УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

О. А. Гельфонд, А. Г. Хованский

МНОГОГРАННИКИ НЬЮТОНА И ВЫЧЕТЫ ГРОТЕНДИКА*

(Представлено академиком В. И. Арнольдом 7 12 1994)

Рассмотрим систему уравнений $P_1 = \cdots = P_n = 0$ в $(\mathbb{C}\backslash 0)^n$, где $P_1, \ldots, P_n$ — полиномы Лорана с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. С каждым полиномом Лорана Q свяжем n-форму $\omega = Q/P \cdot \frac{dz_1}{z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$, где $z_1, \ldots z_n$ — независимые переменные и $P = P_1 \cdot \ldots \cdot P_n$. Для общих наборов многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ вычисляется сумма вычетов Гротендика формы ω по всем корням системы уравнений. Результаты докладывались на семинарах Арнольда и Гельфанда, в институте Меттаг-Леффлера и в Мерилендском университете в 1991–1992 гг. Подробное изложение готовится к печати.

1. Комбинаторный коэффициент. Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ — выпуклые многогранники в $\mathbb{R}^n$ и Δ — их сумма Минковского. Каждая грань многогранника Δ есть сумма граней многогранников Δ_i,. Грань Γ назовем *запертой*, если среди ее слагаемых есть хотя бы одна вершина. Вершину $A \in \Delta$ назовем *критической*, если все прилегающие к ней грани заперты.

Рассмотрим непрерывное отображение $F : \Delta \to \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \ldots, f_n)$, каждая компонента f_i которого неотрицательна и равна нулю на тех и только тех гранях $\Gamma = \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_n$, для которых слагаемое Γ_i является точкой–вершиной многогранника Δ_i. Ограничение $\tilde{F}$ отображения F на границу $\partial\Delta$ многогранника Δ переводит окрестность критической вершины в окрестность точки ноль на границе $\partial\mathbb{R}^n_+$ положительного октанта.

Назовем *комбинаторным коэффициентом* k_A критической вершины $A \in \Delta$ локальную степень ростка отображения $\tilde{F} : (\partial\Delta, A) \to (\partial\mathbb{R}^n_+, 0)$. Коэффициент k_A определен корректно и зависит лишь от выбора ориентаций многогранника Δ и положительного октанта $\mathbb{R}^n_+$.

Набор многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ назовем *развернутым*, если все грани многогранника суммы Δ заперты. Почти все наборы из n многогранников в пространстве $\mathbb{R}^n$ являются развернутыми.

2. Ориентации. Знак формы ω зависит от выбора порядка независимых переменных $z_1, \ldots, z_n$. Выбор этого порядка задает также ориентацию линейного пространства $\mathbb{R}^n$, содержащего решетку мономов z^a, в котором лежит многогранник Ньютона $\Delta = \Delta_1 + \cdots + \Delta_n$.

Выбор порядка уравнений $P_1 = \cdots = P_n = 0$ (или их многогранников Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$) задает ориентацию пространства $\mathbb{R}^n_+$, фигурирующего в определении комбинаторного коэффициента. Выбор порядка уравнений задает также знак вычета Гротендика в корнях системы уравнений.

*Работа выполнена при поддержке гранта MBF 000 Международного Научного Фонда.

Выберем любым способом порядок независимых переменных и порядок уравнений. Знак формы ω, знак вычета Гротендика [1] и знаки комбинаторных коэффициентов определяются этим выбором.

3. Вычет формы в вершине многогранника. По каждой вершине A многогранника Ньютона $\Delta(P)$ полинома Лорана P построим ряд Лорана функции Q/P, где Q — любой полином Лорана.

Моном z^a, соответствующий вершине A многогранника $\Delta(P)$, входит в P с некоторым ненулевым коэффициентом C_A и, следовательно, свободный член полинома Лорана $\tilde{P} = P/(C_A z^a)$ равен единице. Определим ряд Лорана для $1/\tilde{P}$ по формуле $1/\tilde{P} = 1 + (1-\tilde{P}) + (1-\tilde{P})^2 + \dots$. Каждый моном z^b входит с ненулевым коэффициентом лишь в конечное число слагаемых $(1-\tilde{P})^k$. Поэтому коэффициент этого ряда при каждом мономе z^b определен корректно. Формальное произведение полученного ряда на полином Лорана $C_A \cdot z^a \cdot Q$ будем называть *рядом Лорана* рациональной *функции Q/P в вершине A* многогранника Ньютона $\Delta(P)$.

Вычетом $\operatorname{res}_A\omega$ рациональной *формы* $\omega = \frac{Q}{P} \cdot \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$ *в вершине* A многогранника Ньютона $\Delta(P)$ назовем свободный член ряда Лорана функции Q/P в вершине A. *Вычет* $\operatorname{res}_A\omega$ *является явно выписываемым полиномом от C_A^{-1} и от коэффициентов полиномов Лорана P и Q.*

4. Допустимые формы. Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ такие многогранники в $\mathbb{R}^n$, что размерность многогранника $\Delta = \Delta_1 + \dots + \Delta_n$ равна n. С каждой незапертой гранью $\Gamma \subset \Delta$ старшей размерности связано содержащее многогранник Δ полупространство L_Γ такое, что $\partial L_\Gamma \supset \Gamma$. *Расширенной суммой* многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ назовем (возможно, неограниченный) многогранник $\tilde{\Delta}$, равный пересечению полупространств L_Γ по всем незапертым граням Γ старшей размерности многогранника Δ.

Примеры. 1. Если все многогранники Δ_i совпадают, то $\tilde{\Delta} = \Delta$. 2. Если многогранники $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ развернуты, то $\tilde{\Delta} = \mathbb{R}^n$.

Пусть $P_1 = \dots = P_n = 0$ — Δ-регулярная [2] система уравнений в $(\mathbb{C}\backslash 0)^n$ с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \dots \Delta_n$. Форму $\omega = \frac{Q}{P} \cdot \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$ назовем *допустимой* для этой системы, если носитель полинома Лорана Q лежит строго внутри расширенной суммы $\tilde{\Delta}$ многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_n$.

5. Основная теорема.

Теорема. *Сумма вычетов Гротендика допустимой формы ω по всем корням в $(\mathbb{C}\backslash 0)^n$ Δ-регулярной системы уравнений $P_1 = \dots = P_n = 0$ равна $(-1)^n \sum k_A \operatorname{res}_A\omega$, где суммирование ведется по всем критическим вершинам A многогранника Δ.*

Доказательство использует технику торических компактификаций [3]. После компактификации основная теорема сводится к своеобразному торическому варианту теоремы о равенстве нулю суммы вычетов на компактном многообразии (ср. [4], [1]).

Следствие 1 (обобщенная формула Эйлера-Якоби из [4]). *Если носитель полинома Лорана Q лежит строго внутри многогранника $\Delta(P)$, то сумма вычетов Гротендика формы ω равна 0.*

Действительно, в этом случае все числа $\operatorname{res}_A\omega = 0$. (Все числа $\operatorname{res}_A\omega = 0$ и для полиномов Лорана Q с носителями, лежащими в несколько большей области, звисящей от Δ_i, что дает обобщение следствия 1.)

6. Торический вариант.

Теорема. *Если многогранники Ньютона уравнений системы развернуты, то сумму вычетов Гротендика можно вычислить для формы ω с любым полиномом Лорана Q.*

Действительно, система уравнений с развернутыми многогранниками Ньютона Δ-регулярна. Расширенная сумма $\tilde{\Delta}$ развернутых многогранников есть $\mathbb{R}^n$, поэтому форма ω с любым полиномом Лорана Q является допустимой.

Следствие 2. *Сумма $\sum R(a)\mu(a)$ значений любого полинома Лорана R по посчитанным с учетом кратности $\mu(a)$ корням a системы уравнений с развернутыми многогранниками Ньютона равна $(-1)^n \sum k_A \operatorname{res}_A\omega$, где*

$$\omega = R\frac{dP_1}{P_1} \wedge \dots \wedge \frac{dP_n}{P_n} = \left[Rz_1 \cdot \ldots \cdot z_n \det\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) / \left(P_1 \cdot \ldots \cdot P_n\right)\right] \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n}.$$

7. Геометрическое приложение. Для каждой вершины A многогранника $\Delta = \Delta_1 + \dots + \Delta n$ определен набор вершин $A_i \in \Delta_i$ таких, что $A = A_1 + \dots + A_n$. Положим $\det_A$ равным определителю матрицы, составленной из векторов $A_1, \dots, A_n$.

Теорема. *Для смешанного объема V развернутых многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ с рациональными вершинами справедлива формула: $n!V = (-1)^n \sum k_A \det_A$.*

Для многогранников с целыми вершинами теорема получается сравнением формулы Бернштейна для числа корней системы уравнений [5] со следствием 2 для $R \equiv 1$. Было бы интересно доказать теорему геометрически и отказаться от условия рациональности вершин.

8. Алгебраическое приложение. Следствие 2 позволяет построить явную теорию исключения для системы уравнений в $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ с развернутыми многогранниками Ньютона. Поясним, например, как получить уравнение на первую координату z_1 корней системы. Для этого достаточно посчитать суммы $\sum R(a)\mu(a)$ для полиномов R равных $1, z_1, \dots z_1^N$, где $N = n!V - 1$, и воспользоваться формулами Ньютона, выражающими коэффициенты уравнения через суммы степеней его корней.

9. Аффинный вариант. Многогранник Ньютона $\Delta \subset \mathbb{R}^n_+$ назовем *удобным*, если множество его вершин содержит по одной точке на каждом положительном координатном луче и точку 0. Набор многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ назовем *аффинно развернутым*, если все многогранники удобны, и каждая грань многогранника $\Delta = \Delta_1 + \dots + \Delta_n$, не лежащая в координатном подпространстве, заперта.

Теорема. *Все корни в $\mathbb{C}^n$ полиномиальной системы $P_1 = \dots = P_n = 0$ с аффинно развернутыми многогранниками Ньютона изолированы. Сумма по* *всем корням вычетов Гротендика формы ω, соответствующей любому полиному Q, делящемуся на моном $z_1 \cdot \ldots \cdot z_n$, равна $(-1)^n \sum k_A \operatorname{res}_A \omega$, где суммирование ведется по всем критическим вершинам A многогранника Δ.*

Если все корни системы лежат в $(\mathbb{C}\backslash 0)^n$, то утверждение вытекает из основной теоремы. Общий случай сводится к рассмотренному предельным переходом. Следствием теоремы является явная теория исключения для полиномиальных уравнений в $\mathbb{C}^n$ с аффинно развернутыми многогранниками Ньютона (ср. п. 8). Был известен [6] весьма частный случай этой теоремы (с одной нетривиальной вершиной A и с $k_A = 1$). Отметим, что в теореме можно отказаться от условий $0 \in \Delta_i$.

10. Локальный вариант. Рассмотрим систему аналитических уравнений $p_1 = \cdots = p_n = 0$ в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$. Пусть диаграммы Ньютона $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ этих уравнений удобны [2]. Определения развернутых диаграмм Ньютона, комбинаторных коэффициентов вершин диаграммы суммы $\Gamma = \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_n$ и вычетов $\operatorname{res}_A \omega$ почти дословно повторяют приведенные выше определения. При этом выполняется

Теорема. *Система аналитических уравнений $p_1 = \ldots p_n = 0$ с развернутыми диаграммами Ньютона имеет точку 0 изолированным решением. Вычет Гротендика в нуле формы $\omega = \frac{q}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$, где q — любая аналитическая функция, делящаяся на $z_1 \cdot \ldots \cdot z_n$, равен $(-1)^{n-1} \sum k_A \operatorname{res}_A \omega$, где суммирование ведется по всем вершинам A диаграммы Ньютона $\Gamma = \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_n$, лежащим строго внутри положительного октанта.*

Доказательство выводится из основной теоремы и теоремы п. 9.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов –М.: Наука, 1981.
2. *Arnol'd V.I., Varchenko A. N., Givental' A. B., Khovanskii A. G.* Singularities of functions, wave fronts, caustics and multidimensional integrals // Soviet Scientific Reviews. Math. Phys. Reviews: OPA, Amsterdam, 1984.–V. 4.–P. 1–92.
3. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и торические многообразия // Функцион. анализ и его прил.– 1977.–Т. 11, вып. 4.–С. 56–64.
4. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и формула Эйлера-Якоби // УМН.– 1978.–Т. 33, вып. 6.–С. 237–238.
5. *Бернштейн Д. Н.* Число корней системы уравнений // Функцион. анализ и его прил.– 1975.–Т. 9, вып. 3.–С. 1–4.
6. *Айзенберг Л. А., Цих А. К., Южаков А. П.* Многомерные вычеты и их приложения // "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 8 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)" М., 1985, 5–64.

Институт системных исследований РАН, Москва
Институт системного анализа РАН, Москва

Поступило 13 декабря 1994