ПРИЛОЖЕНИЕ 3

РАЗДЕЛЯЮЩИЕ РЕШЕНИЯ И ОТНОШЕНИЕ ПОРЯДКА

§1. Формулировка результатов

Мы будем рассматривать распределения с особенностями коориентированных гиперплоскостей на многообразии M^n. По определению такое распределение задается уравнением Пфаффа $\alpha = 0$, в котором 1-форма α определена с точностью до умножения на положительную функцию. Множеством O особых точек распределения называется множество точек, в которых форма α обращается в тождественный ноль.

Определение. Множество $A \subset M^n \setminus O$ обладает *свойством Ролля* для распределения $\alpha = 0$, если для всякой гладкой кривой $\gamma\colon [0,1] \to M^n$, концы $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ которой лежат в множестве A, а вектора скорости в начальный и конечный момент трансверсальны распределению, то есть $\alpha(\dot\gamma(0)) \neq 0$ и $\alpha(\dot\gamma(1)) \neq 0$, найдется точка контакта с распределением, то есть найдется число ξ, $0 \le \xi \le 1$, такое, что $\alpha(\dot\gamma(\xi)) = 0$.

Основным результатом настоящего приложения является следующая

Теорема 1. *Множество A обладает свойством Ролля относительно распределения $\alpha = 0$, если и только если на многообразии $M^n \setminus O$ существует разделяющее решение уравнения $\alpha = 0$, содержащее множество A.*

В одну сторону нужный результат почти совпадает со следующей теоремой: *гладкая кривая, трансверсальная к разделяющему решению, между двумя последовательными пересечениями с этим решением имеет точку контакта.* (Эта теорема теперь стала называться теоремой Ролля-Хованского.) Действительно, пусть множество A принадлежит некоторому разделяющему решению на многообразии $M^n \setminus O$. Если рассматриваемая гладкая кривая целиком лежит в множестве $M^n \setminus O$, то она имеет точку контакта с распределением по приведенной выше теореме. Если же эта кривая пересекает множество O, то в качестве точки контакта можно взять любую точку этого пересечения.

В другую сторону нужный результат представляет собой обращение теоремы Ролля-Хованского. С этой обратной теоремой связана следующая история. Французские математики Р. Мусю и К. Рош пришли к убеждению, что она не может быть справедлива. Поэтому они назвали многообразиями Ролля интегральные многообразия распределения $\alpha = 0$, для которых выполнено свойство Ролля, и повторили [44**] для таких многообразий мои оценки. Приложение 3, в основном, посвящено доказательству обратной теоремы. Доказательство заканчивается в следствии 1 параграфа 4.

Излагаемые ниже результаты, в основном, были получены мае 1991 года во время моего визита в Дижон. В обсуждениях приняли активное участие Р. Мусю, К. Рош, С. Бонатти. К сожалению, мы так и не написали совместной статьи на эту тему, а изложение К. Роша [52**] этих результатов далеко не полно.

§2. Отношение порядка

В дальнейшем мы будем иметь дело с распределением $\alpha = 0$ без особенностей. Начиная с этого места мы будем предполагать, что форма α нигде не обращается тождественно в ноль.

В этом параграфе обсуждается отношение порядка на многообразиях, снабженных коориентированным распределением гиперплоскости. Оно было введено С.П. Новиковым в случае, когда распределение является слоением. С.П. Новиков использовал это отношение при решении проблемы о существовании замкнутого слоя у любого слоения на трехмерной сфере. В этом параграфе проверяется, что ряд свойств подобного отношения сохраняется и для распределения. Проверка основана на том, что на поверхностях любое распределение является слоением и что локально кусочно гладкая кривая помещется на гладкую поверхность. *Кусочно-иммерсировновй кривой* $\gamma\colon [0,1] \to M^n$ называется кусочно гладкая кривая, вектор производной которой нигде не обращается в ноль. (В точках разрыва первой первой производной существует как левая производная $\dot\gamma_-$, так и правая производная $\dot\gamma_+$. Предполагается, что они обе отличны от нуля.)

Определение. Точка *a больше*, чем точка b, $a \succ b$, если существует кусочно-иммерсированная кривая $\gamma\colon [0,1] \to M^n$ такая, что $\gamma(0) = b$, $\gamma(1) = a$ и $\alpha(\dot\gamma(t)) > 0$. В точках разрыва производной выполнены оба неравенства $\alpha(\dot\gamma_+(t)) > 0$ и $\alpha(\dot\gamma_-(t)) > 0$.

Прежде всего отметим, что отношения $a \succ b$ и $b \succ a$ не противоречат друг другу. Более того, для достаточно общего распределения $\alpha = 0$ на связном многообразии для любых двух точек a и b выполнены оба этих отношения. Как будет показано ниже, единственным препятствием к этому является существование разделяющих решений уравнения $\alpha = 0$.

Ясно, что соотношение порядка транзитивно, то есть если $a \succ b$ и $b \succ c$, то $a \succ c$. Легко видеть, что *соотношение $\succ$ открыто*, то есть если $a \succ b$, то у точек a и b существуют окрестности U и V такие, что если $c \in U$ и $d \in V$, то $c \succ d$.

Определение. Точка *a эквивалентна* точке b, $a \sim b$, если существует кусочно-иммерсированная кривая $\gamma\colon [0,1] \to M^n$ такая, что $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ и $\alpha(\dot\gamma(t)) = 0$.

Ясно, что соотношение $\sim$ действительно является соотношением эквивалентности, то есть $a \sim a$; если $a \sim b$, то $b \sim a$, и если $a \sim b$, $b \sim c$, то $a \sim c$.

Утверждение 1. *Если $a \succ b$, то существует гладкая иммерсированная кривая $\gamma\colon [0,1] \to M^n$ такая, что $\gamma(0) = b$, $\gamma(1) = a$ и $\alpha(\dot\gamma(t)) > 0$.*

Доказательство. Нам надо доказать, что в точках разрыва первой производной кривую γ можно сгладить с сохранением условия положительности $\alpha(\dot\gamma_+) > 0$ и $\alpha(\dot\gamma_-) > 0$. Начнем с простого частного случая. Пусть многообразие M^n есть плоскость (u, v), и форма α равна dv. Условие положительности означает, что $v(t)$ является кусочно гладкой и строго монотонной возрастающей фукцией, то есть $\dot v_+ > 0$ и $\dot v_- > 0$. Ясно, что такую функцию на отрезке можно сгладить, не меняя ее в окрестности концов, с сохранением условия строгой монотонности. Функцию $u(t)$ тоже можно сгладить, на меняя ее в окрестности концов. Что и доказывает утверждение в рассматриваемом частном случае. Покажем, что общий случай сводится к этому частному случаю.

1. По условию существует кусочно иммерсированная кривая, соединяющая точки b и a такая, что $\alpha(\dot\gamma_+(t)) > 0$ и $\alpha(\dot\gamma_-) > 0$. Можно считать, что каждое C^1-гладкое звено иммерсированной кривой γ является C^∞-гладким. Действительно, в противном случае кривую γ можно заменить иммерсированной кривой $\tilde\gamma$ с гладкими звеньями такой, что соответствующие звенья кривых γ и $\tilde\gamma$ будут C^1-близки. При этом, по-прежнему, будут выполняться соотношения $\alpha(\dot{\tilde\gamma}_+) > 0$ и $\alpha(\dot{\tilde\gamma}_-) > 0$.

2. Если в точке разрыва первой производной левая и правая производные коллинеарны, то есть если $\dot\gamma_+(t_0) = \lambda\dot\gamma_-(t_0)$ (при этом автоматически $\lambda > 0$, так как $\alpha(\dot\gamma_+) > 0$ и $\alpha(\dot\gamma_+) > 0$), то кусочно линейной перепараметризацией отрезка $[0, 1]$ можно добиться, что эти производные будут совпадать. После этого для сглаживания кривой в точке t_0 можно воспользоваться пунктом 1.

3. Пусть правая и левая производные в точке t_0 не коллинеарны. Покажем, как локально сгладить такую кривую. Рассмотрим отдельно плоскость с координатами x, y и на этой плоскости угол, то есть двухзвенную ломаную, первое звено которой расположено на вертикальном луче $0 \le y$, $x = 0$, второе звено — на горизонтальном луче $0 \le x$, $y = 0$. Кривую γ около точки t_0 можно рассматривать как гладкий образ этого угла. Для этого надо отождествить точки $t \ge t_0$ с куском горизонтального луча, точки $t \le t_0$ — с куском вертикального луча и рассматривать отображение γ как отображение угла. Продолжим гладко отображение γ с угла на окрестность точки 0 на плоскости (x, y). Дифференциал этого продолженного отображения F в начале координат невырожден, так как вектора $\dot\gamma_+$ и $\dot\gamma_-$ не коллинеарны. Поэтому форма $F^*\alpha$ не обращается в ноль в окрестности начала координат. Введем новые координаты u, v так, чтобы прямые $F^*\alpha = 0$ стали бы горизонтальными (существование такой замены вытекает из теоремы о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений). Уравнение $F^*\alpha = 0$ при этом будет эквивалентно уравнению $dv = 0$ (или уравнению $-dv = 0$). Задача о локальном сглаживании кривой сведется к простейшему случаю, рассмотренному в начале доказательства.

Заметим, что утверждение 1 можно доказать и не ссылаясь на теорему о существовании и единственности дифференциальных уравнений (и что, следовательно, оно справедливо и для непрерывных распределений).

Утверждение 2. 1. Если $a \succ b$ и $c \sim a$, то $c \succ b$.

2. Если $a \succ b$ и $c \sim b$, то $a \succ c$.

Доказательство. Пункты 1 и 2 аналогичны, поэтому мы докажем лишь первый из них. Рассмотрим сначала следующий простой частный случай. Пусть многообразие M^n — это область U на плоскости (u, v), содержащая отрезок I, определенный условиями $0 \le u \le 1$, $v = 0$, форма α в некоторой окрестности U_0 отрезка I совпадает с формой dv, точка c — начало координат, являющееся левым концом отрезка I, точка a — правый конец этого отрезка, и b — некоторая точка в области U. Так как точка a больше, чем точка b, то существует гладкая кривая $\gamma(t)$, $\gamma(0) = b$, $\gamma(1) = a$, такая, что $\alpha(\dot\gamma) > 0$. Так как около отрезка I форма α совпадает с формой dv, то на кривой $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ функция $v(t)$ строго монотонно возрастает в окрестности точки $t = 1$. Значит, при достаточно близком к 1 значении параметра t_0 точка $\gamma(t_0)$ будет иметь отрицательную координату v. При t_0 близком к 1 отрезок J, соединяющий точку $\gamma(t_0)$ с началом координат, будет лежать в области U_0. Для доказательства соотношения $c \succ b$ достаточно рассмотреть кривую $\tilde\gamma$, совпадающую с кривой γ при $0 \le t \le t_0$ и являющуюся линейной параметризацией отрезка J при $t_0 \le t \le 1$.

Покажем, что общий случай сводится к рассмотренному. Предположим сначала, что точку a можно соединить с точкой c гладкой иммерсированной кривой γ_2 такой, что $\alpha(\dot\gamma_2(t)) \equiv 0$. Согласно утверждению 1 точку b можно соединить с точкой a гладкой иммерсированной кривой γ_1 такой, что $\alpha(\dot\gamma_1(t)) > 0$. Продолжим вектор $\dot\gamma_1$, приложенный в точке a, до гладкого векторного поля m вдоль кривой γ_2 таким образом, что $m(a) = \dot\gamma_1$ и $\alpha(m) > 0$. Кривую, состоящую из двух гладких звеньев γ_1 и γ_2, можно рассматривать как гладкий образ угла на плоскости (x, y), состоящего из двух звеньев $-1 \le y \le 0$, $x = 1$ и $0 \le x \le 1$, $y = 0$. Продолжим отображение этого угла до отображения $F\colon U \to M^n$ его окрестности U так, чтобы в точках второго звена выполнялось равенство

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = m.$$

Рассмотрим форму $F^*\alpha$ в окрестности U. Она не обращается в ноль в окрестности угла, так как $\alpha(m) > 0$ и $\alpha(\dot\gamma_1) > 0$. Горизонтальный отрезок $0 \le x \le 1$, $y = 0$ является решением уравнения $F^*\alpha = 0$. Теперь, умножая форму $F^*\alpha$ на подходящий интегрирующий сомножитель и делая замену координат, придем к ситуации простейшего случая, рассмотренного в начале доказательства.

Если интегральная кривая распределения $\alpha = 0$, соединяющая точки a и c, является лишь кусочно иммерсированной, то приведенное выше построение надо повторить несколько раз для каждого гладкого звена, начиная со звена, содержащего точку a.

§3. Локальный случай

Определение. Скажем, что точка a обладает *локальным свойством Ролля* относительно коотиентированного распределения гиперплоскостией на многообразии M^n, если множество, состоящее из точки a, обладает свойством Ролля для ограничения распределения на некоторую окрестность точки a.

Теорема 2. *Точка обладает локальным свойством Ролля относительно коориентированного распределения гиперплоскостей на многообразии, если и только если у распределения существует росток интегральной гиперповерхности, проходящий через эту точку.*

Доказательство. Пусть точка обладает локальным свойством Ролля. Поскольку вопрос локальный, можно считать, что многообразие является линейным пространством $\mathbb{R}^n$ с координатами $x_1, \dots, x_{n-1}, y$, что точка — это начало координат и что распределение задано уравнением Пфаффа

$$dy - \sum a_i(x, y)dx_i = 0.$$

Обозначим через C максимальную длину вектора $a_1(x, y), \dots, a_{n-1}(x, y), 1$ в шаре B_r радиуса r. Рассмотрим произвольную кусочно иммерсированную кривую $x(t) = x_1(t), \dots, x_n(t)$ в гиперплоскости $y = 0$ такую, что $x(0) = 0$. Если длина l кривой не превосходит числа r/C, то кривая $x(t)$ однозначно поднимается до интегральной кривой $(x(t), y(t))$ распределения, начинающейся в точке 0 и лежащей в шаре B_r. Действительно, над каждым гладким звеном кривой $x(t)$ имеем дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = \sum a_i(x(t), y)\dot{x}_i$$

для определения компоненты $y(t)$. Кривая $(x(t), y(t))$ при $0 \leq t \leq t_0$ имеет длину, меньшую чем $Cl(t_0)$, где $l(t_0)$ — длина проекции этой кривой на гиперплоскость $y = 0$. При $t_0 \leq 1$ она не выйдет из шара B_r, так как по условию $l < r/C$.

Перейдем к центральному месту доказательства. Покажем, что при выполнении свойства Ролля поднятие замкнутой кривой $x(t)$, $x(0) = x(1) = 0$, будет замкнутой кривой. Действительно, пусть интегральная кривая $(x(t), y(t))$ имеет своим правым концом точку $b = (0, y((1))$, и пусть для определенности $y(1) > 0$. Рассмотрим соотношение порядка в шаре B_r, связанное с распределением

$$dy = \sum a_i(x, y)dx_i.$$

Имеем $b \sim 0$, так как по построению точка b соединяется с началом координат интегральной кривой распределения. Далее, $b \succ 0$, так как точка b имеет положительную последнюю координату $y(1)$, и она соединяется с началом координат вертикальным отрезком, ограничение на который формы α равно dy. Итак, $0 \sim b \succ 0$. Значит, по утверждению 2 имеем $0 \succ 0$. Согласно утверждению 1 это означает, что в шаре B_r существует гладкая кривая с началом и концом в нуле, которая не имеет контакта с распределением, что противоречит локальному свойству Ролля. Противоречие доказывает, что поднятие кривой $x(t)$ будет замкнуто.

Теперь просто окончить доказательство существования интегральной гиперповерхности, проходящей через точку 0. Легко видеть, что такой гиперповерхностью будет график функции $y(x)$, определенной во внутренности шара $\|x\| < r/2C$ следующим условием. Рассмотрим любую гладкую кривую $x(t)$, соединяющую начало координат с точкой x, длина которой меньше, чем $r/2C$. Рассмотрим поднятие $(x(t), y(t))$ этой кривой до интегральной кривой распределения. Функция $y(x)$ определяется как значение $y(1)$ последней координаты точки этого поднятия, лежащей над точкой x. Из доказанного выше вытекает, что число $y(x)$ определено корректно (не зависит от выбора кривой $x(t)$). Очевидно, что график построенной функции $y(x)$ действительно является интегральной гиперповерхностью. В обратную сторону теорема вытекает из теоремы Ролля-Хованского, так как интегральная гиперповерхность, проходящая через точку a, разделяет окрестность этой точки.

Следствие. *Пусть точка a обладает локальным свойством Ролля. Тогда существует окрестность U точки a и проходящая через точку a гиперповерхность $\Gamma \subset U$ такие, что*
1) *гиперповерхность Γ — интегральное многообразие распределения, для всякой точки $c \in \Gamma$ выполнено соотношение $c \sim a$;*
2) *дополнение $U \setminus \Gamma$ к гиперповерхности состоит из двух компонент связности U_+ и U_-;*
3) *для каждой точки $b \in U_+$ выполнено соотношение $b \succ a$;*
4) *для каждой точки $d \in U_-$ выполнено соотношение $d \prec a$.*

Доказательство. Действительно, согласно теореме 2 существует росток интегрального многообразия, проходящего через точку a. Можно считать, что точка a — начало координат, что интегральное многообразие задается уравнением $y = 0$, а распределение задается уравнением

$$dy - \sum a_i(x, y) dx_i = 0,$$

где $a_i(0, y) \equiv 0$. Локально области U_+ и U_- задаются, соответственно, неравенствами $y > 0$ и $y < 0$. Проверим, что для каждой точки $b \in U_+$ выполнено соотношение $b \succ a$. Пусть $b = (x, y)$, $y > 0$. Очевидно, что $b \succ c$, где $c = (x, 0)$, и что $c \sim a = 0$. Откуда вытекает, что $b \succ a$.

§4. Глобальный случай

Скажем, что множество S *заполнено снизу*, если выполнено следующее условие: если $a \in S$ и $b \prec a$, то $b \in S$. Скажем, что множество S *заполнено сверху*, если из того, что $a \in S$ и неравенства $b \succ a$ вытекает, что $b \in S$. Ясно, что дополнение до множества, заполненного сверху, заполнено снизу и наооборот. Эти понятия оказываются тесно связанными с концепцией разделяющих решений. Именно, справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть множество S заполнено снизу. Тогда множество точек L, не являющихся внутренними ни для множества S, ни для его дополнения, является разделяющим решением распределения $\alpha = 0$. При этом множество $U_- = S \bigcup L$ является многообразием с краем, кооориентированная граница которого совпадает с L. Обратно, для всякого разделяющего решения L множество S, состоящее из любого подмножества Γ_0 множества L и всех внутренних точек затягивающей L пленки U_-, $\partial U_- = L$, является заполненным снизу множеством.*

Замечание. Разумеется, такой же результат верен и для множеств, заполненных сверху. Он формально вытекает из теоремы при смене коориентации распределения.

Лемма. *Пусть множество S заполнено снизу (сверху), и точка a, $a \in S$, является граничной точкой этого множества. Тогда точка a обладает свойством Ролля.*

Доказательство. Действительно, если точка a не обладает свойством Ролля, то $a \succ a$. Но соотношение $\succ$ открыто. Поэтому существует окрестность V точки a такая, что $a \succ v$, где $v \in V$. Множество S вместе с точкой a содержит и ее окрестность V. То есть a — внутренняя точка множества S. Для заполненных сверху множеств доказательство такое же.

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство. Возьмем любую точку множества L. Она принадлежит либо множеству S, либо множеству $\overline{S}$. Эти случаи совершенно симметричны, и мы остановимся для определенности на случае $a \in \overline{S}$. Согласно лемме точка a обладает локальным свойством Ролля. Согласно следствию из параграфа 3 у точки a есть окрестность $U = U_+ \bigcup \Gamma \bigcup U_-$, причем Γ — интегральное подмногообразие распределения, для всякой точки $b \in U_+$, $b \succ a$, и для всякой точки $d \in U_-$, $a \succ d$. Множество $\overline{S}$ содержит все точки окрестности U_+, так как оно заполнено сверху и содержит точку a. Множество $\overline{S}$ не содержит ни одной точки окрестности U_-. Действительно, если оно содержит точку $d \in U_-$, то оно обязано содержать целую окрестность точки a, так как $a \succ d$ и соотношение $\succ$ открыто. Точка a в этом случае внутренняя для $\overline{S}$. Итак, $U_+ \subset \overline{S}$, $U_- \subset S$. Поэтому множество граничных точек L локально совпадает с множеством Γ. Следовательно, L — интегральное многообразие, являющееся границей многообразия с краем $S \bigcup L$. Теорема доказана в одну сторону. Обратное утверждение вытекает из теоремы Ролля-Хованского.

Следствие 1. *Для всякого множества A, обладающего свойством Ролля, существует содержащее его разделяющее решение.*

Доказательство. Обозначим через S множество всех точек b, для которых найдется точка $a \in A$ такая, что $b \prec a$. Ясно, что множество S заполнено снизу. Точки множества A не могут быть внутренними точками множества S. Действительно, для всякой внутренней точки множества S существует большая точка из множества S. То есть если $a_1 \in A$ и a_1 является внутренней точкой множества S, то найдется точка $s \succ a_1$, то есть существует $a_2 \in A$, $a_2 \succ s \succ a_1$. Иначе говоря, найдутся две точки a_1 и a_2 множества A такие, что $a_2 \succ a_1$. Что противоречит свойству Ролля для множества A. Следствие теперь вытекает из теоремы 3.

Замечание. Теорема 3 имеет следующую интерпретацию в оптимальном управлении. Рассмотрим на многообразии M^n 1-форму α, не имеющую особых точек. Наложим ограничения на движение по многообразию M^n. Скажем, что движение $\gamma\colon [0,1] \to M^n$ допустимо, если $\alpha(\dot\gamma(t)) > 0$. Назовем областью достижимости D_X множество точек, до которых можно дойти из непустого подмножества $X \subset M^n$ допустимым движением за ненулевое время. Из теоремы вытекает, что граница области достижимости D_X является гладким подмногообразием, являющимся разделяющим решением уравнения $\alpha = 0$. В частности, если многообразие связно, а уравнение $\alpha = 0$ не имеет разделяющих решений, то всякая область достижимости совпадает со всем многообразием.

Следствие 2. *Пусть 1-форма α не имеет особых точек на связном многообразии. Тогда справедливо ровно одно из следующих двух утверждений:*

1) *для любых двух точек многообразия существует проходящая через них замкнутая гладкая кривая, трансверсальная распределению $\alpha = 0$;*
2) *существует разделяющее решение уравнения $\alpha = 0$.*

Доказательство. Действительно, если не существует такой замкнутой кривой для точек a и b, то либо множество $S(b)$ точек $c \prec b$ не содержит точки a, либо множество $S(a)$ точек $c \prec a$ не содержит точки b. В любом случае одно из этих множеств не совпадает со всем многообразием. Граница этого множества будет разделяющим решением уравнения $\alpha = 0$.