après conjugaison par $s_0 s_1 = \iota(s_1 s_0)$, on a

$$(s_0 s_1 \cdot \bar{\rho}_2 \cdot s_1 s_0)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{\ell-k-1} & 0 & * & 0 \\ 0 & \omega^{\ell-2} & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{1-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $(k', \ell') = (\ell - 1 + p - 1, 3 - k + p - 1)$, on obtient un poids cohomologique : $k' \geq \ell' \geq 3$; nous conjecturons alors qu'il existe une représentation cuspidale π' de ce poids, avec π'_∞ de type Whittaker avec paramètre de Harish-Chandra $(k' - 1, \ell' - 2; k' + \ell' - 6)$ et telle que

$$\bar{\rho}_{\pi', p} \cong \bar{\rho} \otimes \omega^{1-k}.$$

Le poids de Serre correspondant est $F(\lambda')$ pour $\lambda' = (b + p - 2, p - 4 - a; a + b)$ qui est situé dans l'alcôve C_2 si $b > 0$.

On conjecture donc que la représentation π' intervient dans le terme gradué de degré $k' - 1$ pour la filtration de Hodge de la cohomologie de deRham logarithmique (considérée comme module de Hecke) :

$$\mathrm{gr}^{k'-1} H_{\mathrm{idR}}^3(X/\overline{\mathbb{Z}}_p, \mathcal{V}_{\lambda'}) = H^1(\overline{X}, \omega^{k', 4-\ell'}).$$

Ici \overline{X} désigne une compactification toroïdale arithmétique de X sur \mathbb{Z}_p (voir chap. IV de [8]).

Cas 3 : Supposons qu'on ait

$$\bar{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{k-1} & * & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On forme dans ce cas $\bar{\rho}_3 = \bar{\rho} \otimes \omega^{3-k-\ell}$. On voit qu'après conjugaison par $s_0 s_1 s_0 = \iota(s_1 s_0 s_1)$, on a

$$(s_0 s_1 s_0 \cdot \bar{\rho}_3 \cdot s_0 s_1 s_0)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{3-k-\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{2-\ell} & * & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{1-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $(k', \ell') = (3 - \ell + p - 1, 3 - k + p - 1)$, on obtient un poids cohomologique : $k' \geq \ell' \geq 3$; nous conjecturons alors qu'il existe une représentation

cuspidale π' de ce poids, avec π'_∞ de type Whittaker avec paramètre de Harish-Chandra $(k' - 1, \ell' - 2; k' + \ell' - 6)$ et telle que

$$\bar{\rho}_{\pi', p} \cong \bar{\rho} \otimes \omega^{3-k-\ell}.$$

Le poids de Serre correspondant est $F(\lambda')$ pour $\lambda' = (p - 4 - b, p - 4 - a; a + b)$ qui est situé dans l'alcôve C_1 si $a + b < p - 5$.

On conjecture donc que la représentation π' intervient dans

$$\mathrm{gr}^{\ell'-2} H_{\mathrm{idR}}^3(X/\overline{\mathbb{Z}}_p, \mathcal{V}_{\lambda'}) = H^2(\overline{X}, \omega^{\ell'-1, 3-k'}).$$

Il y a quatre autres cas, pour lesquels la méthode de démonstration que nous proposons dans la section suivante ne s'applique probablement pas. Des discussions avec E. Urban et L. Clozel suggèrent que les poids de Serre prédits ci-dessous donnent lieu à des classes c de cohomologie de de Rham modulo p obtenues par réduction de formes compagnons p -adiques ordinaires.

Notons que seuls les quatre représentants de Kostant $w \in W^M$ ont la propriété d'envoyer un poids G dominant sur un poids M -dominant par $\lambda \mapsto w \cdot \lambda$; or les caractères M -dominants $(c, d; e)$ de T sont ceux pour lesquels il existe un entier f tel que $(f + c, f + d; e)$ soit G -dominant. Ces quatre autres cas sont :

Cas 0' : Si

$$\bar{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & * & * & * \\ 0 & \omega^{k-1} & 0 & * \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la représentation $\bar{\rho}'_0 = \bar{\rho}$ satisfait

$$(s_1 \cdot \bar{\rho}'_0 \cdot s_1)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & * & * & * \\ 0 & \omega^{\ell-2} & 0 & * \\ 0 & 0 & \omega^{k-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $(k', \ell') = (\ell - 1 + p - 1, k + 1)$ avec $k' \geq \ell' \geq 3$. Le poids de Serre correspondant est $F(\lambda')$ pour $\lambda' = (b + p - 2, a + 1; a + b + p - 1)$ qui est situé dans l'alcôve C_2 si $b > 0$.

Cas 1' : Si

$$\bar{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & 0 & * & 0 \\ 0 & \omega^{k-1} & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la représentation $\bar{\rho}'_1 = \bar{\rho} \otimes \omega^{2-\ell}$ satisfait

$$(s_1 s_0 \cdot \bar{\rho}'_1 \cdot s_0 s_1)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{k-\ell+1} & * & 0 & * \\ 0 & \omega^{2-\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{k-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $(k', \ell') = (3 - \ell + p - 1, k + 1)$ avec $k' \geq \ell' \geq 3$. Le poids de Serre correspondant est $F(\lambda')$ pour $\lambda' = (p - 4 - b, a + 1; a + b + p - 1)$ qui est situé dans l'alcôve C_1 si $a > b$.

Cas 2' : Si

$$\bar{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & * & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la représentation $\bar{\rho}'_2 = \bar{\rho} \otimes \omega^{1-k}$ satisfait

$$(s_1 s_0 s_1 \cdot \bar{\rho}'_2 \cdot s_1 s_0 s_1)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{\ell-k-1} & * & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{1-k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $(k', \ell') = (2 - k + p - 1, \ell)$ avec $k' \geq \ell' \geq 3$. Le poids de Serre correspondant est $F(\lambda')$ pour $\lambda' = (p - 5 - a, b; a + b + p - 1)$ qui est situé dans l'alcôve C_0 .

Cas 3' : Si

$$\bar{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la représentation $\bar{\rho}'_3 = \bar{\rho} \otimes \omega^{3-k-\ell}$ satisfait

$$(s_0 s_1 s_0 s_1 \cdot \bar{\rho}'_3 \cdot s_1 s_0 s_1 s_0)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{3-k-\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{1-k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{2-\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $(k', \ell') = (2 - k + 2(p - 1), 4 - \ell + p - 1)$ avec $k' \geq \ell' \geq 3$. Le poids de Serre correspondant est $F(\lambda')$ pour $\lambda' = (2p - 6 - a, p - 3 - b; a + b + p - 1)$ qui est situé dans l'alcôve C_3 si $a + b < p - 6$.

6 Complexe BGG dual cohérent

Dans cette section on esquisse une stratégie pour construire une forme compagnon dans le Cas 1 qui utilise le complexe BGG dual. Pour l'instant cette stratégie ne fournit qu'une forme *p-adique* du poids souhaité. Les détails se trouvent dans un travail du deuxième auteur [30].

Posons $k = a + 3$ et $\ell = b + 3$, $a \geq b \geq 0$ avec $a + b + 3 < p - 1$ et $\lambda = (a, b; a + b)$ le poids de G associé. Soit X une variété de Shimura pour G , de niveau N premier à p et net. Soit \mathcal{V}_λ le fibré à connexion associé à la $\mathbb{Z}_{(p)}$ -représentation de G de plus haut poids λ (voir [24], 1.9 pour l'unicité d'un tel modèle entier sur $\mathbb{Z}_{(p)}$ lorsque $\lambda \in C_0$, ce qui est le cas ici). Soit π une représentation cuspidale cohomologique de $G(\mathbb{A})$ intervenant dans $H_{\mathrm{dR}}^3(X, \mathcal{V}_\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathbb{C}$; π définit alors une forme modulaire de poids (k, ℓ) soit holomorphe soit admettant un modèle de Whittaker; notons que π possède des vecteurs non nuls par le sous-groupe de congruences principal de niveau N . On fixe un plongement $\overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ et un anneau de valuation discrète $\mathcal{O} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ fini sur \mathbb{Z}_p et contenant les valeurs propres de π pour les opérateurs de Hecke $T_{q,i}$ pour tous les nombres premiers q ne divisant pas le niveau N (on inclut donc $q = p$). On notera ϖ une uniformisante de \mathcal{O} et κ son corps résiduel.

On remplace X et \mathcal{V}_λ par ses changements de base à \mathbb{Z}_p . Soit \overline{X} une compactification toroïdale lisse de X sur \mathbb{Z}_p . Le complexe BGG dual pour G est un complexe filtré $\mathcal{K}_\lambda^\bullet$ contenu comme facteur direct dans le complexe de de Rham logarithmique $\mathcal{V}_\lambda \otimes \Omega_{\overline{X}}^\bullet(\log)$ sur \overline{X} (filtré par la filtration convolée de la filtration bête de $\Omega_{\overline{X}}^\bullet(\log)$ et de la filtration de Hodge de \mathcal{V}_λ). Il est constitué de faisceaux localement libres de rang fini. Nous renvoyons à [24] et [22] pour une description détaillée de sa structure entière sur \mathbb{Z}_p . L'inclusion $\mathcal{K}_\lambda^\bullet \hookrightarrow \mathcal{V}_\lambda \otimes \Omega_{\overline{X}}^\bullet(\log)$ est un quasi-isomorphisme filtré [22], sect. 5, th. 6. Pour tout triplet d'entiers (u, v, t) avec $u \geq v$, considérons le faisceau $\omega^{u,v}(t)$ sur \overline{X} des sections du fibré automorphe associé à la représentation $\mathrm{Sym}^{u-v} \otimes \det^v \mathbb{Z}_p^2(t)$ du sous-groupe de Levi $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_1$ du parabolique de Siegel, l'action du facteur GL_1 étant donnée par la puissance t -ième du facteur de similitudes. On peut alors écrire les termes du complexe $\mathcal{K}_\lambda^\bullet$; ils sont placés en degré $w, w + 1, w + 2$ et $w + 3$, où $w = a + b + 3$ (le poids motivique de π) :

$$\omega^{3-\ell, 3-k}(k + \ell - 6) \rightarrow \omega^{\ell-1, 3-k}(k - 4) \rightarrow \omega^{k, 4-\ell}(\ell - 5) \rightarrow \omega^{k, \ell}(-3),$$

les morphismes étant des opérateurs différentiels induits par la connexion de Gauss–Manin. On sait que la connexion de Gauss–Manin commute aux correspondances algébriques : les différentielles ci-dessus commutent donc aux opérateurs de Hecke. Cependant si l'on omet les twists par des puissances du

facteur de similitudes, il faut les réintroduire dans les formules de commutation.

Remarque 6.1. Les twists n'interviennent pas pour les considérations géométriques qui suivent, mais sont cruciaux pour la description des valeurs propres de Hecke sur la forme compagnon qu'on veut construire.

La filtration de Hodge sur le complexe de de Rham induit sur le complexe BGG dual la filtration bête. On en déduit les gradués de $H_{\mathrm{dR}}^3(X, \mathcal{V}_\lambda)$:

$$(20) \quad \begin{aligned} \mathrm{gr}^0 H_{\mathrm{dR}}^3 &= H^3(\overline{X}, \omega^{3-\ell, 3-k}), & \mathrm{gr}^{\ell-2} H_{\mathrm{dR}}^3 &= H^2(\overline{X}, \omega^{\ell-1, 3-k}), \\ \mathrm{gr}^{k-1} H_{\mathrm{dR}}^3 &= H^1(\overline{X}, \omega^{k, 4-\ell}), & \mathrm{gr}^{k+\ell-3} H_{\mathrm{dR}}^3 &= H^0(\overline{X}, \omega^{k, \ell}). \end{aligned}$$

Les hypothèses de décomposabilité partielle des Cas 1, 2, 3 de la section précédente ont une traduction via le théorème de comparaison étale-cristallin de Faltings [7], en termes de stabilité par le Frobenius cristallin Φ de certains sous-quotients de la filtration de Hodge sur le Φ -module filtré \overline{M}_π associé à la représentation contragrédiente de $\overline{\rho}_{\pi, p}$. Par la théorie de Fontaine–Laffaille, on a $\overline{M}_\pi = M_\pi \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$ où M_π est le Φ -module filtré, libre de rang 4 sur \mathcal{O} , associé à la représentation contragrédiente de $\rho_{\pi, p}$; par [22], M_π est facteur direct du \mathcal{O} -module $H_{\mathrm{crist}}^3(\overline{X}/\mathbb{F}_p, \mathcal{V}_\lambda) \otimes \mathcal{O}$ muni du Frobenius cristallin Φ et de la filtration convolée décrite ci-dessus. Par ordinarité de $\rho_{\pi, p}$, on a une suite exacte courte de Φ -modules filtrés

$$0 \rightarrow M'_\pi \rightarrow M_\pi \rightarrow M''_\pi \rightarrow 0$$

où M'_π et M''_π sont libres de rang 2 sur \mathcal{O} ; et la surjection $M_\pi \rightarrow M''_\pi$ induit $\mathrm{Fil}^{k-1} M_\pi \cong M''_\pi$ et $\mathrm{Fil}^{k+\ell-3} M_\pi \cong \mathrm{Fil}^{k+\ell-3} M''_\pi$. Soit $P_{f, p}(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)(X - \delta)$ le polynôme de Hecke en p . Ses racines sont ordonnées pour que $\alpha, \frac{\beta}{p^{\ell-2}}, \frac{\gamma}{p^{k-1}}, \frac{\delta}{p^{k+\ell-3}}$ soient des unités p -adiques. Par [31], les valeurs propres de Φ sur M_π , resp. sur M''_π , sont $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, resp. γ, δ .

Dans le Cas 1, on suppose que π est donnée par une forme cuspidale holomorphe f ordinaire en p ; pour tout premier q ne divisant pas Np , on note $a_{q, i}$ les valeurs propres des opérateurs de Hecke $T_{q, i}$ ($i = 1, 2$). On considère la forme différentielle $\omega_f \in H^0(\overline{X}, \omega^{k, \ell}) \otimes \mathcal{O}$ associée à f . Cette forme définit une classe dans $\mathrm{Fil}^{k+\ell-3} M_\pi$. Soit $[\overline{\omega}_f] \in \mathrm{Fil}^{k+\ell-3} \overline{M}_\pi$ la classe de cohomologie de sa réduction modulo ϖ . La traduction de l'hypothèse de scindage partiel du Cas 1 en termes de la théorie de Fontaine–Laffaille est que le Φ -module filtré \overline{M}_π est scindé. C'est-à-dire que $\mathrm{Fil}^{k+\ell-3} \overline{M}_\pi$, le dernier cran non nul de la filtration de Hodge de ce module, est stable par le Frobenius. C'est donc que $\frac{\Phi - \delta}{p^{k+\ell-3}}$ annule $\mathrm{Fil}^{k+\ell-3} \overline{M}_\pi$ (un argument similaire à celui de [9] et [4]), et on en déduit

Lemme 6.2 ([30], prop. 9.1). *L'image par $\frac{\Phi-\delta}{p^{k+\ell-3}}$ de $[\overline{\varpi}_f]$ est d'image nulle dans \overline{M}''_{π} .*

Soit V , resp. \overline{V} le lieu ordinaire de X , resp. \overline{X} ; c'est le \mathbb{Z}_p -sous-schéma formel ouvert du complété de \overline{X} le long de la fibre spéciale, défini par la non-annulation modulo p de l'invariant de Hasse H . L'endomorphisme de Frobenius associé au sous-groupe canonique agit sur le \mathbb{Z}_p -schéma formel \overline{V} . Son action sur la cohomologie log de Rham $H_{\mathrm{dR}}^{\bullet}(V, \mathcal{V}_{\lambda})$ est compatible avec celle du Frobenius cristallin Φ .

On peut donc faire agir $\frac{\Phi-\delta}{p^{k+\ell-3}}$ sur la restriction $\omega_f|_{\overline{V}}$ de $\omega_f \in H^0(\overline{X}, \omega^{k,\ell}) \otimes \mathcal{O}$ à \overline{V} ; un calcul de q -développement facile montre

Lemme 6.3 ([30], lemme 10.6). *La forme $\xi_f = (\frac{\Phi-\delta}{p^{k+\ell-3}})\omega_f|_{\overline{V}} \in H^0(\overline{V}, \omega^{k,\ell}) \otimes \mathcal{O}$ est non-nulle modulo ϖ .*

Soit X^* la compactification minimale de X et notons $\pi : \overline{X} \rightarrow X^*$ le morphisme canonique. Soit $\overline{V}' := \overline{V} - \pi^{-1}(X_0)$ où $X_0 \subset X^*$ et l'ensemble fini de pointes. Soit \mathcal{H}^{Np} l'algèbre de Hecke abstraite hors de Np sur \mathcal{O} et \mathfrak{m} l'idéal maximal engendré par ϖ et les $T_{q,i} - a_{q,i}$. On sait que la différentielle $d : \omega^{k,4-\ell}(\ell-5) \rightarrow \omega^{k,\ell}(-3)$ commute à l'action des correspondances de Hecke. La partie technique de la démonstration du théorème principal consiste alors à établir la proposition suivante.

Proposition 6.4 ([30], th. 3). *La localisation en \mathfrak{m} de la suite spectrale donnée par la filtration bête sur le complexe BGG dual induit une suite exacte courte*

$$0 \rightarrow H^0(\overline{V}', \omega^{k,4-\ell}(\ell-5))_{\mathfrak{m}} \rightarrow H^0(\overline{V}', \omega^{k,\ell}(-3))_{\mathfrak{m}} \rightarrow H^{w+3}(\overline{V}', \mathcal{K}_{\lambda}^{\bullet})_{\mathfrak{m}} \rightarrow 0$$

dont la réduction modulo p reste exacte. De plus, le morphisme

$$M_{\pi} \subset H_{\mathrm{dR}}^3(X, \mathcal{V}_{\lambda})_{\mathfrak{m}} = H^{w+3}(\overline{X}, \mathcal{K}_{\lambda}^{\bullet})_{\mathfrak{m}} \rightarrow H^{w+3}(\overline{V}', \mathcal{K}_{\lambda}^{\bullet})_{\mathfrak{m}}$$

se factorise par la projection $M_{\pi} \rightarrow M''_{\pi}$.

Notons que $H^0(\overline{V}', \omega^{i,j}) = H^0(\overline{V}, \omega^{i,j}) = H^0(V, \omega^{i,j})$ par le principe de Koecher.

Considérons alors l'idéal maximal $\tilde{\mathfrak{m}}$ de \mathcal{H}^{Np} engendré par ϖ et les $T_{q,i} - q^{-i(\ell-2)}a_{q,i}$. Par définition du twist par $\ell-2$, on voit que $H^0(\overline{V}, \omega^{k,4-\ell}(\ell-5))_{\mathfrak{m}} = H^0(\overline{V}, \omega^{k,4-\ell}(-3))_{\tilde{\mathfrak{m}}}(\ell-2)$.

Il résulte aisément de la proposition et du lemme 6.2 que la réduction $\overline{\xi}_f$ de ξ_f modulo ϖ est dans l'image du morphisme $\omega^{k,4-\ell}(\overline{V})_{\tilde{\mathfrak{m}}}(\ell-2) \otimes \kappa \rightarrow$

$\omega^{k,\ell}(\overline{V})_{\mathfrak{m}} \otimes \kappa$ induit par la différentielle $d : \mathcal{K}_{\lambda}^{w+2} \rightarrow \mathcal{K}_{\lambda}^{w+3}$ du complexe BGG dual.

Ceci montre qu'il existe une forme $\overline{\omega}_{g_1}$ antécédente de $\overline{\xi}_f$ par d^2 , vecteur propre généralisé pour les opérateurs de Hecke hors de Np et pour $U_{p,2}$ (on ne sait cependant pas que \overline{g}_1 est vecteur propre généralisé pour $U_{p,1}$). La forme $\overline{g}_2 = \overline{g}_1 H$ obtenue par multiplication par l'invariant de Hasse H est de poids (k', ℓ') pour $k' = k + (p-1) \geq \ell' = 4 - \ell + (p-1) \geq 3$ est élément de l'espace propre généralisé $H^0(V, \omega^{k', \ell'})_{\overline{\mathfrak{m}}} \otimes \kappa$. Comme cet espace est réunion croissante d'espaces de dimension finie stables par les opérateurs de Hecke, il contient une forme propre \overline{g}_3 . Soit $]\overline{V}[$ le tube rigide de l'ouvert \overline{V} de la fibre spéciale de \overline{X} . Par une variante simple du Going-Down Lemma de Cohen–Seidenberg, le système de valeurs propres de \overline{g}_3 se relève en un système de valeurs propres en caractéristique zéro, qui définit une forme propre p -adique dans $H^0(]\overline{V}[, \omega^{k', \ell'}) \otimes \mathcal{O}$ qui a les propriétés voulues : elle est propre pour les $T_{q,i}$ (q premier à p) et pour $U_{p,2}$ et ses valeurs propres $\lambda_{q,i}$ sont congrues modulo ϖ aux valeurs propres $q^{-i(\ell-2)} a_{q,i}$ pour q premier à Np , et $\lambda_{p,2}$ est congrue à $\frac{\alpha\beta}{p^{\ell-2}}$ (elle est en particulier ordinaire pour $U_{p,2}$). Voir [30], sect. 10.3 pour les détails. Cette forme p -adique est conjecturalement ordinaire pour $U_{p,1}$. Il est facile de voir, par exemple par la théorie de Hida, qu'elle serait alors classique. L'énoncé contenu dans [30] (voir section 5) est le suivant

Théorème 1. *Soit N un entier sans facteurs carrés et soient k, ℓ deux entiers tels que $k \geq \ell \geq 3$. Soit f une forme cuspidale holomorphe de poids (k, ℓ) de niveau N , propre pour les opérateurs de Hecke $T_{q,1}, T_{q,2}$ (q premier à N). Soit p premier tel que $p-1 > k+\ell-3$, p ne divise pas N , et tel que f est ordinaire en p (voir déf. 3.1). Soit $\rho_{f,p} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathcal{O})$ la représentation galoisienne p -adique associée et $\overline{\rho} = \overline{\rho}_{f,p}$ sa réduction modulo l'idéal maximal (ϖ) de \mathcal{O} . Supposons que*

- (i) *l'image de $\overline{\rho}$ contient $\mathrm{Sp}_4(\kappa')$ pour un corps fini κ' ,*
- (ii) *$\overline{\rho}$ est minimalement ramifiée en tout premier divisant N (cf. [13], sect. 3),*
- (iii) *les nombres $\alpha, \frac{\beta}{p^{\ell-2}}, \frac{\gamma}{p^{k-1}}, \frac{\delta}{p^{k+\ell-3}}$ sont deux à deux distincts dans le corps résiduel,*
- (iv) *on est dans le Cas 1 pour la restriction de $\overline{\rho}$ à I_p .*

Alors, il existe une forme g cuspidale p -adique de poids $(k', \ell') = (k + (p-1), 4 - \ell + (p-1))$ et de niveau N , propre pour les opérateurs de Hecke $T_{q,1}, T_{q,2}$ (q premier à pN), $T_{p,2}$ -ordinaire, telle que

$$\overline{\rho}_{g,p} = \overline{\rho}_{f,p} \otimes \omega^{2-\ell}.$$

L'existence d'une forme compagnon classique dans le Cas 1 ainsi que pour les six autres systèmes de valeurs propres de Hecke (c'est-à-dire pour les huit premiers poids de Serre), a été établie récemment par Gee–Geraghty [11] sous des hypothèses faibles, par un théorème de modularité reposant sur des résultats nouveaux de relèvement modulaire.

Références

- [1] *A. Ash, D. Doud et D. Pollack*, Galois representations with conjectural connections to arithmetic cohomology, *Duke Math. J.* **112** (2002), no. 3, 521–579.
- [2] *A. Ash et G. Stevens*, Modular forms in characteristic l and special values of their L -functions, *Duke Math. J.* **53** (1986), no. 3, 849–868.
- [3] *L. Berger*, Représentations modulaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2, *Astérisque* **330** (2010), 263–279.
- [4] *C. Breuil et M. Emerton*, Représentations p -adiques ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et compatibilité local-global, *Astérisque* **331** (2010), 255–315.
- [5] *K. Buzzard, F. Diamond et A.F. Jarvis*, On Serre's conjecture for mod l Galois representations over totally real fields, *Duke Math. J.* **155** (2010), no. 1, 105–161.
- [6] *P. Deligne et G. Lusztig*, Representations of reductive groups over finite fields, *Ann. of Math. (2)*, **103** (1976), no. 1, 103–161.
- [7] *G. Faltings*, Crystalline cohomology and p -adic Galois representations, *Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory* (Baltimore MD 1988), 25–80, Johns Hopkins University Press, 1989.
- [8] *G. Faltings et C.-L. Chai*, Degeneration of abelian varieties, *Erg. der Math. u. ihrer Grenzgebiete*, Springer Verlag, 1990.
- [9] *G. Faltings et B. Jordan*, Crystalline cohomology and $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$, *Israel J. Math.* **90** (1995), 1–66.
- [10] *T. Gee*, Automorphic lifts of prescribed types, *Math. Ann.* **350** (2011), no. 1, 107–144.
- [11] *T. Gee, D. Geraghty*, Companion forms for unitary and symplectic groups, arXiv:1001-2044.
- [12] *T. Gee, F. Herzig et D. Savitt*, Explicit Serre weight conjectures, en préparation.

- [13] *A. Genestier et J. Tilouine*, Systèmes de Taylor-Wiles pour GSp_4 , Formes Automorphes (II), le cas du groupe $\mathrm{GSp}(4)$, Astérisque **302** (2005), 177–290.
- [14] *B. Gross*, A tameness criterion for Galois representations associated to modular forms (mod p), Duke Math. J. **61** (1990), no. 2, 445–517.
- [15] *F. Herzig*, The weight in a Serre-type conjecture for tame n -dimensional Galois representations, Duke Math. J. **149** (2009), no. 1, 37–116.
- [16] *H. Hida*, Control theorems of coherent sheaves on Shimura varieties of PEL type. J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), no. 1, 1–76.
- [17] *J.C. Jantzen*, Darstellungen halbeinfacher Gruppen und kontravariante Formen, J. Reine Angew. Math. **290** (1977), 117–141.
- [18] *J.C. Jantzen*, Representations of algebraic groups, second ed., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [19] *M. Kisin*, The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2 , J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 3, 641–690.
- [20] *G. Laumon*, Fonctions zêtas des variétés de Siegel de dimension trois, Formes Automorphes (II), le cas du groupe $\mathrm{GSp}(4)$, Astérisque **302** (2005), 1–66.
- [21] *T. Miyake*, Modular forms, Springer-Verlag 1989.
- [22] *A. Mokrane et J. Tilouine*, Cohomology of Siegel varieties with p -adic integral coefficients and applications, Astérisque **280** (2002), 1–95.
- [23] *V. Paskūnas*, Admissible unitary completions of locally \mathbb{Q}_p -rational representations of $\mathrm{GL}_2(F)$, Represent. Theory **14** (2010), 324–354.
- [24] *A. Polo et J. Tilouine*, Bernstein-Gelfand-Gelfand complexes and cohomology of nilpotent groups over $\mathbb{Z}_{(p)}$ for representations with p -small weights, Astérisque **280** (2002), 97–135.
- [25] *J.-P. Serre*, Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Duke Math. J. **54** (1987), no. 1, 179–230.
- [26] *R. Taylor*, Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight, Duke Math. J. **63** (1991), no. 2, 281–332.
- [27] *R. Taylor*, On the ℓ -adic cohomology of Siegel threefolds, Invent. Math. **114** (1993), 289–310.
- [28] *J. Tilouine*, Deformations of Galois representations, AMS 1996.
- [29] *J. Tilouine*, Nearly ordinary degree four symplectic Galois representations and p -adic Siegel modular forms, Compos. Math. **142** (2006), 1122–1156.

- [30] *J. Tilouine*, Formes compagnons et complexe BGG dual pour GSp_4 , à paraître dans *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*.
- [31] *E. Urban*, Sur les représentations p -adiques associées aux représentations cuspidales de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q})$, *Formes Automorphes (II)*, le cas du groupe $\mathrm{GSp}(4)$, *Astérisque* **302** (2005), 151–176.
- [32] *R. Weissauer*, Four dimensional Galois representations, *in* *Formes Automorphes (II)*, le cas du groupe $\mathrm{GSp}(4)$, *Astérisque* **302** (2005), 67–150.
- [33] *H. Yoshida*, Siegel’s modular forms and the arithmetic of quadratic forms, *Invent. Math.* **60** (1980), 193–248.
- [34] *H. Yoshida*, On generalizations of the Shimura-Taniyama conjecture, prépublication.

F. Herzig, Institute for Advanced Study, Einstein Drive, Princeton, NJ 08540. États-Unis.

`herzig@math.ias.edu`

J. Tilouine, Département de Mathématiques, UMR 7539, Institut Galilée, Université de Paris 13, 93430 Villetaneuse. France.

`tilouine@math.univ-paris13.fr`