ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПРЕОБРАЗОВАНИИ НОМОГРАММ ИЗ ВЫРОВНЕННЫХ ТОЧЕК В ЦИРКУЛЬНЫЕ НОМОГРАММЫ*

А. Г. Хованский

Памяти моего отца Георгия Сергеевича Хованского

Эта статья является непосредственным продолжением цикла работ о циркульных номограммах (см. [1] и [2–7]). Этот цикл мы написали вместе с отцом. Мне кажется, что он был важен и для меня, и для отца, и не только в научном, но и в человеческом отношении. Конечно, нам просто было приятно работать вместе, но тут сыграло роль и еще одно обстоятельство.

У отца были далеко не простые отношения с чистой математикой. Прежде всего он ее любил и любил давно. Еще мальчишкой он получил третью премию на олимпиаде для школьников в Казани. (Помню, как он рассказывал, что премию ему вручал Н.Г. Чеботарев. Почему-то отец навсегда запомнил, что Чеботарев пришел в зал в сандалях на босу ногу. Кстати, Чеботарев, по-моему, замечательный математик, — один из моих математических героев. Его статья о многоугольниках Ньютона мне, действительно, очень помогла, когда я только начинал думать об этом предмете.) Математика составляла серьезную часть жизни отца: всю жизнь он страстно занимался номографией, а номография не только раздел прикладной математики, но и ветвь геометрии. Во многом благодаря отцу мы с сестрой выбрали математику своей профессией.

Однако, жизнь сложилась так, что отец не получил университетского образования. Здесь очень помешало его княжеское происхождение: дорога в университет была абсолютно закрыта для него. С образованием помешала и война. Во многом он был самоучкой. Папа был удивительно трудолюбив, работал много и с удовольствием и про свою номографию знал буквально все. Он построил тысячи рабочих номограмм и придумал много новых методов номографирования. Он постоянно возился со своими и чужими аспирантами, написал массу статей, несколько книг и учебник. Он собрал и отредактировал целую серию номографических сборников. Вокруг сборников сложился неформальный коллектив, устраивались семинары, школы, конференции, словом, была жизнь. И отец был душой всего этого.

---

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта 99–01–00245 Российского Фонда Фундаментальных исследований и Канадского Гранта 156833–98.

Но разбирать формальные чисто математические статьи по номографии папе всегда было нелегко. Кстати, работы, над которыми особенно мучался отец, были далеко не блестящими. Как это часто бывает с не очень сильными работами, в них преобладали формальности, а результат, по существу, сводился к нулю. Отец не мог не чуствовать себя просто обманутым: разбираешь-разбираешь, а в результате ноль. Это раздражение у отца накапливалось, и он все чаще говорил, что чистые математики вообще заняты какой-то ерундой, что все это дело бессмысленное и так далее.

Мне было тяжело это слышать. Мне довелось учиться совсем в другое время, в оттепель шестидесятых, когда на мех-мате был период бурного расцвета, а княжеское происхождение не было серьезной преградой. Я все в большей степени становился математиком, и мне казалось, что папа не прав. Разговоры на эту тему ни к чему не приводили, и я чуствовал, что мне необходимо как-то доказать отцу, что и чистые математики могут делать не только ерунду, но и содержательные вещи.

И вот тут-то как раз мне отец и рассказал об одном преобразовании номограмм из выровненных точек в циркульные номограммы и спросил, нельзя ли описать все такие преобразования. Задача отца мне очень понравилась, и через некоторое время я нашел ее полное решение. Надо сказать, что ответ получился довольно забавный. Оказалось, что в решении фигурируют три разных случая. Эти случаи, как ни странно, соответствуют трем классическим геометриям: Лобачевского, Евклида и Римана. Отец был в восторге. Эта связь практической номографии с классическими геометриями произвела на него сильное впечатление. Мы с отцом еще некоторое время с удовольствием вместе думали над циркульными номограммами.

Пожалуй, я могу сказать, что я несколько реабилитировал чистую математику в глазах отца. В человеческом плане эта работа с отцом была важной для меня еще и потому, что я первый в раз почувствовал себя сложившимся матаматиком, почувствовал уверенность в своих силах.

В этой статье я возвращаюсь к теореме о спрямлении окружностей из нашего цикла работ о циркульных номограммах [3], привожу ее разные обобщения и обсуждаю связи с классической геометрией. Эти новые результаты пришли мне в голову недавно, когда я вспоминал отца, думал про нашу работу с ним. Обсудить их с папой я уже никогда не смогу.

Перейдем теперь к математической части статьи. На гладкой поверхности, лежащей в трехмерном пространстве, плоскости, проходящие через фиксированную точку пространства, высекают двухпараметрическое семейство кривых. Это семейство локально является семейством геодезических относительно некоторой римановой метрики. Все такие метрики описываются явно. Все они имеют постоянную гауссову кривизну, поэтому каждая из них соответствует одной из классических геометрий (Лобачевского, Евклида или Римана). В заметке показывается, что если поверхность является невырожденной квадрикой, то на ней не существует никаких других римановых метрик, геодезические относительно которых являются плоскими кривыми. Аналогичное утверждение справедливо и для ростков строго гиперболических поверхностей. Рассуждения, доказывающие эти геометрические результаты, являются непосредственным обобщением рассуждений, потребовавшихся для решения задачи отца об описании всех преобразований номограмм из выровненных точек в циркульные номограммы.

1. Квадрические точки проективной поверхности. Скажем, что точка A является *квадрической* точкой на ростке вещественной регулярной поверхности в вещественном проективном пространстве, если существует невырожденная квадрика, которая аномально близко приближает поверхность в этой точке, именно, если расстояние от точки B на поверхности до квадрики является величиной четвертого порядка малости относительно расстояния от A до B.

Аффинную систему координат x, y, z в аффинной окрестности проективного пространства назовем *приспособленной* к поверхности в точке A, если начало координат совпадает с этой точкой, а плоскость $z = 0$ касается поверхности в точке A. Пусть локальное уравнение поверхности в окрестности точки A в некоторой приспособленной системе координат имеет вид $z = f(x, y) = B_2(x, y) + K_3(x, y) + \dots$, где B_2 и K_3 — соответственно, квадраичный и кубический члены ряда Тейлора функции f в начале координат.

Лемма 1. *1. Точка A является квадрической точкой поверхности, если и только если кубический полином K_3 делится на квадратный полином B_2.*

2. Условие, состоящее в том, что полином K_3 делится на полином B_2 является проективно инвариантным, т.е. не зависит от выбора приспособленной системы координат.

3. Точка A является квадрической точкой поверхности, если и только если существует приспособленная система координат, для которой полином K_3 тождественно равен нулю.

Доказательство. 1. Пусть $K_3 = L_1 B_2$, где L_1 — однородный линейный полином от x, y. Тогда поверхность анамально близко приближается квадрикой $z = B_2 + L_1 z$. Обратно, всякая квадрика, касающаяся в нуле плоскости $z = 0$, задается уравнением вида $z = B_2 + L_1 z + cz^2$, где B_2 и L_1 — однородные полиномы от x, y второй и первой степени, а c — константа. Решая это уравнение с точностью до кубических членов, получаем $z = B_2 + L_1 B_2 + \dots$.

Пункт 2 немедленно вытекает из пункта 1.

Пункт 3 в одну сторону тоже сразу вытекает из пункта 1. Для доказательства пункта 3 в другую достаточно выбрать приспособленную систему координат, удовлетворяющую следующим дополнительным условиям: бесконечноудаленная плоскость совпадает с касательной плоскостью приближающей квадрики в некоторой точке квадрики, отличной от точки A, а ось z проходит через эту бесконечноудаленную точку. В таких координатах приближающая квадрика задается уравнением $z = B_2(x, y)$, а полином K_3 обращается в нуль. Действительно, в таких координатах уравнение квадрики $z = B_2 + L_1 z + cz^2$ подчинено следующим соотношениям. Коэффициент c равен нулю, т.к. вертикальные прямые пересекают квадрику ровно в одной конечной точке, а вторая точка пересечения находится в бесконечности. Далее, линейная однородная функция $L_1(x, y)$

обращается в тождественный нуль. Если бы это было не так, то вертикальная прямая, проходящая через любую точку прямой $L_1(x, y) = 1$, лежащей в горизонтальной плоскости, вообще бы не пересекала квадрики в конечной части пространства. Другими словами, такая вертикальная прямая касалась бы квадрики в бесконечноудаленной точке, что невозможно. Действительно, касательная плоскость в этой точке по построению является бесконечноудаленой плоскостью пространства, а эта не содержит рассматриваемой вертикальной прямой.

Невырожденная квадрика пересекается со своей касательной плоскостью по паре прямых, вещественных или комплексных. Справедлива следующая лемма 2.

Лемма 2. *Точка A является квадрической на ростке строго гиперболической поверхности, если и только если каждая из двух веток пересечения поверхности с касательной плоскостью в точке A имеет перегиб в этой точке.*

Точка A является квадрической на ростке строго эллиптической поверхности, если и только если каждая из двух комплексных веток пересечения комплексификации 3-струи поверхности с комплексной касательной плоскостью в точке A имеет перегиб в этой точке.

Перейдем в комплексную область и доказем оба утверждения леммы 2 одновременно. Пусть росток комплексной аналитической поверхности в комплексном проективном пространстве имеет невырожденную вторую квадратичную форму. В этом случае согласно лемме Морса пересечение касательной плоскости с поверхностью состоит из двух гладких кривых. Лемма 2 немедленно вытекаетиз следующей леммы 3

Лемма 3. *Пусть $z = f(x, y)$ — локальное уравнение поверхности в окрестности начала координат, причем, плоскость $z = 0$ касательна к поверхности в начале координат. Пусть $B(x, y)$ и $K_3(x, y)$ — соответственно, квадратичный и кубический члены ряда Тейлора функции f от x, y в начале координат, $z = B_2(x, y) + K_3(x, y) + \dots$. Предположим, что вторая квадратичная форма поверхности в начале координат невырождена что базисный вектор $0, 1, 0)$ не является асимптотическим направлением поверхности. (Это означает, что полином $B_2(1, \mu)$ имеет степень равную двум и некратные корни.) Тогда обе линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с касательной плоскостью $z = 0$ имеют перегибы в точке касания, если и только если кубический полином $K_3(x, y)$ делится на квадратный полином $B_2(x, y)$.*

Доказательство. Уравнение пересечения касательной плоскости с поверхностью имеет вид

$$B_2(x, y) + K_3(x, y) + \dots = 0.$$

Это вырожденное уравнение превращается в невырожденное при помощи σ-процесса в начале координат. Именно, будем искать решение для каждой из линий пересечения в виде $y = xy_1(x)$, где $y_1(x)$ — новая неизвестная функция. Уравнение

$$B_2(x, xy_1(x)) + K_3(x, xy_1(x)) + \dots = 0$$

после деления на x^2 превращается в уравнение

$$B_2(1, y_1(x)) + xK_3(1, y_1(x)) + \dots = 0.$$

К каждой из двух веток функции $y_1(x)$, являющихся решениями этого уравнения в окрестности прямой $x = 0$ применима теорема о неявной функции, т.к. по условию оба корня μ_1 и μ_2 полинома $B_2(1, \mu)$ являются простыми. Согласно теореме о неявной функции производная в нуле на каждой ветке решения вычисляется по формуле

$$y_1'(0) = -\frac{K_3(1,\mu)}{\dfrac{\partial B_2}{\partial y}(1,\mu)},$$

где число μ зависит от выбора ветки y_1, а именно, $\mu = y_1(0)$ и принимает лишь два значения: μ_1 и μ_2. Ветка функции $y(x) = xy_1(x)$ имеет точку перегиба при $x = 0$, если и только если $y_1'(0) = 0$, т.е. если $K_3(1, \mu) = 0$, где $\mu = y_1(0)$. Итак, обе ветки ветки функции $y(x)$ имеют точки перегиба в нуле, если и только если $K_3(1, \mu_1) = K_3(1, \mu_2) = 0$, что означает, что полином K_3 делится на полином B_2.

Задача. Определение квадрической точки автоматически переносится на комплексные поверхности в комплексном проективном пространстве. Мне представляется интересной следующая задача. Сколько квадрических точек имеет общая поверхность степени n в комплексном проективном пространстве?

2. Спрямление пучка плоских сечений. Рассмотрим в окрестности точки нуль на плоскости росток гладкой функции F, разложение которой в ряд Тейлора с точностью до третьего порядка имеет вид:

$$(*) \qquad F(x, y) = \mu x - y + P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots,$$

где μ — число, а P_2 и P_3 — однородные полиномы, соответственно, степени 2 и 3.

Следующая лемма 4 проверяется прямым вычислением.

Лемма 4. *Решенеие $y(x)$ уравнения $F(x, y(x)) = 0$ с точностью до третьего порядка малости задается формулой*

$$y(x) = \mu x + P_2(1,\mu)x^2 + \left[\frac{\partial P_2}{\partial y}(1,\mu)P_2(1,\mu) + P_3(1,\mu)\right]x^3 + \dots,$$

Доказательство. Согласно теореме о неявной функции уравнение

$$F(x, y(x)) = 0$$

имеет единственное решение $y(x)$ такое, что $y(0) = 0$. Это уравнение можно переписать в виде $y(x) = \Phi(x, y(x))$, где $\Phi(x, y) = F(x, y) + y(x)$ Будем его решать методом последовательных приближений. Приближение $y_{n+1}(x)$ вычисляется через предыдущее приближение $y_n(x)$ по формуле $y_{n+1}(x) = \Phi(x, y_n(x))$. Начнем с $y_0(x) \equiv 0$. Тогда $y_1(x) = \mu x$. Следующее приближение $y_2(x)$ равно $\mu x + P_2(x, \mu x) + P_3(x, \mu x) + \dots$. Третье приближение $y_3(x)$ с точностью до членов третьего порядка малости есть

$$\mu x + P_2(x, \mu x + P_2(x, \mu x) + \dots) + P_3(x, \mu x + \dots) =$$
$$= \mu x + P_2(x, \mu x) + \frac{\partial P}{\partial y}(x,\mu)P_2(x, \mu x) + P_3(x, \mu x) + \dots.$$

Ясно, что это приближение решает исходное уравнение с точностью до членов третьего порядка малости.

Рассмотрим росток поверхности, определенный уравнением

$$z = f(x, y) = B_2(x, y) + K_3(x, y) = \dots,$$

где B_2 и K_3 — однородные полиномы степени 2 и 3, соответственно, задающие разложение функции f в ряд Тейлора с точностью до третьего порядка малости.

Следствие 1. *Пересечение поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $y = \mu x + az$ в локальных координатах x, y на поверхности с точностью до третьего порядка малости задается формулой*

$$y(x) = \mu x + aB_2(1, \mu)x^2 + \left[a^2 \frac{\partial B_2}{\partial y}(1, \mu)B_2(1, \mu) + aK_3(1, \mu)\right] x^3 + \dots.$$

Следствие 1 получается применением утверждения 1 к уравнению $y = \mu x + af(x, y)$.

Множество кривых на поверхности называется (локально) *спрямляемым*, если существует (локальный) диффеоморфизм поверхности на плоскую область, переводящий каждую кривую из множества в интервал прямой линии. Пучком кривых с центром в точке A назовем любое множество кривых на поверхности, проходящих через точку A. Если пучок кривых локально спрямляется около своего центра, то различные кривые из пучка имеют в центре пучка различные касательные. Рассмотрим пучок кривых на плоскости с центром в начале координат и обозначим через γ_μ кривую из пучка, касательная к которой в начале координат задается уравнением $y = \mu x$. В окрестности начала координат кривая γ_μ является графиком некоторой функции $y_\mu(x)$

Лемма 5. *Если пучок кривых $\{y = y_\mu(x)\}$ локально спрямляется около точки нуль, то существуют некоторые полиномы T_3 и T_5 от параметра μ степени не выше 3 и 5, соответственно, такие, что разложение функции $y_\mu(x)$ в ряд Тейлора с точностью до третьего порядка малости задается формулой*

$$y_\mu(x) = \mu x + T_3(\mu)x^2 + T_5(\mu)x^3 + \dots.$$

При этом коэффициент b_5 при μ^5 в полиноме T_5 связан с коэффициентом a_3 при μ^3 в полиноме T_3 соотношением $b_5 = 2a_3^2$.

Доказательство. Сделав аффинное преобразование образа, можно добиться того, чтобы спрямляющий диффеоморфизм переводил начало координат в себя и имел в этой точке тождественный дифференциал, т.е. чтобы он задавался парой функций $G_1(x, y) = x + \dots$, $G_2(x, y) = y + \dots$, где точками обозначены члены второго порядка малости. Кривая γ_μ при таком диффеоморфизме переходит в прямую $y = \mu x$, т.е. на кривой γ_μ функция $G_2(x, y) - \mu G_1(x, y)$ обращается в нуль. Лемма 5 получается применением леммы 4 к этой функции. Действительно, уравнение $G_2(x, y) - \mu G_1(x, y) = 0$ с точностью до третьего порядка малости имеет вид

$$y - \mu x + P_{2,\mu}(x, y) + P_{3,\mu}(x, y) + \dots = 0,$$

где $P_{2,\mu}$ и $P_{3,\mu}$ — однородные полиномы от x и y, соответственно, второй и третьей степени, коэффициенты которых линейно зависят от μ.

Согласно лемме 4 с точностью до третьего порядка малости имеем

$$y(x) = \mu x + P_{2,\mu}(1,\mu)x^2 + \left[\frac{\partial P_{2,\mu}}{\partial y}(1,\mu)P_{2,\mu}(1,\mu) + P_{3,\mu}(1,\mu)\right]x^4 + \dots .$$

Коэффициенты квадратного полинома $P_{2,\mu}(1,\mu)$ линейно зависят от μ. Поэтому функция $T_3(\mu) = P_{2,\mu}(1,\mu)$ является полиномом третьей степени от μ. Аналогично функции

$$\frac{\partial P_{2,\mu}}{\partial y}(1,\mu), \quad P_{2,\mu}(1,\mu) \quad \text{и} \quad P_{3,\mu}(1,\mu)$$

являются, соответственно, полиномами степени 2, 3, и 4 от параметра μ, а функция

$$T_5(\mu) = \frac{\partial P_{2,\mu}}{\partial y}(1,\mu)P_{2,\mu}(1,\mu) + P_{3,\mu}(1,\mu)$$

является полиномом степени 5. Старший коэффициент полинома

$$\frac{\partial P_{2,\mu}}{\partial y}(1,\mu)$$

в два раза больше старшего коэффициента полинома $P_{2,\mu}(1,\mu)$. Поэтому старший коэффициент полинома $T_5(\mu)$ равен удвоенному квадрату старшего коэффициента полинома $T_3(\mu)$.

Теорема 1 (о семи сечениях в квадрической точке). *Пусть вторая квадратичная форма ростка поверхности невырождена. Рассмотрим некоторый пучок сечений поверхности плоскостями, проходящими через квадрическую точку и трансверсальными к поверхности в этой точке. Допустим, что пучок содержит не менее семи сечений. Тогда пучок локально спрямляется в окрестности квадрической точки, если и только если все секущие плоскости проходят через общую прямую, трансверсальную поверхности в квадрической точке.*

Доказательство. Будем использовать обозначения из следствия 1. Если пучок сечений локально спрямляем, то все секущие плоскости $y = \mu x + az$ пересекают касательную плоскость $z = 0$ к поверхности по различным прямым. Поэтому коэффициент a в уравнении сечения является некоторой функцией g от коэффициента μ, $a = g(\mu)$. Функция g определена для значений параметра μ, соответствующих сечениям из пучка. Если пучок сечений локально спрямляем, то для всех этих значений параметра μ согласно следствию 1 и лемме 5 должны выполняться следующие соотношения:

1) $g(\mu)B_2(1,\mu) = T_3(\mu)$;

2) $g^2(\mu)\dfrac{\partial B_2}{\partial y}(1,\mu)B_2(1,\mu) + g(\mu)K_3(1,\mu) = T_5(\mu)$.

Умножив соотношение 2) на B_2 и воспользовавшись соотношением 1), получим

$$(*) \qquad T_3^2(1,\mu)\frac{\partial B_2}{\partial y}(1,\mu) + T_3(\mu)K_3(1,\mu) = T_5(\mu)B_2(1,\mu).$$

Полиномы, стоящие в левой и правой частях соотношения $(*)$ имеют степень 7 по параметру μ и одинаковые старшие коэффициенты. Действительно, согласно лемме 5 старший коэфиицент полинома T_3^2 в два раза меньше старшего коэффициента полинома $T_5(\mu)$. Но старший коэффициент полинома $\dfrac{\partial B_2}{\partial y}(1,\mu)$ в два раза больше старшего коэффициента полинома $B_2(1,\mu)$, так как полином $B_2(1,\mu)$ имеет степень два. Окончательно получаем, что старшие коэффициенты полиномов седьмой степени, формирующие в соотношении $(*)$, равны.

Если сечений не менее семи, то полиномы, стоящие в левой и правой части соотношения $(*)$, должны быть тождественно равны: полиномы степени ≤ 7, имеющие одинаковые старшие коэффициенты, тождественно совпадают, если они совпадают в семи точках. Так как центр пучка является квадрической точкой, то полином $K_3(1,\mu)$ делится на полином $B_2(1,\mu)$. Так как вторая квадратичная форма в центре пучка невырождена, то корни полинома B_2 простые и, следовательно, полином $\dfrac{\partial B_2}{\partial y}(1,\mu)$ не имеет общих корней с полиномом $B_2(1,\mu)$. Поэтому из тождества $(*)$ вытекает, что полином T_3^2 делится на полином B_2. Так как корни полинома B_2 простые, полином T_3 должен делиться на полином B_2. В силу соотношения 1) получаем, что $g(\mu)$ — линейный полином относительно μ. Поэтому все кривые из пучка высекаются на поверхности плоскостями вида $y=\mu x+(p\mu+q)z$, где p и q — некоторые константы. Все эти секущие плоскости проходят через общую прямую, трансверсальную поверхности в квадрической точке.

Обратно, пусть все сечения проходят через общую прямую, трансверсальную к поверхности. Тогда параллельное проектирование поверхности вдоль этой прямой спрямляет множество сечений.

Лемма 6. *Рассмотрим некоторый пучок сечений поверхности плоскостями, проходящими через строго гиперболическую точку и трансверсальными к поверхности в этой точке. Допустим, что пучок содержит два сечения, касательные к двум асимптотическим направлениям. Тогда пучок локально спрямляем, если и только если все секущие плоскости проходят через общую прямую, трансверсальную к поверхности.*

Доказательство леммы 6 во многом повторяет доказательство теоремы 1 (но оно проще, т.к. использует лишь 2-струю поверхности). Если пучок локально спрямляем, то для всех значений параметра μ, соответствующих кривым из пучка, должно выполняться соотношение

$$g(\mu)B_2(1,\mu)=T_3(\mu). \qquad (**)$$

Нули полинома $B_2(1,\mu)$ соответствуют сечениям, касательным к асимптотическим направлениям. Такие сечения, согласно условию, присутствуют в пучке. Поэтому из соотношения $(**)$ вытекает, что полином T_3 делится на полином $B_2(1,\mu)$, т.е. что полином $g(\mu)$ линейный. Доказательство леммы 6 заканчивается точно так же, как доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть на ростке поверхности в вещественном проективном пространстве задана некоторая риманова метрика, все геодезические относительно которой являются сечениями поверхностями, трансверсальными плоскостям. Допустим, что поверхность либо является невырожденной квадрикой, либо строго гиперболична. Тогда все плоскости, содержащие геодезические, проходят через одну общую точку. А все семейство геодезических локально спрямляемо.*

Доказательство. Пучок геодезических, выходящих из одной точки риманова многообразия, локально спрямляем: его спрямляет экспоненциальное отображение. Согласно теореме 1 (лемме 6) плоскости, содержащие геодезические, проходящие через одну точку поверхности, проходят через общую прямую. Такие прямые для достаточно близких точек поверхности пересекаются, т.к. достаточно близкие точки поверхности соединяются геодезической. Фиксируем три точки на поверхности, не лежащие на одной геодезической. Соответствующие им три прямые попарно пересекаются и, следовательно, проходят через общую точку, т.к. прямые по условию не лежат в одной плоскости. Прямая, соответствующая любой достаточно близкой точке A на поверхности тоже проходит через эту общую точку, т.к. из трех фиксированных точек можно выбрать две, не лежащие с точкой A на одной геодезической.

На гладкой поверхности, лежащей в трехмерном пространстве, плоскости, проходящие через фиксированную точку O прстранства, высекают двухпараметрическое семейство кривых. Это семейство локально спрямляемо около любой точки A, отличной от точки O, для которой прямая, соединяющая A и O трансверсальна поверхности. Действительно, это семейство спрямляется проектированием из точки O.

3. Метрики. Согласно классической теореме Бельтрами (см. [6], стр. 296), если геодезические на плоской области относительно римановой метрики являются прямыми, то метрика имеет постоянную кривизну. *Такая метрика индуцируется при некотором проективном преобразовании либо из метрики модели Клейна геометрии Лобачевского, либо из евклидовой метрики плоскости, либо из метрики Римана на проективной плоскости* (здесь имеются в виду классические метрики, определенные с точностью до положительного коэффициента пропорциональности, гауссова кривизна для которых может принимать любое вещественное значение). Действительно, согласно классической теореме Миндинга (см. [8], стр. 288–290) поверхности, имеющие одинаковую постоянную гауссову кривизну, локально изометричны. Локальная изометрия рассматриваемой метрики на плоской области с одной из классических геометрий является проективным преобразованием, т.к. она переводит прямые в прямые (см. [9–10]).

Тем самым мы получаем полное описание римановых метрик на ростке невырожденной квадрики и на ростке строго гиперболической поверхности, для которых все геодезические высекаются трансверсальными плоскостями. Для фиксированного ростка поверхности такое семейство геодезических задается точкой O и зависит, следовательно, от трех параметров. В случае невырожденных квардик с точностью до проективного преобразования трехмерного пространства таких семейств всего пять: три для эллиптической квадрики (точка O может находиться либо внутри выпуклого тела, ограниченного квадрикой, либо на его границе, либо вне этого тела) и два для гиперболической квадрики (точка O может находиться на квадрике либо вне ее).

Для фиксированного спрямляемого семейства сечений риманова метрика, относительно которой сечения являются геодезическими, зависит от шести параметров (гауссовой кривизны и элемента восьмимерной группы проективных преобразований плоскости, определенного с точностью до правого класса смежности относительно трехмерной подгруппы изометрий, соответственно, плоскости Лобачевского, плоскости Евклида или плоскости Римана).

4. Невырожденные квадрики. Можно ли отказаться от требований, чтобы геодезические высекались на поверхности именно трансверсальными плоскостями, и оставить лишь требование, чтобы геодезические были бы плоскими кривыми? Я не знаю ответа на этот вопрос для случая строго гиперболических поверхностей: все доказательство в этом случае было построено на геодезических, касательных к гиперболическим направлениям. Если все такие геодезические высечены на поверхности касательными плоскостями, то доказательство перестает работать. Но для случая невырожденных квадрик условие трансверсальности секущей плоскости можно опустить.

Теорема 3. *Пусть на ростке невырожденной квадрики в вещественном проективном пространстве задана некоторая риманова метрика, все геодезические относительно которой являются плоскими кривыми. Тогда все плоскости, содержащие геодезические, проходят через одну общую точку, а все семейство геодезических локально спрямляемо.*

Доказательство. Касательные плоскости пересекают эллиптическую квадрику по точке, а гиперболическую — по паре прямых. Поэтому геодезические, не касатальные к гиперболическим направлениям, должны высекаться трансверсальными плоскостями. Для таких геодезических проходят рассуждения из доказательства предыдущей теоремы, и, следовательно, все они высекаются плоскостями, проходящими через одну общую точку O. Но геодезические непрерывно зависят от направления. Поэтому и геодезические, касательные к асимптотическим направлениям, должны высекаться плоскостями, проходящими через точку O,

Следствие 2. *1. Пучок, содержащий не менее семи окружностей или прямых на плоскости, локально спрямляем, если и только если все кривые из пучка проходят через общую точку, отличную от центра пучка (см. [3]).*

2. Двухпараметрическое семейство прямых и окружностей на плоской области является семейством геодезических относительно некоторой римановой метрики, если и только если семейство индуцируется при некотором конформном преобразовании плоскости (пополненной бесконечноудаленной точкой) либо из семейства геодезических модели Пуанкаре плоскости Лобачевского, либо из семейства геодезических плоскости Евклида, либо из семейства геодезических плоскости Римана. При этом риманова метрика на плоской области индуцируется из соответствующей классической метрики, определенной с точностью до проективного преобразования.

Доказательство. При помоще стереографической проекции отобразим плоскость на сферу. При такой проекции прямые и окружности на плоскости перейдут в окружности на сфере, которые являются плоскими сечениями сферы. Следствие теперь вытекает из доказанных выше фактов.

Замечение. Задачи о спрямлении семейства окружностей, которые мы рассматривали с отцом, естественно обобщаются на многомерный случай. Вот пример такого обобщения: когда локально спрямляется пучок окружностей в трехмерном пространстве? Мой аспирант Фарз-Али Изади из университета города Торонто (Канада) недавно ответил на этот вопрос. Он показал, что и в трехмерном случае пучок окружностей локально спрямляем, если и только если все окружности из пучка проходят через общую точку, отличную от центра пучка.

Литература

1. Хованский Г. С., *Основы номографии*, М., “Наука”, 1976.
2. Хованский А. Г., Хованский Г. С., *Преобразование номограмм из выравненных точек и с параллельным индексом в номограммы из равноудаленных точек*, ДАН СССР, Т. 248, (1979), N 3, С. 535–538.
3. Хованский А. Г., *О спрямлении окружностей*, Сибирск. математ. журнал, Т. 21, (1980), N 4, С. 221–226.
4. Хованский А. Г., *О спрямлении параллельных кривых*, ДАН СССР, Т. 250, (1980), N 5, С. 1074–1076.
5. Хованский А. Г., Хованский Г. С., *Преобразование номограммы из выравненных точек и с параллельным индексом в номограммы из равноудаленных точек и исследование их приспособляемости*, Номографический сборник (Хованский Г. С., ред.), N 14, ВЦ АН СССР, Москва, 1982, С. 56–77.
6. Хованский А. Г., Хованский Г. С., *Исследование способов представления уравнения* $\frac{f_{34}-f_{12}}{g_{34}-g_{12}} = \frac{f_{56}-f_{12}}{g_{56}-g_{12}}$ *номограммами с ориентированным транспорантом, несущим криволинейный индекс*, Номографический сборник (Хованский Г. С., ред.), N 16, ВЦ АН СССР, Москва, 1990, С. 63–81.
7. Хованский А. Г., Хованский Г. С., *Методы номогфафирования некоторых зависимостей, основанные на использовании двухпараметрических семейств прямых, окружностей и эллипсов*, Номографический сборник (Хованский Г. С., ред.), N 13, ВЦ АН СССР, Москва, 1979, С. 70–105.
8. Manfredo P. do Carmo, *Differentsial Geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
9. Клейн Ф., *Лекции о развитии математики в* XIX *столетии*, М.–Л., ОНТИ, 1937.
10. Клейн Ф., *Высшая геометрия*, М.–Л., ГОНТИ, 1939.