ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2022, т. 318, с. 139–165

УДК 515.145

Обобщенные виртуальные многогранники и квазиторические многообразия*

И. Ю. Лимонченко[а], **Л. В. Монин**[б], **А. Г. Хованский**[в,г]

Поступило 15.03.2022; после доработки 12.04.2022; принято к публикации 11.05.2022

Развивается теория многочлена объема виртуального многогранника на основе топологических свойств объединений наборов аффинных подпространств в вещественных евклидовых пространствах. Эта теория далее применяется для получения топологической версии теоремы Бернштейна–Кушниренко и описаний по Стенли–Райснеру и по Пухликову–Хованскому колец когомологий обобщенных квазиторических многообразий.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4272

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [24] А.В. Пухликов и третий автор обобщили классическую теорию конечно аддитивных мер выпуклых многогранников и предложили геометрическую конструкцию виртуального многогранника как разности по Минковскому двух выпуклых многогранников. На основе этого понятия в [25] те же авторы доказали теорему типа Римана–Роха, связывающую интегралы и целочисленные суммы квазиполиномов над выпуклыми цепями из некоторого семейства. Вместе с тем они получили описание кольца когомологий комплексного неособого проективного торического многообразия через многочлен объема виртуального многогранника. В работе [26] была развита теория смешанного объема виртуальных выпуклых тел с целью получения “элементарного” доказательства классической g-теоремы; эта теория была мотивирована идеями работы [25] и подходом из [22].

Топологическое обобщение понятия комплексного неособого проективного торического многообразия известно в торической топологии как квазиторическое многообразие. Оно было определено в работе [7] и изучалось одновременно со своим вещественным аналогом — малым накрытием. В частности, в [7] было показано, что для квазиторических многообразий имеет место описание кольца когомологий по Стенли–Райснеру. С этого времени квазиторические многообразия и их обобщение — тор-многообразия [20, 10] активно изучались в торической топологии и нашли многочисленные значимые приложения в теории гомотопий [6, 9, 8], комплексных [5, 19] и специальных унитарных бордизмах [18, 17], гиперболической геометрии [2–4] и других областях исследований.

*Работа первого автора выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” (НИУ ВШЭ). Работа третьего автора выполнена при частичной финансовой поддержке Канадского гранта (проект 156833-17).

[а] Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия.

[б] Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig, Germany.

[в] Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto, Canada.

[г] Независимый московский университет, Москва, Россия.

E-mail: ilimonchenko@hse.ru (И.Ю. Лимонченко), leonid.monin@mis.mpg.de (Л.В. Монин), askold@math.utoronto.ca (А.Г. Хованский).

Замечательным свойством тор-многообразий является то, что они допускают комбинаторное описание, аналогично тому, что имеет место для торических многообразий. А именно, вместо вееров оно основано на понятиях мультивеера и мультимногогранника, введенных и изученных в [10]. Мультивеер — это набор конусов, которые, вообще говоря, могут перекрывать друг друга в отличие от классической ситуации конусов в обычном веере.

Мультимногогранник — это мультивеер, рассматриваемый вместе с множеством положительных чисел — расстояний от начала координат до нормальных гиперплоскостей, по одному числу на каждый луч. Иными словами, мультимногогранник — это набор гиперплоскостей в вещественном евклидовом пространстве с дополнительными комбинаторными данными, говорящими о том, какие пересечения поднаборов гиперплоскостей являются гранями мультимногогранника. В [1] теория мультимногогранников была применена для доказательства версии теоремы Бернштейна–Кушниренко и описания по Пухликову–Хованскому колец когомологий квазиторических многообразий. С другой стороны, описание по Стенли–Райснеру когомологий некоторых тор-многообразий было получено в работе [21] на основе методов и конструкций теории многообразий с углами и эквивариантной топологии.

Гладкие структуры на квазиторических многообразиях были построены в [5] при помощи топологического аналога конструкции Кокса, в которой дополнение конфигурации координатных подпространств заменяется на момент–угол многообразие. В силу результатов работы [23] момент–угол-комплексы над звездными сферами обладают гладкими структурами. Это позволило нам в работе [15] ввести в рассмотрение класс обобщенных квазиторических многообразий как пространства орбит момент–угол-комплексов над звездными сферами по свободному действию компактного тора максимально возможной размерности. Класс обобщенных квазиторических многообразий тесно связан с топологическими торическими многообразиями, введенными в [12]. Действительно, каждое обобщенное квазиторическое многообразие является топологическим торическим многообразием с ограничением гладкого действия группы $(\mathbb{C}^*)^n$ на $(S^1)^n$. Чтобы подчеркнуть данное различие, в этой статье мы продолжим использовать термин “обобщенные квазиторические многообразия”.

Данная работа посвящена развитию теории обобщенных виртуальных многогранников и ее применению для доказательства топологического аналога теоремы Бернштейна–Кушниренко и получения описаний по Стенли–Райснеру и по Пухликову–Хованскому колец пересечений обобщенных квазиторических многообразий.

Обобщенные виртуальные многогранники и конфигурации аффинных подпространств. В первой части данной работы мы строим теорию обобщенных виртуальных многогранников и интегрирования форм по ним на основе изучения гомотопических типов объединений наборов аффинных подпространств в вещественных евклидовых пространствах. Конструкция и теория обобщенных виртуальных многогранников были мотивированы свойствами интегральных функционалов на пространстве гладких выпуклых тел. Мы обсуждаем гладкие выпуклые тела в разд. 2.

Пусть Q — многочлен степени не выше k (однородный многочлен степени k) на $\mathbb{R}^n$, $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ — стандартная форма объема на $\mathbb{R}^n$, и пусть C_s — конус строго выпуклых тел $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Тогда функция

$$F(\Delta) = \int\limits_{\Delta} Q\omega$$

на конусе C_s является многочленом степени не выше $k+n$ (однородным многочленом степени $k+n$).

Теперь, чтобы расширить область определения интегрального функционала на все векторное пространство, порожденное конусом C_s, мы введем понятие *виртуального выпуклого* *тела* как формальной разности двух выпуклых тел (имея в виду обычное отождествление $\Delta_1 - \Delta_2 = \Delta_3 - \Delta_4 \Leftrightarrow \Delta_1 + \Delta_4 = \Delta_2 + \Delta_3$). В следующем утверждении мы сводим воедино результаты разд. 2.

Пусть M — пространство виртуальных выпуклых тел, представленных как разности выпуклых тел из конуса C_{s}. Тогда функционал F на C_{s} можно продолжить как интеграл формы $Q\omega$ по цепи виртуальных выпуклых тел. Более того, это продолжение будет многочленом на M.

В разд. 3 мы изучаем гомологические свойства объединений X (конечных) конфигураций аффинных подпространств $\{L_i\}$ в вещественном евклидовом пространстве $L = \mathbb{R}^n$ при помощи нервов K_X их (замкнутых) покрытий множествами L_i.

Для двух заданных конфигураций аффинных подпространств, занумерованных элементами одного и того же конечного множества индексов I, мы говорим, что нерв K_X конфигурации $\{L_i\}$ *доминирует* над нервом K_Y конфигурации $\{M_i\}$, если

$$\bigcap_{j\in J} L_j \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{j\in J} M_j \neq \varnothing \qquad \forall\, J \subset I,$$

и пишем $K_X \geq K_Y$ в этом случае. Кроме того, мы говорим, что непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ *согласовано* с K_X и K_Y, если

$$x \in L_{i_1} \cap \ldots \cap L_{i_k} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_k}.$$

Основным инструментом изучения гомологических свойств объединений наборов аффинных подпространств для нас является следующий результат.

(i) *Если отображение $f\colon X \to Y$, согласованное с K_X и K_Y, существует, то $K_X \geq K_Y$.*

(ii) *Если отображение $f\colon X \to Y$, согласованное с K_X и K_Y, существует, то оно единственно с точностью до гомотопии.*

(iii) *Если нерв K_X изоморфен нерву K_Y и отображение $f\colon X \to Y$, согласованное с K_X и K_Y, существует, то f является гомотопической эквивалентностью между X и Y.*

Затем мы показываем, что всякое объединение X аффинных подпространств допускает так называемую *хорошую триангуляцию* (см. определение 3.6), и используем этот факт, чтобы доказать, что если $K_X \geq K_Y$, то существует отображение $f\colon X \to Y$, согласованное с K_X и K_Y.

Теперь предположим, что дана конфигурация аффинных гиперплоскостей $\{H_i\}$ в $L = \mathbb{R}^n$. Мы называем ее *невырожденной*, если не существует никакого собственного линейного подпространства $V \subset \mathbb{R}^n$, которое было бы параллельно всем гиперплоскостям H_i. Тогда объединение X такой конфигурации имеет гомотопический тип букета $(n-1)$-мерных сфер, в котором число сфер равно числу ограниченных областей в $L \setminus X$ (см. также теорему 4.9). Таким образом, каждый цикл $\Gamma \in H_{n-1}(X, \mathbb{Z})$ представим в виде линейной комбинации $\Gamma = \sum \lambda_j \partial\Delta_j$, в которой каждый коэффициент λ_j равен числу вращения цикла Γ вокруг точки $a_j \in \Delta_j \setminus \partial\Delta_j$. Здесь через Δ_j мы обозначаем замыкание ограниченного открытого полиэдра, являющегося ограниченной компонентой в $L \setminus X$.

В разд. 4 мы изучаем гомотопические свойства объединений X (конечных) конфигураций аффинных подпространств $\{L_i\}$ в вещественном векторном пространстве $L = \mathbb{R}^n$ при помощи методов, разработанных в разд. 3, а также теории гладких выпуклых тел в пространстве L.

Будем говорить, что две конфигурации гиперплоскостей $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ *комбинаторно эквивалентны*, если соответствующие нервы $K_{\mathcal{H}_1}$ и $K_{\mathcal{H}_2}$ изоморфны. Пусть $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_s\}$ и $\mathcal{H}' = \{H'_1, \ldots, H'_s\}$ — две комбинаторно эквивалентные конфигурации гиперплоскостей, $X = \bigcup H_i$ и $Y = \bigcup H'_i$ — соответствующие объединения этих гиперплоскостей. Тогда существует каноническая гомотопическая эквивалентность $f\colon X \to Y$. Более того, мы покажем, что для всякого (конечного) симплициального комплекса K существует (конечная) конфигурация аффинных подпространств $\{L_i\}$ такая, что нерв (замкнутого) покрытия пространства X множествами L_i гомотопически эквивалентен самому X и имеет гомотопический тип симплициального комплекса K.

Изучая гомотопический тип объединения аффинных подпространств в $\mathbb{R}^n$, мы рассматриваем конечные объединения $U\subset\mathbb{R}^n$ открытых выпуклых тел: $U=\bigcup U_i$. Наша задача сводится к изучению гомотопического типа множества $\mathbb{R}^n\setminus U$. Мы будем делать это при помощи следующего понятия из выпуклой геометрии. Под *остаточным конусом* $\mathrm{tail}(U)$ выпуклого тела U мы будем понимать множество точек $v\in\mathbb{R}^n$ таких, что $a+tv\in U$ для любых $a\in U$ и $t\geq 0$.

Легко видеть, что для всякого выпуклого тела $U\subset\mathbb{R}^n$ его остаточный конус $\mathrm{tail}(U)$ обладает следующими свойствами:

- множество $\mathrm{tail}(U)$ является замкнутым выпуклым конусом в $\mathbb{R}^n$; выпуклое множество U ограничено тогда и только тогда, когда $\mathrm{tail}(U)$ есть начало координат $O\in\mathbb{R}^n$;
- если $\mathrm{tail}(U)$ является векторным пространством V, то для каждого трансверсального пространства V' (т.е. для всякого V' такого, что $\mathbb{R}^n=V\oplus V'$), множество U представимо в виде $U=U'\oplus V$, где $U'=U\cap V'$ — ограниченное выпуклое множество. Таким образом, если $\mathrm{tail}(U)$ — векторное пространство, то мы имеем $U=U'\oplus\mathrm{tail}(U)$ для некоторого ограниченного выпуклого множества U'.

Наш основной результат в разд. 4 можно сформулировать так. *Множество $\mathbb{R}^n\setminus U$ гомотопически эквивалентно множеству $\mathbb{R}^n\setminus\bigcup\{a_i+\mathrm{tail}(U_i)\}$, где суммирование производится по всем i таким, что $\mathrm{tail}(U_i)$ — векторное пространство.*

Теперь предположим, что все линейные пространства $V_i=\mathrm{tail}(U_i)$ равны одному и тому же линейному пространству V, и обозначим через T трансверсальное пространство к V, т.е. такое линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, что $\mathbb{R}^n=T\oplus V$. Тогда множество $\mathbb{R}^n\setminus U$ гомотопически эквивалентно $T\setminus\{b_i\}$, где $b_i:=T\cap\{a_i+V_i\}$. Это утверждение полностью описывает гомотопический тип множества $\mathbb{R}^n\setminus\bigcup H_i$, где $\{H_i\}$ — набор аффинных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$. В самом деле, дополнение $\mathbb{R}^n\setminus\bigcup H_i$ является объединением открытых выпуклых множеств. Более того, максимальные линейные подпространства, содержащиеся в $\mathrm{tail}(U_i)$, совпадают друг с другом для всех U_i: каждое их них равно пересечению всех линейных пространств $\widetilde{H}_i$, параллельных нашим аффинным гиперплоскостям H_i.

Объемы обобщенных виртуальных многогранников и кольца пересечений обобщенных квазиторических многообразий. Во второй части данной работы мы применяем теорию многочлена объема обобщенного виртуального многогранника к изучению колец когомологий обобщенных квазиторических многообразий.

Сначала мы строим специальную клеточную структуру для обобщенных квазиторических многообразий и выводим мономиальные и линейные соотношения между классами характеристических подмногообразий коразмерности 2 в их кольцах пересечений. Затем мы доказываем топологическую версию теоремы Бернштейна–Кушниренко на основе свойств многочлена объема обобщенного виртуального многогранника, что дает выпукло-геометрическую формулу для многочлена самопересечений во вторых когомологиях обобщенного квазиторического многообразия. Наконец, мы используем теорему Бернштейна–Кушниренко, а также описание алгебр с двойственностью Пуанкаре, полученное в [25, 16], для вывода описания по Пухликову–Хованскому кольца когомологий обобщенного квазиторического многообразия.

В разд. 5 мы вводим понятие обобщенного виртуального многогранника и изучаем свойства интегральных функционалов на пространстве обобщенных виртуальных многогранников. Пусть Δ — триангуляция $(n-1)$-мерной сферы на множестве вершин $V(\Delta)=\{v_1,\dots,v_m\}$. В дальнейшем мы будем отождествлять симплекс из Δ с множеством его вершин, рассматриваемым как подмножество в $\{1,2,\dots,m\}$.

Отображение $\lambda\colon V(\Delta)\to(\mathbb{R}^n)^*$ называется *характеристическим*, если для любых вершин $v_{i_1},\dots,v_{i_r}$, принадлежащих одному симплексу в Δ, их образы $\lambda(v_{i_1}),\dots,\lambda(v_{i_r})$ линейно независимы (над $\mathbb{R}$). Аналогично мы определяем понятие целочисленного *характеристического отображения* $\lambda\colon V(\Delta)\to(\mathbb{Z}^n)^*$.

Такое отображение задает m-мерное семейство конфигураций гиперплоскостей $\mathcal{AP}$ следующим образом. Для каждого $h=(h_1,\dots,h_m)\in\mathbb{R}^m$ конфигурация $\mathcal{AP}(h)$ определяется как

$$\mathcal{AP}(h)=\{H_1,\dots,H_m\},\qquad \text{где}\quad H_i=\{\ell_i(x)=h_i\};$$

здесь через ℓ_i мы обозначили линейную функцию $\lambda(v_i)$ для $i\in[m]:=\{1,2,\dots,m\}$. Для данного подмножества $I\subset[m]$ мы также обозначим через H_I пересечение соответствующих гиперплоскостей: $H_I=\bigcap_{j\in I}H_j$. Определим $\Delta^\perp$ как полиэдральный комплекс, двойственный к симплициальному комплексу Δ, т.е. грани старшей размерности в $\Delta^\perp$ — это замкнутые звезды в симплициальном комплексе Δ' вершин комплекса Δ, рассматриваемых как вершины в барицентрическом подразбиении Δ'. Наконец, мы обозначим через Γ_I грань комплекса $\Delta^\perp$, двойственную к симплексу $I\in\Delta$.

Обобщенным виртуальным многогранником мы называем отображение $f\colon\Delta^\perp\to\bigcup_{\mathcal{AP}(h)}H_i$, *подчиненное* характеристическому отображению λ; т.е. для всякого $I\subset[m]$ имеем

$$f(\Gamma_I)\subset H_I.$$

Пусть U — ограниченная область в $\mathbb{R}^n\setminus\bigcup_{\mathcal{AP}(h)}H_i$, а $W(U,f)$ — число вращения отображения f. Для данного многочлена Q на $\mathbb{R}^n$ рассмотрим следующий интегральный функционал на пространстве обобщенных виртуальных многогранников:

$$I_Q(f):=\sum W(U,f)\int\limits_U Q\omega.$$

Ключевым результатом разд. 5 является вычисление всех смешанных производных старшего порядка от $I_Q(f)$, которое приводит к следующему утверждению. *Пусть $I=\{i_1,\dots,i_r\}\subseteq[m]$ таково, что $I\notin\Delta$, а $k_1,\dots,k_r$ — положительные целые числа. Тогда*

$$\partial_{i_1}^{k_1}\dots\partial_{i_r}^{k_r}(I_Q)(f)=0.$$

С другой стороны, если $r=n=\dim\Delta+1$ и I — симплекс в Δ, двойственный к вершине $A\in\Delta^\perp$, то

$$\partial_I(I_Q)(f)=\operatorname{sgn}(I)Q(A)|\det(e_{i_1},\dots,e_{i_n})|.$$

Далее мы замечаем, что объем ориентированного образа $f_h(\Delta^\perp)\subset\mathbb{R}^n$ — это функция на вещественном векторном пространстве $\mathcal{L}=\{f_h\colon\Delta^\perp\to\mathbb{R}^n\}$, а ее значение $\operatorname{Vol}(f_h)$ на обобщенном виртуальном многограннике f_h есть однородный многочлен от переменных $h_1,\dots,h_m$, имеющий степень n. Отсюда и из предыдущего утверждения мы сразу получаем значения всех смешанных производных порядка n для многочлена объема обобщенного виртуального многогранника, а значит, и сам этот однородный многочлен.

Мы начинаем разд. 6 с напоминания понятия обобщенного квазиторического многообразия, введенного нами в работе [15]. В дальнейшем мы предполагаем, что $K=K_\Sigma$ — *звездная сфера*, т.е. пересечение полного симплициального веера Σ в $\mathbb{R}^n\simeq N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ с единичной сферой $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$. В этом случае момент–угол-комплекс $\mathcal{Z}_K$ обладает гладкой структурой (см. [23]). Пусть, далее, $\Lambda\colon\Sigma(1)\to N$ — характеристическое отображение. Тогда $(m-n)$-мерный подтор $H_\Lambda:=\ker\exp\Lambda\subset(S^1)^m$ действует свободно на $\mathcal{Z}_K$, и возникающее при этом гладкое многообразие $X_{\Sigma,\Lambda}:=\mathcal{Z}_K/H_\Lambda$ мы называем *обобщенным квазиторическим многообразием.*

Наше описание когомологий многообразия $X_{\Sigma,\Lambda}$ происходит в три шага.

1. Мы строим специальное клеточное разбиение для $X_{\Sigma,\Lambda}$ и показываем, что кольцо пересечений $H_*(X_{\Sigma,\Lambda})$ порождено классами характеристических подмногообразий коразмерности 2.
2. Мы выводим мономиальные и линейные соотношения между классами характеристических подмногообразий коразмерности 2 в $H_*(X_{\Sigma,\Lambda})$.
3. Мы доказываем топологическую версию теоремы Бернштейна–Кушниренко для $X_{\Sigma,\Lambda}$, а затем используем ее, чтобы получить описание по Пухликову–Хованскому кольца пересечений $H_*(X_{\Sigma,\Lambda})$.

Стоит отметить, что шаги 2 и 3 можно успешно проделать для гораздо более общего класса тор-многообразий. Однако в этом общем случае алгебра, получаемая в описании по Пухликову–Хованскому, может отличаться от кольца пересечений (кольца когомологий). В самом деле, алгебра (теорема 6.11), вычисляемая при помощи многочлена самопересечения (теорема 6.6), есть в точности двойственный по Пуанкаре фактор подалгебры в кольце пересечений (кольце когомологий), порожденной классами характеристических подмногообразий коразмерности 2.

2. ГЛАДКИЕ ВЫПУКЛЫЕ ТЕЛА И ПРОСТРАНСТВО ОТОБРАЖЕНИЙ $f\colon S^{n-1}\to\mathbb{R}^n$

В этом разделе мы рассматриваем мотивирующую конструкцию гладких виртуальных выпуклых тел.

Рассмотрим множество гладких отображений: $f\colon S^{n-1}\to\mathbb{R}^n$. Это множество представляет собой векторное пространство относительно операций умножения функций на скаляры и поточечного сложения функций:

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x),\qquad (\lambda f)(x)=\lambda f(x).$$

Для гладкого строго выпуклого тела $\Delta\subset\mathbb{R}^n$ его границу $\partial\Delta$ можно отождествить с образом единичной сферы при отображении Гаусса $f_\Delta\colon S^{n-1}\to\partial\Delta$.

В терминах опорной функции H_Δ для Δ отображение f_Δ совпадает с ограничением градиента $\operatorname{grad} H_\Delta$ на сферу S^{n-1}. Таким образом, мы получили включение пространства гладких строго выпуклых тел (и их формальных разностей) в пространство гладких отображений из S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. Это включение согласовано со сложением по Минковскому выпуклых тел.

Нас интересуют интегральные функционалы на пространстве выпуклых тел. Вначале заметим, что мы можем выразить интеграл $\int_\Delta\omega$ с помощью соответствующего отображения f_Δ:

$$\int\limits_\Delta\omega=\int\limits_{S^{n-1}}f^*\alpha,$$

где α — любая форма такая, что $d\alpha=\omega$.

Пусть α есть $(n-1)$-форма на $\mathbb{R}^n$, заданная формулой

$$\alpha=P_1\,\widehat{dx_1}\wedge\ldots\wedge dx_n+\ldots+P_n\,dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_n}.$$

Здесь крышка над dx_i означает, что член dx_i пропущен. Доказательство следующей теоремы очевидно.

Теорема 2.1. *Если все коэффициенты P_i формы α суть многочлены степени не выше k на $\mathbb{R}^n$, то функция $\int_{S^{n-1}}f^*\alpha$ на пространстве гладких отображений $f\colon S^{n-1}\to\mathbb{R}^n$ задается многочленом степени не выше $k+n-1$.*

Если все коэффициенты P_i формы α являются однородными многочленами степени k, то функция $\int_{S^{n-1}} f^*\alpha$ представляет собой однородный многочлен степени $k+n-1$ на пространстве гладких отображений.

Интегральный функционал на пространстве отображений и числа вращения. Для $(n-1)$-формы α на $\mathbb{R}^n$ и гладкого отображения $f\colon S^{n-1}\to\mathbb{R}^n$ можно указать другой способ вычисления интеграла $\int_{S^{n-1}} f^*\alpha$. Пусть $U\subset\mathbb{R}^n$ — связная компонента множества $\mathbb{R}^n\setminus f(S^{n-1})$.

Определение 2.2. *Числом вращения* $W(U,f)$ для U относительно f называется степень отображения

$$\frac{f-a}{\|f-a\|}\colon\ S^{n-1}\to S^{n-1}, \tag{2.1}$$

где a — произвольная точка в U.

Эта степень отображения корректно определена, т.е. не зависит от выбора точки $a\in U$, поскольку отображения из (2.1) при разных $a\in U$ гомотопически эквивалентны друг другу.

Предложение 2.3. *Для любой гладкой $(n-1)$-формы α на $\mathbb{R}^n$ и любого гладкого отображения $f\colon S^{n-1}\to\mathbb{R}^n$ имеет место равенство*

$$\int\limits_{S^{n-1}} f^*\alpha=\sum W(U,f)\int\limits_U d\alpha,$$

где сумма берется по всем связным компонентам U дополнения $\mathbb{R}^n\setminus f(S^{n-1})$.

Доказательство непосредственно вытекает из формулы Стокса. $\square$

Теорема 2.4. *Пусть Q — многочлен степени не выше k (однородный многочлен степени k) на $\mathbb{R}^n$, и пусть $\omega=dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$ — стандартная форма объема на $\mathbb{R}^n$. Тогда функция*

$$\sum W(U,f)\int\limits_U Q\omega$$

на пространстве гладких отображений представляется многочленом степени не выше $k+n$ (однородным многочленом степени $k+n$).

Доказательство. Рассмотрим $(n-1)$-форму $\alpha=P\,dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n$, где P — многочлен степени не выше $k+1$ такой, что $\partial P/\partial x_1=Q$. Ясно, что $d\alpha=Q\omega$. Таким образом, утверждение следует из теоремы 2.1 и предложения 2.3. $\square$

Обозначим через C_{s} конус строго выпуклых тел $\Delta\subset\mathbb{R}^n$ с гладкими границами. В качестве следствия мы получаем такой результат.

Следствие 2.5. *Пусть Q и ω те же, что и выше. Тогда функция*

$$F(\Delta)=\int\limits_\Delta Q\omega \tag{2.2}$$

на конусе C_{s} задается многочленом степени не выше $k+n$ (однородным многочленом степени $k+n$).

Доказательство. В самом деле, для отображения $f=\operatorname{grad} H_\Delta\colon S^{n-1}\to\mathbb{R}^n$ у множества $\mathbb{R}^n\setminus f(S^{n-1})$ имеются ровно две связные компоненты: компонента $U_1=\mathbb{R}^n\setminus\Delta$ и компонента $U_2=\operatorname{int}(\Delta)$. Соответствующие числа вращения суть $W(U_1,f)=0$, $W(U_2,f)=1$. Таким образом, наше утверждение вытекает из теоремы 2.4. $\square$

Мы хотели бы продолжить этот интегральный функционал на векторное пространство, порожденное конусом C_{s}.

Определение 2.6. 1. *Виртуальным выпуклым телом* называется формальная разность двух выпуклых тел (имеется в виду обычное отождествление $\Delta_1 - \Delta_2 = \Delta_3 - \Delta_4 \Leftrightarrow \Delta_1 + \Delta_4 = \Delta_2 + \Delta_3$).

2. *Опорной функцией виртуального выпуклого тела* $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$ назовем разность опорных функций для Δ_1 и Δ_2.

3. *Цепью виртуальных выпуклых тел с гладкой опорной функцией* H называется множество связных компонент U дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{grad} H(S^{n-1})$, взятых с коэффициентами $W(U, \operatorname{grad} H)$.

В следующей теореме мы суммируем результаты этого раздела.

Теорема 2.7. *Пусть M — пространство виртуальных выпуклых тел, представимых разностями выпуклых тел из конуса C_{s}. Тогда функция* (2.2) *на C_{s} может быть продолжена на M как интеграл от формы $Q\omega$ по цепи виртуальных выпуклых тел. Более того, такое продолжение задается многочленом на M.*

3. ОБЪЕДИНЕНИЯ КОНФИГУРАЦИЙ АФФИННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

В этом разделе мы изучаем гомологические свойства объединений (конечных) конфигураций аффинных подпространств в векторном пространстве $L \simeq \mathbb{R}^n$. Пусть I — конечное множество индексов. Рассмотрим набор $\{L_i\}$ аффинных подпространств в векторном пространстве L, занумерованных индексами $i \in I$, и пусть $X = \bigcup_{i\in I} L_i$ — их объединение.

Сначала определим основной комбинаторный инвариант объединения набора аффинных подпространств. Заметим, что топологическое пространство X обладает естественным покрытием аффинными подпространствами L_i.

Определение 3.1. *Нервом* K_X указанного естественного покрытия пространства X называется следующий симплициальный комплекс на множестве вершин, занумерованных индексами из I (т.е. вершине v_i соответствует индекс $i \in I$): множество вершин $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ задает симплекс в K_X тогда и только тогда, когда пересечение $L_{i_1} \cap \ldots \cap L_{i_k}$ непусто.

Рассмотрим также набор $\{M_i\}$ аффинных подпространств в линейном пространстве M, занумерованных индексами из того же множества I, с нервом K_Y относительно естественного покрытия своего объединения Y.

Определение 3.2. Будем говорить, что нерв K_X набора $\{L_i\}$ *доминирует* над нервом K_Y набора $\{M_i\}$, если

$$\bigcap_{j\in J} L_j \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{j\in J} M_j \neq \varnothing \qquad \forall\, J \subset I.$$

В этом случае мы будем писать $K_X \geq K_Y$.

Нервы K_X и K_Y назовем *эквивалентными*, если $K_X \geq K_Y$ и $K_Y \geq K_X$.

Заметим, что если $K_X \geq K_Y$, то имеется естественное вложение симплициальных комплексов $K_X \to K_Y$. Более того, если K_X и K_Y эквивалентны, то это вложение превращается в изоморфизм указанных комплексов.

3.1. Отображения, согласованные с покрытиями.

В этом пункте мы введем в рассмотрение наш главный инструмент для изучения объединений конфигураций аффинных подпространств. Пусть, как и раньше, $X = \bigcup_{i\in I} L_i$ и $Y = \bigcup_{i\in I} M_i$ — два набора аффинных подпространств, занумерованных индексами из конечного множества I. Нам понадобится следующее определение.

Определение 3.3. Для точки $x \in X = \bigcup_{i\in I} L_i$ обозначим через $I(x)$ подмножество индексов из I такое, что

$$x \in L_i \quad \Leftrightarrow \quad i \in I(x).$$

Для двух точек $x \in X$ и $y \in Y$ будем писать $x \geq y$, если $I(x) \supset I(y)$.

В частности, определение 3.3 приводит к следующему понятию.

Определение 3.4. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ назовем *согласованным* с K_X и K_Y, если $x \leq f(x)$ для любой точки $x \in X$, другими словами, если

$$x \in L_{i_1} \cap \ldots \cap L_{i_k} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_k}.$$

Следующая теорема является нашим основным инструментом при изучении гомологических свойств объединений конфигураций аффинных подпространств.

Теорема 3.5. *Имеют место следующие утверждения*:

(i) *если существует отображение $f\colon X \to Y$, согласованное с K_X и K_Y, то $K_X \geq K_Y$*;

(ii) *если существует отображение $f\colon X \to Y$, согласованное с K_X и K_Y, то оно единственно с точностью до гомотопии*;

(iii) *если K_X изоморфен K_Y и существует отображение $f\colon X \to Y$, согласованное с K_X и K_Y, то f — гомотопическая эквивалентность между X и Y.*

Доказательство. (i) Предположим, что отображение $f\colon X \to Y$, согласованное с K_X и K_Y, существует. Тогда имеем $K_X \geq K_Y$. В самом деле, если пересечение $L_{i_1} \cap \ldots \cap L_{i_k}$ непусто и содержит точку x, то пересечение $M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_k}$ содержит точку $f(x)$, а потому также непусто.

(ii) Если f, g — два отображения из X в Y, согласованные с K_X и K_Y, то для любого $0 \leq t \leq 1$ отображение $tf + (1-t)g$ также будет согласованным с K_X и K_Y. В самом деле, для всякой точки $x \in X$ множество точек $y \in Y$ таких, что $I(x) \subset I(y)$, выпукло.

(iii) Предположим, что K_X и K_Y изоморфны и имеются отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, согласованные с K_X и K_Y. Тогда отображение $g \circ f\colon X \to X$ будет гомотопической эквивалентностью. В самом деле, тождественное отображение Id_X и отображение композиции $g \circ f$ оба согласованы с K_X и потому гомотопны в силу утверждения (ii). Аналогичным образом отображение $f \circ g\colon Y \to Y$ гомотопно тождественному отображению Id_Y. $\square$

Чтобы доказать, что согласованные отображения существуют, нам понадобятся следующие определения.

Определение 3.6. Назовем *хорошей триангуляцией* множества $X = \bigcup_{i\in I} L_i$ такую его триангуляцию, что выполнено следующее условие: множество вершин симплекса S хорошей триангуляции вполне упорядочено в смысле определения 3.3. Другими словами, имеется порядок на множестве вершин $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}\}$ симплекса S такой, что

$$I(v_{i_1}) \subset \ldots \subset I(v_{i_s}).$$

Определение 3.7. Рассмотрим следующую *естественную стратификацию* пространства $X = \bigcup_{i\in I} L_i$ открытыми стратами разных размерностей: мы говорим, что две точки $x, y \in X$ принадлежат одному страту, если $x \geq y$ и $y \geq x$, или, иными словами, если $I(x) = I(y)$. Страт, содержащий точку x, есть пересечение $L(x)$ всех подпространств L_i при $i \in I(x)$, из которого удалили объединение подпространств L_i при $i \notin I(x)$.

Определение 3.8. Будем говорить, что страт U_1 естественной стратификации пространства X *больше*, чем страт U_2 той же самой стратификации ($U_1 \geq U_2$), если замыкание страта U_1 содержит U_2.

Легко видеть, что $U_1 \geq U_2$ тогда и только тогда, когда для любых $x \in U_1$, $y \in U_2$ имеет место отношение $x \geq y$.

Определение 3.9. Мы говорим, что страт U имеет *ранг* k, если наиболее длинная строго убывающая цепочка стратов вида $U = U_1 > \ldots > U_k$ имеет длину k.

Теорема 3.10. *Любое конечное объединение $X = \bigcup L_i$ аффинных подпространств L_i пространства L допускает хорошую триангуляцию.*

Доказательство. Мы построим хорошую триангуляцию пространства X в два шага. Сначала мы построим триангуляцию, согласованную с естественной стратификацией пространства X, т.е. такую триангуляцию, что всякий открытый симплекс содержится в некотором открытом страте.

Триангуляция, согласованная с естественной стратификацией пространства X, может быть построена по индукции: вначале мы триангулируем все страты ранга 1 (т.е. все замкнутые страты), а затем шаг за шагом продолжаем эту триангуляцию на все страты на единицу большего ранга.

Теперь мы можем построить хорошую триангуляцию, беря барицентрическое подразбиение всякой триангуляции пространства X, согласованной со стандартной (естественной) стратификацией. Действительно, множество вершин каждого симплекса в этом барицентрическом подразбиении соответствует возрастающей цепочке граней симплекса изначальной триангуляции, которые содержатся в возрастающей цепочке стратов. $\square$

Теорема 3.11. *Если $K_X \geq K_Y$, то существует отображение $f\colon X \to Y$, согласованное с K_X и K_Y.*

Доказательство. Сначала рассмотрим хорошую триангуляцию τ пространства X. Затем для каждой вершины v из τ определим значение $f(v)$ как точку из Y такую, что $I(f(x)) \supset I(x)$. Такая точка всегда найдется, поскольку $K_X \geq K_Y$. Тогда мы можем продолжить отображение f по линейности на каждый симплекс из τ.

Построенное отображение f будет согласовано с K_X и K_Y. В самом деле, для каждой точки $x \in X$ найдется минимальный симплекс S хорошей триангуляции такой, что $x \in S$. Среди вершин $V(S)$ этого симплекса найдется максимальная вершина v. Легко видеть, что $I(x) = I(v)$. Поскольку $f(x)$ принадлежит линейной комбинации точек $f(v_i)$ для $v_i \in V(S)$, выполнено включение $I(f(x)) \supset I(x)$. $\square$

3.2. Барицентрическое подразбиение и покрытие симплициального комплекса. Нам понадобятся некоторые общие результаты о барицентрических подразбиениях симплициальных комплексов.

Пусть C' — симплициальный комплекс, получаемый барицентрическим подразбиением данного симплициального комплекса C. Каждая вершина комплекса C' есть барицентр некоторого симплекса из C. Множество вершин комплекса C' принадлежит одному симплексу из C' тогда и только тогда, когда симплексы из C, соответствующие этим вершинам, вполне упорядочены по отношению включения.

Произвольной вершине v комплекса C поставим в соответствие замкнутое подмножество X_v комплекса C', равное объединению всех симплексов из C', содержащих вершину v.

Лемма 3.12. 1. *Нерв покрытия комплекса C' набором замкнутых подмножеств X_v, отвечающих всем вершинам v комплекса C, совпадает с изначальным симплициальным комплексом C.*

2. *Все множества X_v, а также их непустые пересечения гомотопически тривиальны.*

Доказательство. 1. По определению множество вершин v комплекса C можно отождествить с множеством подмножеств X_v, покрывающим комплекс C'. Если вершины $v_1, \ldots, v_k$

принадлежат одному симплексу из C, то соответствующие множества $X_{v_1}, \dots, X_{v_k}$ содержат барицентр этого симплекса, а потому эти множества имеют непустое пересечение.

Верно и обратное: множество вида X_v пересекает симплекс Δ комплекса C, только если v является вершиной комплекса Δ. Таким образом, если пересечение $X_{v_1} \cap \dots \cap X_{v_k}$ непусто, то вершины $v_1, \dots, v_k$ принадлежат некоторому симплексу Δ комплекса C.

2. Всякое непустое пересечение $X_{v_1} \cap \dots \cap X_{v_k}$ может быть представлено как объединение некоторых симплексов из C', содержащих общую вершину, являющуюся барицентром симплекса с вершинами $v_1, \dots, v_k$. Заметим, что это объединение является конусом, а потому оно гомотопически тривиально. $\square$

3.3. Отображения $f\colon K'_X \to Y$ в случае $K_X \geq K_Y$. Пусть $f\colon K'_X \to Y$ — непрерывное отображение. Оно согласовано с естественными покрытиями

$$BK_X = \bigcup_{i \in I} X_{v_i} \qquad \text{и} \qquad Y = \bigcup_{i \in I} M_i,$$

если для каждого индекса $i \in I$ имеет место включение $f(X_{v_i}) \subset M_i$.

Предположим теперь, что $K_X \geq K_Y$. Пусть K_X — нерв естественного покрытия пространства $X = \bigcup_{i \in I} L_i$. Тогда барицентрическое подразбиение K'_X комплекса K_X обладает своим собственным естественным покрытием — покрытием множествами $\widehat{L}_i$, равными объединениям симплексов из K'_X, содержащих вершину v_i, соответствующую пространству L_i. Согласно лемме 3.12 нерв такого покрытия комплекса K'_X изоморфен комплексу K_X. Теперь мы обобщим определение отображений между топологическими пространствами, согласованных с их покрытиями. Пусть I — конечное множество индексов. Рассмотрим множество $\{X_i\}$ замкнутых подмножеств пространства X, занумерованных индексами $i \in I$.

Определение 3.13. *Нервом* K_X покрытия $X = \bigcup X_i$ называется симплициальный комплекс, множество вершин которого V_X содержит по одной вершине v_i для каждого подмножества X_i, т.е. по одной вершине v_i для каждого индекса $i \in I$. Множество вершин $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ определяет симплекс из K_X тогда и только тогда, когда пересечение $X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}$ непусто.

Доказательство следующей теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 3.5.

Теорема 3.14. 1. *Отображение $f\colon K'_X \to Y$, согласованное с K_X и K_Y, существует тогда и только тогда, когда $K_X \geq K_Y$.*

2. *Если отображение $f\colon K'_X \to Y$, согласованное с K_X и K_Y, существует, то оно единственно с точностью до гомотопии.*

4. ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП ОБЪЕДИНЕНИЯ КОНФИГУРАЦИИ АФФИННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

В этом разделе мы изучаем гомотопический тип объединения набора аффинных подпространств. В частности, мы показываем, что объединение конфигурации аффинных подпространств может иметь гомотопический тип произвольного симплициального комплекса (теорема 4.4), в то время как объединение аффинных гиперплоскостей всегда имеет гомотопический тип букета сфер (теорема 4.9)

Рассмотрим конечное множество $\{A_i\}$ аффинно независимых точек в вещественном векторном пространстве L. Пусть симплекс $T \subset L$ имеет множеством вершин набор точек $\{A_i\}$. Вместе с каждой гранью T_J симплекса T рассмотрим аффинную оболочку L_{T_J} грани T_J. Мы получаем набор аффинных подпространств в L, соответствующий граням T_J.

Напомним, что подпространство A топологического пространства X называется *строгим деформационным ретрактом*, если существует гомотопия $\pi(x,t)\colon X \times I \to X$ такая, что

(i) $\pi(x,0) = x$ для любого $x \in X$;

(ii) $\pi(x,1) \in A$ для любого $x \in X$;

(iii) $\pi(a,t) = a$ для любых $a \in A$ и $t \in I$.

Лемма 4.1. *Симплекс T является строгим деформационным ретрактом объединения гиперплоскостей в L. Более того, деформационную ретракцию $\pi\colon L \times I \to L$ можно выбрать сохраняющей покрытие пространства L аффинными подпространствами L_{T_i}, т.е.*

$$\pi(x,t) \in L_{T_i} \qquad \text{для любых} \quad x \in L_{T_i}, \quad t \in I.$$

Доказательство. Заметим, что произвольная точка $x \in L$ может быть единственным образом представлена в виде

$$x = \sum \lambda_i A_i, \qquad \text{где} \quad \sum \lambda_i = 1$$

(числа λ_i суть *барицентрические координаты* точки x относительно симплекса T).

Рассмотрим проекцию $\pi\colon L \to T$, переводящую точку x с барицентрическими координатами $\{\lambda_i\}$ в точку $\pi(x)$, у которой i-я барицентрическая координата равна $\max\{\lambda_i, 0\}$.

Легко видеть, что отображение $\pi(x,t)$, определенное формулой

$$\pi(x,t) = (1-t)x + t\pi(x),$$

удовлетворяет всем условиям нашей леммы. $\square$

Пусть $\{T_i\}$ — упорядоченный набор граней симплекса T мощности N. Рассмотрим следующие два множества, снабженные покрытиями, состоящими каждое из N замкнутых выпуклых множеств:

- объединение $\bigcup_{i=1}^N T_i$, снабженное покрытием гранями T_i из набора $\{T_i\}$;
- объединение $\bigcup_{i=1}^N L_{T_i}$ аффинных оболочек L_{T_i} граней T_i, снабженное покрытием пространствами L_{T_i}.

Теорема 4.2. *Естественное вложение $\bigcup T_i \to \bigcup L_{T_i}$ превращает $\bigcup T_i$ в сильный деформационный ретракт пространства $\bigcup L_{T_i}$. Более того, деформационную ретракцию можно выбрать сохраняющей покрытие пространства $\bigcup L_{T_i}$ аффинными пространствами L_{T_i}.*

Доказательство. В самом деле, в качестве требуемой проекции и ее гомотопии можно взять ограничение гомотопии, построенной в лемме 4.1, на пространство $\bigcup L_{T_i}$. $\square$

4.1. Барицентрическое подразбиение и соответствующие аффинные подпространства. Пусть Δ — симплициальный комплекс, и пусть Δ' — его барицентрическое подразбиение. В частности, любой симплекс Δ_i в Δ соответствует вершине A_{Δ_i} комплекса Δ'.

Рассмотрим набор аффинно независимых точек в некотором векторном пространстве L, отождествляемый нами с множеством вершин комплекса Δ'. Тогда Δ' естественно вкладывается в симплекс T, порожденный этим набором.

Для произвольной вершины A_i комплекса Δ обозначим через $\mathrm{St}(A_i)$ ее *звезду*, т.е. набор симплексов комплекса Δ, имеющих A_i своей вершиной. Заметим, что всякая звезда $\mathrm{St}(A_i)$ определяет грань T_i симплекса T, являющуюся выпуклой оболочкой вершин симплекса T, соответствующих симплексам из звезды $\mathrm{St}(A_i)$.

Пусть X_Δ — объединение всех граней $T_i \subset T$, соответствующих вершинам комплекса Δ. Тогда пространство $X = X_\Delta$ обладает естественным покрытием гранями T_i. С другой стороны, пусть Y — объединение всех аффинных оболочек L_{T_i} граней T_i, соответствующих вершинам комплекса Δ. Тогда пространство Y обладает естественным покрытием подпространствами L_{T_i}.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из теоремы 4.2.

Следствие 4.3. *Подмножество $X \subset Y$ является деформационным ретрактом пространства Y. Более того, деформационная ретракция сохраняет покрытия пространства X множествами T_i и пространства Y множествами L_{T_i}.*

Теорема 4.4. *Нерв покрытия пространства X множествами T_i может быть естественным образом отождествлен с нервом покрытия пространства Y множествами L_{T_i}. Оба нерва могут быть естественным образом отождествлены с исходным симплициальным комплексом Δ.*

Мы можем рассмотреть барицентрическое подразбиение Δ' комплекса Δ как подкомплекс комплекса всех граней симплекса T. Обозначим через Z объединение всех симплексов из Δ'. Пространство Z снабжено следующим покрытием: каждой вершине A_i комплекса Δ поставим в соответствие объединение Z_i всех (замкнутых) симплексов, содержащих вершину A_i. Иными словами, Z_i есть объединение всех граней симплекса T, содержащих вершину A_i и принадлежащих симплициальному комплексу Δ'.

Заметим, что при отображении вложения $Z \to X$ множества Z_i отождествляются с $T_i \cap Z$.

Теорема 4.5. *Существует отображение $\pi\colon X \to Z$ такое, что выполнены следующие условия*:

(1) *π отображает всякий симплекс T_i в множество Z_i*;

(2) *π отображает всякий симплекс из Z в себя.*

Доказательство. Пространство X стратифицировано своим покрытием $X = \bigcup T_i$ следующим образом. Каждый страт этой стратификации есть непустое пересечение некоторого набора множеств T_i с удалением всех непустых пересечений бо́льших наборов множеств T_i. В частности, эта стратификация также стратифицирует и подмножество $Z \subset X$.

Множество всех стратов построенной стратификации можно естественным образом отождествить с множеством всех симплексов из Δ. Действительно, пересечение $\bigcap T_{i_j}$ непусто тогда и только тогда, когда найдется симплекс в Δ с множеством вершин A_{i_j}.

Другими словами, множество всех стратов находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех вершин комплекса Δ', т.е. с множеством всех вершин симплекса T.

Триангуляция пространства X гранями симплекса T, лежащими в X, согласована с построенной стратификацией, т.е. каждый открытый симплекс этой триангуляции содержится в некотором страте.

Рассмотрим барицентрическое подразбиение построенной триангуляции. Заметим, что оно будет хорошей триангуляцией для нашей стратификации, т.е. всякий симплекс из этой триангуляции будет согласованным в следующем смысле: если два страта содержат две вершины некоторого симплекса из нашей триангуляции, то один из этих стратов содержится в замыкании другого.

Теперь мы можем определить искомое отображение π. Отображение π есть такое отображение из пространства X в пространство Z, линейное на каждом симплексе барицентрического подразбиения естественной триангуляции пространства X, которое отображает каждую вершину A этой триангуляции в вершину комплекса Δ', соответствующую страту, содержащему вершину A.

Легко проверить, что отображение, которое мы только что построили, удовлетворяет всем условиям нашей теоремы. $\square$

Теорема 4.6. *Отображение $\pi\colon X \to Z \subset X$ гомотопно тождественному отображению. Обозначим через $\widetilde{\pi}$ ограничение отображения π на множество Z. Тогда $\widetilde{\pi}$ отображает Z в себя и это отображение также гомотопно тождественному отображению.*

Доказательство. Заметим, что если $x \in T_i \subseteq X$, то точка $\pi(x)$ также лежит в T_i, как и весь отрезок, соединяющий две эти точки, в силу самого определения отображения π. Поэтому мы можем определить линейную гомотопию $F(x,t) = (1-t)x + t\pi(x)$ между тождественным отображением и отображением π.

Далее, отображение $\widetilde{\pi}$ переводит всякий симплекс из Δ' в себя. Значит, мы можем определить линейную гомотопию $G(x,t) = (1-t)x + t\widetilde{\pi}(x)$ между тождественным отображением и отображением π. $\square$

4.2. Гомотопический тип объединения конфигурации гиперплоскостей. Пусть $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_s\}$ — набор аффинных гиперплоскостей в $L \simeq \mathbb{R}^n$, занумерованных индексами из множества $[s] = \{1, \ldots, s\}$.

Определение 4.7. Назовем *нервом* $K_{\mathcal{H}}$ набора $\mathcal{H}$ симплициальный комплекс на s вершинах $v_1, \ldots, v_s$ такой, что множество вершин $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ определяет симплекс из $K_{\mathcal{H}}$ тогда и только тогда, когда пересечение $H_{i_1} \cap \ldots \cap H_{i_k}$ непусто.

Будем говорить, что две конфигурации аффинных гиперплоскостей $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ *комбинаторно эквивалентны*, если соответствующие нервы $K_{\mathcal{H}_1}$ и $K_{\mathcal{H}_2}$ изоморфны.

Теорема 4.8. *Предположим, что $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_s\}$ и $\mathcal{H}' = \{H_1', \ldots, H_s'\}$ — две комбинаторно эквивалентные конфигурации гиперплоскостей, и пусть $X = \bigcup H_i$ и $Y = \bigcup H_i'$ — соответствующие объединения гиперплоскостей. Тогда существует каноническая гомотопическая эквивалентность $f\colon X \to Y$.*

Доказательство. В качестве канонической гомотопической эквивалентности $f\colon X \to Y$ можно взять любое непрерывное отображение такое, что

$$f(x) \in H_j' \qquad \text{для всех} \quad x \in H_j. \qquad \square$$

В частности, существует канонический изоморфизм между группами гомологий комбинаторно эквивалентных конфигураций гиперплоскостей $f_*\colon H_*(X) \to H_*(Y)$.

Будем говорить, что набор гиперплоскостей $\{H_1, \ldots, H_s\}$ является *невырожденным*, если он является невырожденным как набор аффинных подпространств, т.е. не существует собственного линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$, параллельного всем гиперплоскостям H_i.

Теорема 4.9. *Пусть $\mathcal{H}$ — невырожденная конфигурация аффинных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$. Тогда ее объединение X гомотопически эквивалентно букету $(n-1)$-мерных сфер. Число сфер равно числу ограниченных областей в дополнении $\mathbb{R}^n \setminus X$.*

Мы докажем более общее утверждение (см. теорему 4.13 и следствие 4.14).

Следствие 4.10. *Пусть $L \supset X = \bigcup L_i$ — объединение невырожденной конфигурации аффинных гиперплоскостей L_i. Тогда при $n > 1$ группа $H_{n-1}(X, \mathbb{Z})$ является свободной абелевой группой, порожденной циклами $\partial\Delta_j$, где Δ_j — замыкание ограниченного открытого полиэдра, являющегося ограниченной компонентой дополнения $L \setminus X$.*

Остальные группы гомологий $H_i(X, \mathbb{Z})$ при $i > 0$ равны нулю, а $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Согласно следствию 4.10 каждый цикл $\Gamma \in H_{n-1}(X, \mathbb{Z})$ представляется в виде линейной комбинации

$$\Gamma = \sum \lambda_j \, \partial\Delta_j,$$

где каждый коэффициент λ_j равен числу вращения цикла Γ вокруг точки $a_j \in \Delta_j \setminus \partial\Delta_j$.

Следствие 4.11. *Пусть $L^0 \subset L$ — такое линейное подпространство, что $L = L^0 \oplus \widehat{L}$, т.е. L — прямая сумма подпространств $\widehat{L}$ и L^0. Пусть $L_i^0 = L_i \cap L^0$ и $X^0 = X \cap L^0 = \bigcup L_i^0$. Тогда X^0 — объединение невырожденной конфигурации аффинных гиперплоскостей $L_i^0 \subset L^0$. Кроме того, $X = X^0 \times \widehat{L}$ и, таким образом, X гомотопически эквивалентно букету $(n-1-l)$-мерных сфер, где $l = \dim \widehat{L}$.*

Теперь мы готовы доказать теорему 4.9. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — конечное объединение открытых выпуклых тел: $U = \bigcup U_i$. Мы будем изучать гомотопический тип множества $\mathbb{R}^n \setminus U$. Вначале нам понадобится следующее

Определение 4.12. *Остаточным конусом* для выпуклого тела U называется множество точек $v \in \mathbb{R}^n$ таких, что $a + tv \in U$ для любых $a \in U$ и $t \geq 0$.

Легко видеть, что для всякого выпуклого тела $U \subset \mathbb{R}^n$ множество $\operatorname{tail}(U)$ удовлетворяет следующим условиям:

- множество $\operatorname{tail}(U)$ является замкнутым выпуклым конусом в $\mathbb{R}^n$; выпуклое множество U ограничено тогда и только тогда, когда $\operatorname{tail}(U)$ есть начало координат $O \in \mathbb{R}^n$;
- если $\operatorname{tail}(U)$ является векторным пространством L, то для всякого трансверсального пространства L_1 (т.е. для всякого L_1 такого, что $\mathbb{R}^n = L \oplus L_1$) множество U представляется в виде $U = U_1 \oplus L$, где $U_1 = U \cap L_1$ — ограниченное выпуклое множество, т.е. если $\operatorname{tail}(U)$ — векторное пространство, то мы имеем $U = U_1 \oplus \operatorname{tail}(U)$ для некоторого ограниченного выпуклого множества U_1.

Если множество $\operatorname{tail}(U_i)$ является линейным пространством L_i, то вместе с U_i мы также можем рассмотреть сдвинутое пространство $a_i + L_i \subset U_i$, где a_i — произвольная точка в U_i.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 4.13. *Для определенного выше множества U множество $\mathbb{R}^n \setminus U$ гомотопически эквивалентно множеству $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup\{a_i + L_i\}$, где объединение берется по всем индексам i таким, что $\operatorname{tail}(U_i)$ является векторным пространством.*

Предположим, что в этой теореме все линейные пространства L_i равны одному и тому же линейному пространству L. Обозначим через T трансверсальное пространство к L, т.е. такое линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, что $\mathbb{R}^n = T \oplus L$.

Следствие 4.14. *При сделанных предположениях множество $\mathbb{R}^n \setminus U$ гомотопически эквивалентно множеству $T \setminus \{b_i\}$, где $b_i = T \cap \{a_i + L_i\}$.*

Заметим, что следствие 4.14 полностью описывает гомотопический тип множества $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup H_i$ для конфигурации аффинных гиперплоскостей $\{H_i\}$ в $\mathbb{R}^n$. В самом деле, дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup H_i$ является объединением открытых выпуклых множеств. Более того, максимальные линейные подпространства, содержащиеся в $\operatorname{tail}(U_i)$, совпадают друг с другом для всех U_i: каждое из них будет равно пересечению линейных пространств $\widetilde{H}_i$, параллельных аффинным гиперплоскостям H_i.

Для доказательства теоремы нам понадобятся несколько общих фактов о выпуклых телах.

Лемма 4.15. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное открытое выпуклое множество, X — замыкание множества U, ∂X — граница множества X (таким образом, $X = U \cup \partial X$), и пусть $a \in U$ — произвольная точка в U. Тогда граница ∂X является деформационным ретрактом дополнения $X \setminus \{a\}$.*

Доказательство. Пусть $\pi\colon X \setminus \{a\} \to \partial X$ — проекция из $X \setminus \{a\}$ на ∂X из точки a. Тогда отображение

$$F(x,t) = (1-t)x + t\pi(x), \qquad \text{где} \quad x \in X \setminus \{a\}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

задает деформационную ретракцию. $\square$

Следствие 4.16. *Предположим, что $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество такое, что $\operatorname{tail}(U)$ является векторным пространством L. Тогда по определению для всякого $a \in U$ сдвинутое пространство $a + L$ лежит в U, а множество X гомотопически эквивалентно множеству $X \setminus L$, где X — замыкание множества U.*

Нам понадобится следующая дополнительная лемма. Представим $\mathbb{R}^n$ в виде $\mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R}^1$ и будем использовать соответствующее обозначение (x, y) для точек из $\mathbb{R}^n$, где $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $y \in \mathbb{R}^1$.

Пусть $y = f(x)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}^{n-1}$. Обозначим через $X \subset \mathbb{R}^n$ множество точек (x, y), где $y \geq f(x)$. Тогда ∂X является графиком функции f (т.е. $(x, y) \in \partial X$ тогда и только тогда, когда $y = f(x)$).

Лемма 4.17. *Естественная проекция $\pi\colon X \to \partial X$, отображающая точку (x, y) в точку $(x, f(x))$, гомотопна тождественному отображению.*

Доказательство. В самом деле, можно применить гомотопию

$$G(x, y, t) = (1 - t)(x, y) + t\pi(x, y). \qquad \square$$

Теперь будем предполагать, что множество $\operatorname{tail}(U) \subset \mathbb{R}^n$ не является векторным пространством, т.е. предположим, что существует вектор $v \in \operatorname{tail}(U)$ такой, что вектор $-v$ не лежит в $\operatorname{tail}(U)$.

Пусть $a \in U$ — произвольная точка. Поскольку $-v$ не лежит в $\operatorname{tail}(U)$, найдется положительное число τ такое, что $a - \tau v \in \partial X$. Пусть $\widetilde{L}$ — опорная гиперплоскость для X в точке $a - \tau v$.

Сделаем аффинную замену переменных в $\mathbb{R}^n$ таким образом, чтобы гиперплоскость $\widetilde{L}$ стала гиперплоскостью $y = 1$, точка $a - \tau v$ стала точкой $(0, 1)$, а вектор v стал вектором из стандартного базиса в $\mathbb{R}^1$. После такой замены координат U становится открытым выпуклым множеством в $\mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R}^1$ таким, что U целиком лежит в полупространстве $y \geq 1$ и вместе с каждой точкой $a \in U$ наше выпуклое множество U содержит весь луч $a + \tau v$, где $\tau \geq 0$ и v есть вектор $(0, 1)$.

Рассмотрим диффеоморфизм g открытого полупространства $y > 0$ в себя, задаваемый формулой $g(x, y) = (xy, y)$.

Лемма 4.18. *Под действием g замыкание X множества U отображается в область Y, определяемую следующим условием: $(x, y) \in Y$ тогда и только тогда, когда $y \geq f(x)$, где f — некоторая непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим отображение $\widetilde{g}\colon \partial X \to \mathbb{R}^{n-1} \oplus \{0\}$, задаваемое формулой $\widetilde{g}(x, y) = (xy, 0)$. Покажем, что $\widetilde{g}$ — гомеоморфизм между ∂X и $\mathbb{R}^{n-1}$. Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^{n-1} \oplus \{0\}$ рассмотрим множество точек $\partial X_x \subset \partial X$, определяемое следующим условием: $(x_0, y_0) \in \partial X_x$ тогда и только тогда, когда x_0 получается из x умножением на скаляр. Легко видеть, что множество ∂X_x гомеоморфно прямой.

Мы можем параметризовать ее при помощи ориентированного расстояния от точки $(0, 1)$ (которая принадлежит множеству ∂X_x для каждого x) вдоль этой кривой с произвольно выбранной ориентацией.

Тогда $\widetilde{g}$ отображает кривую ∂X_x в прямую с направляющим вектором x. Более того, это отображение будет монотонным и собственным. Поэтому оно является гомеоморфизмом между ∂X_x и прямой τx, $\tau \in \mathbb{R}$. Из этого рассуждения следует, что отображение $\widetilde{g}\colon \partial X \to \mathbb{R}^{n-1}$ само является гомеоморфизмом.

Заметим, что образ ∂X при диффеоморфизме $g\colon (x, y) \mapsto (xy, y)$ есть график функции f такой, что значение $f(x)$ равно координате y точки $(x, y) := \widetilde{g}^{-1}(x)$. Тогда множество X отображается этим диффеоморфизмом в область из $\mathbb{R}^n$, состоящую из точек (x, y), у которых $y \geq f(x)$. $\square$

Следствие 4.19. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество такое, что конус $\operatorname{tail}(U)$ не является векторным пространством. Тогда граница ∂X замыкания X множества U гомотопически эквивалентна X.*

5. ОБОБЩЕННЫЕ ВИРТУАЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть Δ — симплициальный комплекс, гомеоморфный $(n-1)$-мерной сфере. Обозначим через $V(\Delta)=\{v_1,\dots,v_m\}$ множество вершин комплекса Δ. В дальнейшем мы будем отождествлять симплекс S из Δ с множеством вершин $I\subset V(\Delta)$, принадлежащих симплексу S.

Определение 5.1. Отображение $\lambda\colon V(\Delta)\to(\mathbb{R}^n)^*$ называется *характеристическим*, если для любого набора вершин $v_{i_1},\dots,v_{i_r}$, принадлежащих одному симплексу из Δ, их образы $\lambda(v_{i_1}),\dots,\lambda(v_{i_r})$ линейно независимы. В частности, для всякого максимального симплекса $\{v_{i_1},\dots,v_{i_n}\}$ образы $\lambda(v_{i_1}),\dots,\lambda(v_{i_n})$ порождают базис пространства $(\mathbb{R}^n)^*$.

Отображение $\lambda\colon V(\Delta)\to(\mathbb{Z}^n)^*$ называется *целочисленным характеристическим отображением*, если для любого максимального симплекса $\{v_{i_1},\dots,v_{i_n}\}$ из Δ образы $\lambda(v_{i_1}),\dots,\lambda(v_{i_n})$ задают базис решетки $(\mathbb{Z}^n)^*$.

Будем обозначать через ℓ_i линейную функцию $\lambda(v_i)$ для $i\in[m]$. Характеристическое отображение λ определяет m-мерное семейство конфигураций гиперплоскостей $\mathcal{AP}$ следующим образом. Для всякого $h=(h_1,\dots,h_m)\in\mathbb{R}^m$ конфигурация $\mathcal{AP}(h)$ задается как

$$\mathcal{AP}(h)=\{H_1,\dots,H_m\},\qquad \text{где}\quad H_i=\{\ell_i(x)=h_i\}.$$

Мы обозначаем через X_h объединение всех гиперплоскостей из $\mathcal{AP}(h)$.

Для данного подмножества $I\in[m]$ мы будем обозначать через H_I пересечение

$$H_I=\bigcap_{j\in I}H_j.$$

Непосредственно из определения вытекает, что H_I непусто, если вершины v_j при $j\in I$ принадлежат одному симплексу.

Пусть $\Delta^\perp$ — *двойственный полиэдральный комплекс* к симплициальному комплексу Δ; мы определяем соответствие между гранями комплекса $\Delta^\perp$ и стратами H_I следующим образом: грань Γ_I комплекса $\Delta^\perp$, двойственная к симплексу I из Δ, соответствует страту H_I.

Определение 5.2. Мы говорим, что отображение $f\colon\Delta^\perp\to X_h$ *подчинено* характеристическому отображению λ, если $f(\Gamma_I)\subset H_I$ для любой грани Γ_I комплекса $\Delta^\perp$.

Теорема 5.3. *Пространство отображений $f\colon\Delta^\perp\to X_h$, подчиненных характеристическому отображению λ, является непустым выпуклым множеством. В частности, любые два таких отображения гомотопны.*

Доказательство. Вначале докажем вторую часть нашего утверждения, предполагая, что отображение $f\colon\Delta^\perp\to X_h$, подчиненное характеристическому отображению λ, существует. Заметим прежде всего, что H_I является выпуклым множеством для любого $I\subset[m]$. Поэтому для любых двух отображений $f,f'\colon\Delta^\perp\to X_h$, подчиненных одному и тому же характеристическому отображению λ, каждое отображение из линейной гомотопии между ними также будет подчинено данному характеристическому отображению:

$$f_t:=(1-t)f+tf',\qquad t\in[0,1].$$

Таким образом, пространство отображений $f\colon\Delta^\perp\to X_h$, согласованных с естественными покрытиями комплексов $\Delta^\perp$ и X_h, стягиваемо (в предположении, что оно непусто).

Осталось показать существование таких подчиненных отображений. Мы используем следующую конструкцию. Зафиксируем некоторое скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Это даст множество выделенных точек $x_I\in H_I$ — оснований ортогональных проекций начала координат в $\mathbb{R}^n$ на аффинные подпространства H_I. С другой стороны, точки полиэдрального комплекса $\Delta^\perp$, двойственного симплициальному комплексу Δ, которые представляют собой вершины барицентрического подразбиения Δ', по определению находятся во взаимно однозначном соответствии с симплексами из Δ, а потому занумерованы подмножествами $I \subset [m]$.

Мы строим отображение $f_h\colon \Delta^\perp \to X_h$, подчиненное характеристическому отображению λ, следующим образом. Сначала мы зададим образы указанных точек v_I комплекса $\Delta^\perp$ по формулам

$$f_h(v_I) = x_I,$$

а затем продолжим данное отображение по линейности. Заметим, что построенное отображение f_h будет корректно определено, поскольку (Δ, Λ) является характеристической парой (в самом деле, H_I непусто, если I задает симплекс в Δ) и согласовано с покрытием комплекса $\Delta^\perp$ звездами $\mathrm{St}(v_i)$ в Δ' вершин $v_i \in \Delta$ по построению. $\square$

Семейство отображений $f_h\colon \Delta^\perp \to X_h$ обладает еще одним замечательным свойством.

Следствие 5.4. *В обозначениях, введенных выше, имеем* $f_{h+h'} = f_h + f_{h'}$.

Доказательство. Утверждение вытекает из того факта, что выделенные точки x_I, использованные в предыдущей конструкции, зависят от $h \in \mathbb{R}^n$ линейно:

$$x_{I,h+h'} = x_{I,h} + x_{I,h'}. \quad \square$$

Каждой конфигурации аффинных гиперплоскостей $\mathcal{AP}(h)$ поставим в соответствие цепь $\Delta(h) = \sum_i W(U_i, f)U_i$, где U_i — связные компоненты дополнения $\mathbb{R}^n \setminus X_h$, а $f\colon \Delta^\perp \to X_h$ — отображение, подчиненное характеристическому отображению Λ. Поскольку любые два таких отображения гомотопны, цепь $\Delta(h)$ корректно определена.

Определение 5.5. Будем называть цепь $\Delta(h)$ *обобщенным виртуальным многогранником*, соответствующим симплициальному комплексу Δ, характеристическому отображению Λ и вектору $h \in \mathbb{R}^m$. Обозначим через $\mathcal{P}_{\Delta,\Lambda} \simeq \mathbb{R}^m$ пространство всех обобщенных виртуальных многогранников, соответствующих симплициальному комплексу Δ и характеристическому отображению Λ.

Замечание 5.6. Классические виртуальные многогранники определяются как кусочно постоянные функции, заданные не только в дополнении к гиперплоскостям (выпуклые цепи), и потому несут в себе больше информации, чем цепь $\Delta(h)$. Другими словами, цепь $\Delta(h)$ является лишь полноразмерной частью виртуального многогранника. Однако в данной работе нас интересуют только объемы обобщенных виртуальных многогранников и интегралы по ним, так что для наших целей будет достаточно работать с цепями типа $\Delta(h)$. В дальнейшем мы изучим другие нормирования на пространстве обобщенных виртуальных многогранников.

Интегрирование по обобщенным виртуальным многогранникам. Пусть α есть $(n-1)$-форма на $\mathbb{R}^n$, заданная формулой

$$\alpha = P_1\,\widehat{dx_1} \wedge \ldots \wedge dx_n + \ldots + P_n\,dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_n}.$$

Здесь крышка над dx_i означает, что член dx_i пропущен. Следующее утверждение очевидно.

Теорема 5.7. *Если все коэффициенты P_i формы α суть однородные многочлены степени k (многочлены степени не выше k) на $\mathbb{R}^n$, то функция $\int_{\Delta^\perp} f^*\alpha$ представляется однородным многочленом степени $k+n-1$ (многочленом степени не выше $k+n-1$) на пространстве отображений $f\colon \Delta^\perp \to \bigcup_{\mathcal{AP}(h)} H_i$, подчиненных соответствующему характеристическому отображению.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1, поскольку в силу следствия 5.4 семейство отображений f_h можно выбрать так, что $f_{h_1} + f_{h_2} = f_{h_1+h_2}$. $\square$

Пусть U — ограниченная область в $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\mathcal{AP}(h)} H_i$, а $W(U, f)$ — число вращения отображения f, как и ранее. Следующее предложение немедленно вытекает из теоремы Стокса.

Предложение 5.8. *Пусть α — та же форма, что и выше, $d\alpha = Q\omega$, где Q — многочлен степени не выше k (однородный многочлен степени k) на $\mathbb{R}^n$, а $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ — стандартная форма объема на $\mathbb{R}^n$. Тогда имеет место равенство*

$$\sum W(U,f) \int\limits_U Q\omega = \int\limits_{\Delta^\perp} f^*\alpha$$

для отображения $f\colon \Delta^\perp \to \bigcup_{\mathcal{AP}(h)} H_i$, подчиненного соответствующему характеристическому отображению.

В частности, $\sum W(U,f)\int_U Q\omega$ — многочлен степени не выше $k+n-1$ (однородный многочлен степени $k+n-1$) на пространстве отображений $f\colon \Delta^\perp \to \bigcup_{\mathcal{AP}(h)} H_i$, подчиненных соответствующему характеристическому отображению.

Для заданных многочлена Q на $\mathbb{R}^n$ и обобщенного виртуального многогранника $f\colon \Delta^\perp \to \bigcup_{\mathcal{AP}(h)} H_i$ будем обозначать через $I_Q(f)$ интеграл

$$\sum W(U,f) \int\limits_U Q\omega.$$

В следующей лемме дается результат вычисления смешанных производных от I_Q.

Лемма 5.9. *Пусть $f\colon \Delta^\perp \to \bigcup_{\mathcal{AP}(h)} H_i$ — обобщенный виртуальный многогранник, соответствующий симплициальному комплексу Δ на s вершинах. Пусть $I = \{i_1,\ldots,i_r\} \subseteq \{1,\ldots,s\}$ — такое подмножество, что вершины $v_{i_1},\ldots,v_{i_r}$ не порождают симплекс в Δ, а $k_1,\ldots,k_r$ — положительные целые числа. Тогда имеем*

$$\partial_{i_1}^{k_1}\ldots\partial_{i_r}^{k_r}(I_Q)(f) = 0.$$

Однако если $r = n$ и вершины $v_{i_1},\ldots,v_{i_n}$ порождают симплекс в Δ, двойственный к вершине $A \in \Delta^\perp$, то мы получим

$$\partial_I(I_Q)(f) = \operatorname{sgn}(I)Q(A)|\det(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})|.$$

Доказательство. В силу линейности операции дифференцирования достаточно вычислить смешанные производные для каждого слагаемого $W(U,f)\int_U Q\omega$ в отдельности.

В первом случае, когда вершины $v_{i_1},\ldots,v_{i_r}$ не порождают симплекс в Δ, пересечение соответствующих гиперплоскостей $H_{i_1},\ldots,H_{i_r}$ не будет вершиной множества U ни для какой ограниченной области U из $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\mathcal{AP}(h)} H_i$ с $W(U,f) \neq 0$. Поэтому $\partial_{i_1}^{k_1}\ldots\partial_{i_r}^{k_r}(I_Q)(f) = 0$ в силу [11, Lemma 6.1].

С другой стороны, если вершины $v_{i_1},\ldots,v_{i_n}$ порождают симплекс из Δ, то существует ровно одна область U_i в $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\mathcal{AP}(h)} H_i$, имеющая пересечение $A = H_{i_1}\cap\ldots\cap H_{i_n}$ в качестве своей вершины. Тогда согласно [11, Lemma 6.1] будем иметь

$$\partial_I(I_Q)(f) = \partial_I \int\limits_{U_i} Q\omega = \operatorname{sgn}(I)Q(A)|\det(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})|. \qquad \square$$

В качестве непосредственного следствия леммы 5.9 мы получаем такое утверждение.

Следствие 5.10. *Пусть $f\colon \Delta^\perp \to \bigcup_{\mathcal{AP}(h)} H_i$ — обобщенный виртуальный многогранник, соответствующий симплициальному комплексу Δ на s вершинах. Предположим, что $I = \{i_1,\ldots,i_r\} \subseteq \{1,\ldots,s\}$ — такое подмножество, что вершины $v_{i_1},\ldots,v_{i_r}$ не порождают симплекс в Δ, а $k_1,\ldots,k_r$ — положительные целые числа. Тогда имеем*

$$\partial_{i_1}^{k_1}\ldots\partial_{i_r}^{k_r}\operatorname{Vol}(f) = 0.$$

Однако если $r = n$ и вершины $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ порождают симплекс в Δ, двойственный к вершине $A \in \Delta^\perp$, то мы получаем

$$\partial_I \operatorname{Vol}(f)(f) = \operatorname{sgn}(I) |\det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})|.$$

6. КОГОМОЛОГИИ ОБОБЩЕННЫХ КВАЗИТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

В этом заключительном разделе работы мы опишем кольца когомологий некоторого класса тор-многообразий, называемых нами обобщенными квазиторическими многообразиями. Часть результатов этого раздела была опубликована в работах [10, 1]. Пусть $T \simeq (S^1)^n$ — компактный тор с решеткой характеров M и $N = M^\vee$. Пусть K — абстрактный симплициальный комплекс размерности $n-1$ на множестве вершин $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$. Напомним, что его *момент–угол-комплексом* $\mathcal{Z}_K$ называется $(m+n)$-мерное клеточное подпространство в единичном полидиске $(D^2)^m \subset \mathbb{C}^m$, задаваемое формулой $\bigcup_{I \in K} \prod_{i=1}^m Y_i$, где $Y_i = D^2$ при $i \in I$ и $Y_i = S^1$ в противном случае.

Имеется естественное (покоординатное) действие компактного тора $(S^1)^m$ на $\mathcal{Z}_K$, для которого пространство орбит $\mathcal{Z}_K/(S^1)^m$ гомеоморфно конусу над барицентрическим подразбиением симплициального комплекса K.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $K = K_\Sigma$ — *звездная сфера*, т.е. пересечение полного симплициального веера Σ в $\mathbb{R}^n \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ с единичной сферой $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. В этом случае момент–угол-комплекс $\mathcal{Z}_K$ обладает гладкой структурой (см. [23]).

Пусть, далее, $\Lambda\colon \Sigma(1) \to N$ — *характеристическое отображение*, т.е. такое отображение, что набор векторов

$$\Lambda(\rho_1), \dots, \Lambda(\rho_k)$$

можно дополнить до базиса решетки однопараметрических подгрупп N, если $\rho_1, \dots, \rho_k$ порождают конус из Σ. Тогда $(m-n)$-мерный подтор $H_\Lambda := \ker \exp \Lambda \subset (S^1)^m$ действует свободно на $\mathcal{Z}_K$ и гладкое многообразие $X_{\Sigma,\Lambda} := \mathcal{Z}_K/H_\Lambda$ мы будем называть *обобщенным квазиторическим многообразием*.

Наше описание колец когомологий многообразия $X_{\Sigma,\Lambda}$ будет дано в три шага.

1. Сначала мы строим клеточное разбиение для $X_{\Sigma,\Lambda}$ специального вида и показываем, что $H^*(X_{\Sigma,\Lambda})$ порождено классами, двойственными к классам характеристических подмногообразий коразмерности 2 в $X_{\Sigma,\Lambda}$.
2. Затем мы выводим два типа соотношений в кольце пересечений для $X_{\Sigma,\Lambda}$ между классами характеристических подмногообразий коразмерности 2 в $X_{\Sigma,\Lambda}$.
3. Наконец, мы доказываем топологическую версию теоремы Бернштейна–Кушниренко для $X_{\Sigma,\Lambda}$, а затем используем ее для получения описания по Пухликову–Хованскому кольца целочисленных когомологий $H^*(X_{\Sigma,\Lambda})$.

Замечание 6.1. Заметим, что шаги 2 и 3 можно успешно проделать в гораздо более общем классе тор-многообразий. Однако в этой большей общности алгебра, получаемая в описании по Пухликову–Хованскому, может отличаться от кольца когомологий. Действительно, алгебра, вычисляемая по многочлену самопересечений, есть двойственный по Пуанкаре фактор подалгебры в кольце когомологий, порожденной классами, двойственными классам характеристических подмногообразий коразмерности 2 (подробности см. в [1]).

В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что наши обобщенные квазиторические многообразия являются *омниориентированными*; как и в случае обычных квазиторических многообразий, мы говорим, что $X_{\Sigma,\Lambda}$ омниориентировано, если заданы ориентация самого многообразия $X_{\Sigma,\Lambda}$, а также ориентации для каждого из m характеристических подмногообразий D_i

коразмерности 2. Выбор этой дополнительной информации удобен по двум причинам. Во-первых, он позволяет нам рассматривать окружность, оставляющую неподвижным D_i, как элемент в решетке $N = \mathrm{Hom}(S^1, T^n) \simeq \mathbb{Z}^n$. Во-вторых, что еще более важно, выбор омниориентации определяет фундаментальный класс $[X_{\Sigma,\Lambda}]$ многообразия $X_{\Sigma,\Lambda}$, а также классы когомологий $[D_i]$, двойственные к характеристическим подмногообразиям.

Мы также будем предполагать далее, что $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ и $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ снабжены ориентацией. Это задаст знак каждого набора лучей $\rho_{i_1}, \dots, \rho_{i_n}$, порождающего максимальный конус веера Σ, следующим образом. Пусть $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ — множество индексов, упорядоченное так, что набор лучей $\rho_{i_1}, \dots, \rho_{i_n}$ ориентирован положительно в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathrm{sgn}(I) = \det(\Lambda(\rho_{i_1}), \dots, \Lambda(\rho_{i_n})) = \pm 1.$$

Наконец, как и ранее, с характеристической парой (Σ, Λ) мы связываем пространство обобщенных виртуальных многогранников $\mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda} \simeq \mathbb{R}^m$. Каждому обобщенному виртуальному многограннику $\Delta(h) \in \mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda}$ мы ставим в соответствие элемент в группе $H^2(X_{\Sigma,\Lambda})$ следующим образом:

$$\Delta(h) \mapsto h_1[D_1] + \ldots + h_m[D_m] \in H^2(X_{\Sigma,\Lambda}),$$

где $D_1, \dots, D_m$ — характеристические подмногообразия коразмерности 2, снабженные ориентациями, соответствующими омниориентации многообразия $X_{\Sigma,\Lambda}$.

6.1. Клеточные разбиения обобщенных квазиторических многообразий. Чтобы описать клеточное разбиение для обобщенного квазиторического многообразия $X_{\Sigma,\Lambda}$, мы сначала дадим немного отличающееся от приведенного выше описание момент–угол-комплекса $\mathcal{Z}_K$ для звездной сферы $K = K_\Sigma$. Заметим, что момент–угол-комплекс задается как несвязное объединение стратов $\mathcal{Z}_K = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} H_\sigma$, где

$$H_\sigma = \mathcal{Z}_K \cap \Biggl(\bigcap_{\rho_i \in \sigma} \{z_i = 0\}\Biggr) \cap \Biggl(\bigcap_{\rho_j \notin \sigma} \{z_j \neq 0\}\Biggr) \subset \mathbb{C}^m.$$

Наша конструкция клеточного разбиения для $X_{\Sigma,\Lambda}$ является небольшим обобщением аргумента из теории Морса, введенного в работе [14] для неособых проективных торических многообразий и примененного затем в работе [7] для квазиторических многообразий. Поскольку мы не предполагаем, что веер Σ является нормальным веером некоторого многогранника, мы не можем использовать общую линейную функцию, как в [14]. Вместо этого выберем вектор $v \in \mathbb{R}^n$ в общем положении относительно веера Σ, т.е. вектор v, лежащий во внутренности некоторого полноразмерного конуса из Σ.

Пусть $\tau_1, \dots, \tau_s$ — конусы размерности n в веере Σ. Для максимального конуса τ будем говорить, что грань σ конуса τ является *входящей* относительно вектора v, если пересечение $\tau \cap (\sigma + v)$ неограничено. Далее определим *индекс* $\mathrm{ind}(\tau)$ максимального конуса τ как число входящих лучей конуса τ.

Каждому максимальному конусу τ поставим в соответствие несвязную сумму открытых клеток из $\mathcal{Z}_K$ по формуле

$$\widetilde{U}_\tau = \bigsqcup_{\sigma} H_\sigma,$$

где объединение берется по всем входящим граням σ конуса τ. Поскольку каждый конус σ является входящим для единственного конуса максимальной размерности τ, мы получаем клеточное разбиение

$$\mathcal{Z}_K = \bigsqcup_{i=1}^{s} \widetilde{U}_{\tau_i}.$$

Легко видеть, что клетки $\widetilde{U}_\tau$ инвариантны относительно действия тора $H \simeq (S^1)^{m-n}$ и

$$\widetilde{U}_\tau \simeq (D^2)^{\mathrm{ind}(\tau)} \times (S^1)^{m-n}.$$

Более того, действие тора H свободно и транзитивно на втором сомножителе произведения $(D^2)^{\mathrm{ind}(\tau)} \times (S^1)^{m-n}$, поэтому имеем

$$X_{\Sigma,\Lambda} = \bigsqcup_{i=1}^{s} \widetilde{U}_{\tau_i}/H,$$

где $\widetilde{U}_{\tau_i}/H \simeq (D^2)^{\mathrm{ind}(\tau_i)}$.

Теорема 6.2. *Пусть $X_{\Sigma,\Lambda}$ — обобщенное квазиторическое многообразие. Тогда $X_{\Sigma,\Lambda}$ обладает клеточным разбиением с клетками только в четных размерностях. Клетки в этом разбиении находятся во взаимно однозначном соответствии с максимальными конусами τ из Σ. Размерность клетки, соответствующей конусу τ, равна $2\,\mathrm{ind}(\tau)$.*

Следствие 6.3. *Эйлерова характеристика многообразия $X_{\Sigma,\Lambda}$ равна числу максимальных конусов из Σ.*

6.2. Соотношения между характеристическими подмногообразиями. В данном пункте мы выведем два типа соотношений между классами характеристических подмногообразий коразмерности 2 в кольце пересечений многообразия $X_{\Sigma,\Lambda}$. В следующем предложении мы покажем, что в $H^*(X_{\Sigma,\Lambda})$ имеют место соотношения типа Стенли–Райснера.

Предложение 6.4. *Для характеристических подмногообразий $D_{i_1},\dots,D_{i_n}$ коразмерности 2 в кольце когомологий обобщенного квазиторического многообразия $X_{\Sigma,\Lambda}$ имеет место соотношение*

$$[D_{i_1}]\dots[D_{i_n}] = \begin{cases} \mathrm{sgn}(I)[X_{\Sigma,\Lambda}]^*, & \text{если } \rho_{i_1},\dots,\rho_{i_n} \text{ порождают конус в } \Sigma,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Доказательство. В самом деле, в кольце когомологий обобщенного квазиторического многообразия $X_{\Sigma,\Lambda}$ имеем $[D_{i_1}]\dots[D_{i_n}] = (-1)^v[X_{\Sigma,\Lambda}]^*$, где через $(-1)^v$ мы обозначаем знак неподвижной точки $v = D_{i_1}\cap\dots\cap D_{i_n} \in X_{\Sigma,\Lambda}$, который отвечает за сравнение двух ориентаций на касательном пространстве $\mathcal{T}_v X_{\Sigma,\Lambda}$: одна ориентация индуцирована коориентациями характеристических подмногообразий D_i', а другая ориентация индуцирована представлением тора $T^n := T^m/H$ в касательном пространстве $\mathcal{T}_v X_{\Sigma,\Lambda} \cong \mathbb{C}^n$.

С другой стороны, веса касательного представления компактного тора T^n в неподвижной точке v образуют базис решетки, двойственный к базису $(\Lambda(\rho_{i_1}),\dots,\Lambda(\rho_{i_n}))$. Таким образом, $(-1)^v = \det(\Lambda(\rho_{i_1}),\dots,\Lambda(\rho_{i_n})) = \mathrm{sgn}(I)$, что и требовалось доказать. □

Чтобы получить линейные соотношения в кольце когомологий, мы должны проанализировать конструкцию обобщенного квазиторического многообразия. Имеются естественные $(S^1)^m$-эквивариантные линейные расслоения $L_1,\dots,L_m$ на $\mathcal{Z}_K$. Для каждого целочисленного вектора $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_m) \in \mathbb{Z}^m$ тензорное произведение

$$L_{\mathbf{k}} = L_1^{k_1} \otimes \dots \otimes L_m^{k_m}$$

опускается до комплексного линейного расслоения $\widetilde{L}_{\mathbf{k}}$ на многообразии $X_{\Sigma,\Lambda}$. Кроме того, если вектор $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m$ таков, что соответствующий характер действует тривиально на $H_\Lambda \subset (S^1)^m$, полученное расслоение $\widetilde{L}_{\mathbf{k}}$ является топологически тривиальным.

Легко видеть, что имеется гладкое сечение расслоения $\widetilde{L}_{\mathbf{k}}$ с множеством вырождения, задаваемым формулой $\sum_{i=1}^m k_i[D_i]$. В силу точности последовательности

$$0 \to M \xrightarrow{\Lambda^*} \mathbb{Z}^m \to M_{H_\Lambda} \to 0$$

множество характеров $\mathbf{k}$, действующих тривиально на H_Λ, отождествляется с решеткой характеров M тора T при $k_i = \chi(v_i)$ для $\chi \in M$ и $v_i = \Lambda(\rho_i)$. Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

Предложение 6.5. *Для любого характера $\chi \in M$ имеет место следующее линейное соотношение в группе $H^2(X_{\Sigma,\Lambda})$:*

$$\sum_{i=1}^{m} \chi(v_i)[D_i] = 0,$$

где $v_i := \Lambda(\rho_i)$ при $1 \le i \le m$.

Доказательство. В самом деле, комплексное линейное расслоение $\widetilde{L}_{\chi(v_1),\dots,\chi(v_m)}$ тривиально, а значит, его первый класс Чженя равен нулю:

$$c_1\big(\widetilde{L}_{\chi(v_1),\dots,\chi(v_m)}\big) = \sum_{i=1}^{m} \chi(v_i)[D_i] = 0. \qquad \square$$

6.3. Топологическая версия теоремы Бернштейна–Кушниренко. Начнем с важного замечания: для получения описания кольца когомологий обобщенного квазиторического многообразия достаточно вычислить *многочлен самопересечений*

$$h_1[D_1] + \ldots + h_m[D_m] \mapsto \big\langle (h_1[D_1] + \ldots + h_m[D_m])^m, [X_{\Sigma,\Lambda}]\big\rangle$$

на пространстве всех линейных комбинаций классов характеристических подмногообразий коразмерности 2. Это делается в следующей теореме. Теорема 6.6 тесно связана с [10, Lemma 8.6].

Теорема 6.6. *Пусть $X_{\Sigma,\Lambda}$ — обобщенное квазиторическое многообразие с характеристическими подмногообразиями $D_1, \dots, D_m$ коразмерности 2. Тогда имеет место соотношение*

$$\big\langle (h_1[D_1] + \ldots + h_m[D_m])^m, [X_{\Sigma,\Lambda}]\big\rangle = n!\,\mathrm{Vol}(f_h),$$

где $f_h \in \mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda}$ — обобщенный виртуальный многогранник, отвечающий симплициальному комплексу K_Σ, характеристическому отображению Λ и набору параметров $h = (h_1, \dots, h_m)$.

Доказательство. Пространство всех линейных комбинаций $h_1[D_1] + \ldots + h_m[D_m]$ мы отождествим с пространством обобщенных виртуальных многогранников $\mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda}$. В силу этого отождествления как многочлен самопересечений, так и многочлен объема будут функциями, задаваемыми однородными многочленами степени n на $\mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda}$. Обозначим их через $S\colon \mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda} \to \mathbb{R}$ и $\mathrm{Vol}\colon \mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda} \to \mathbb{R}$ соответственно.

Для того чтобы доказать равенство $S(h) = n!\,\mathrm{Vol}(h)$, достаточно доказать равенство всех смешанных производных от S и Vol степени n:

$$\partial_{i_1}^{k_1} \ldots \partial_{i_s}^{k_s} S(h) = n!\,\partial_{i_1}^{k_1} \ldots \partial_{i_s}^{k_s} \mathrm{Vol}(h),$$

где $\partial_{i_j} = \partial/\partial h_{i_j}$ и $\sum_{j=1}^{s} k_{i_j} = n$.

Назовем число $\sum_{i=1}^{s}(k_i - 1)$ *кратностью монома* $\partial_{i_1}^{k_1} \ldots \partial_{i_s}^{k_s}$. В частности, моном имеет кратность 0 тогда и только тогда, когда он свободен от квадратов. Мы докажем совпадение смешанных производных индукцией по кратности дифференциального монома.

Для мономов, свободных от квадратов, равенство следует из первой части следствия 5.10 и предложения 6.4. Действительно, в силу следствия 5.10 в том случае, когда $r = n$ и $\rho_{i_1}, \dots, \rho_{i_n}$ порождают симплекс в Δ, двойственный к вершине $A \in \Delta^\perp$, мы имеем

$$\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_n} \mathrm{Vol}(h) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(i_1, \dots, i_n), & \text{если } \rho_{i_1}, \dots, \rho_{i_n} \text{ порождают конус в } \Sigma, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

С другой стороны, $\partial_{i_1}\dots\partial_{i_n}S(h)$ равно коэффициенту при $t_{i_1}\dots t_{i_n}$ в разложении многочлена $S(h+(t_1,\dots,t_m))$. Получаем

$$S(h+(t_1,\dots,t_n)) = \big\langle ((h_1+t_1)[D_1]+\dots+(h_m+t_m)[D_m])^m, [X_{\Sigma,\Lambda}]\big\rangle = \\ = t_{i_1}\dots t_{i_n}\cdot n!\cdot \big\langle [D_{i_1}]\dots[D_{i_n}], [X_{\Sigma,\Lambda}]\big\rangle + \dots .$$

Поэтому в силу предложения 6.4 будем иметь

$$\partial_{i_1}\dots\partial_{i_n}S(h) = \begin{cases} n!\operatorname{sgn}(i_1,\dots,i_n), & \text{если } \rho_{i_1},\dots,\rho_{i_n} \text{ порождают конус в } \Sigma,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Теперь предположим, что равенство смешанных производных выполнено для всех дифференциальных мономов кратности $r-1$. Пусть $\partial_{i_1}^{k_1}\dots\partial_{i_s}^{k_s}$ — дифференциальный моном кратности r с $k_1\ge 1$. Мы можем считать, что $\rho_{i_1},\dots,\rho_{i_s}$ порождают конус в Σ, поскольку в противном случае

$$\partial_{i_1}^{k_1}\dots\partial_{i_s}^{k_s}S(h) = n!\,\partial_{i_1}^{k_1}\dots\partial_{i_s}^{k_s}\operatorname{Vol}(h) = 0.$$

В этом случае существует характер $\chi\in M$ такой, что

$$\langle\chi,\Lambda(\rho_{i_1})\rangle = 1,\quad \langle\chi,\Lambda(\rho_{i_2})\rangle = 0,\quad \dots,\quad \langle\chi,\Lambda(\rho_{i_s})\rangle = 0.$$

Таким образом, поскольку объем инвариантен относительно сдвигов обобщенного виртуального многогранника, мы получим

$$\partial_{i_1}^{k_1}\dots\partial_{i_s}^{k_s}\operatorname{Vol}(h) = -\sum_{l\ne i_j}\langle\chi,\Lambda(\rho_l)\rangle\,\partial_l\partial_{i_1}^{k_1-1}\dots\partial_{i_s}^{k_s}\operatorname{Vol}(h)$$

и аналогично в силу предложения 6.5

$$\partial_{i_1}^{k_1}\dots\partial_{i_s}^{k_s}S(h) = -\sum_{l\ne i_j}\langle\chi,\Lambda(\rho_l)\rangle\,\partial_l\partial_{i_1}^{k_1-1}\dots\partial_{i_s}^{k_s}S(h).$$

Далее, дифференциальные мономы в правой части полученных выше выражений имеют кратности меньше r, а потому равенство

$$\partial_{i_1}^{k_1}\dots\partial_{i_s}^{k_s}S(h) = n!\,\partial_{i_1}^{k_1}\dots\partial_{i_s}^{k_s}\operatorname{Vol}(h)$$

вытекает из предположения индукции. $\square$

Мы закончим этот пункт новой интерпретацией теоремы 6.6. Сначала напомним классическую интерпретацию теоремы Бернштейна–Кушниренко для торических многообразий. Многогранник Ньютона $\Delta(f)\subset\mathbb{R}^n$ многочлена Лорана $f=\sum a_ix^{k_i}$ есть выпуклая оболочка векторов k_i при $a_i\ne 0$. Для данного многогранника Δ пусть E_Δ — конечномерное векторное пространство многочленов Лорана f таких, что $\Delta(f)\subset\Delta$. Теорема Бернштейна–Кушниренко дает число решений системы $f_1=\dots=f_n=0$ в $(\mathbb{C}^*)^n$ для общих многочленов Лорана с фиксированными многогранниками Ньютона $\Delta_1,\dots,\Delta_n$.

Теорема 6.7 (теорема Бернштейна–Кушниренко). *Пусть $\Delta_1,\dots,\Delta_n$ — фиксированные целочисленные многогранники, $f_1,\dots,f_n$ — общие многочлены Лорана такие, что $\Delta(f_i)\subset\Delta_i$. Тогда все решения системы $f_1=\dots=f_n=0$ в $(\mathbb{C}^*)^n$ невырождены и их число равно*

$$n!\operatorname{Vol}(\Delta_1,\dots,\Delta_n),$$

где Vol *— функция смешанного объема многогранников.*

Можно переформулировать теорему 6.6 похожим образом. Пусть $\Delta_1,\dots,\Delta_n$ — обобщенные виртуальные многогранники из $\mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda}$, соответствующие обобщенному квазиторическому многообразию $X_{\Sigma,\Lambda}$. Пусть, далее, L_{Δ_i} — линейное расслоение, ассоциированное с обобщенным виртуальным многогранником Δ_i, и $E_\Delta = \Gamma(X_{\Sigma,\Lambda}, L_{\Delta_i})$ — пространство гладких сечений для L_{Δ_i}. Тогда теорема 6.6 допускает следующую переформулировку.

Теорема 6.8. *Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ — фиксированные обобщенные виртуальные многогранники из $\mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda}$, а $s_1 \in E_{\Delta_1}, \dots, s_n \in E_{\Delta_n}$ — общие сечения расслоений $L_{\Delta_1}, \dots, L_{\Delta_n}$. Тогда все решения системы $s_1 = \ldots = s_n = 0$ на $X_{\Sigma,\Lambda}$ являются невырожденными, а число решений, взятых с учетом знака, равно*

$$n!\,\mathrm{Vol}(\Delta_1, \dots, \Delta_n),$$

где Vol *— функция смешанного объема обобщенных виртуальных многогранников.*

Замечание 6.9. В алгебраическом случае кратность каждого невырожденного корня равна 1, однако в случае гладких сечений $s_i \in \Gamma(X_{\Sigma,\Lambda}, L_{\Delta_i})$ кратность невырожденного корня может равняться -1. Тем не менее число решений, взятых с учетом знака, по-прежнему может быть найдено при помощи смешанного объема.

6.4. Описание по Пухликову–Хованскому. В этом пункте мы применяем подход, предложенный Пухликовым и третьим автором для вычисления колец когомологий. Важнейшей составной частью такого описания является вычисление обратных систем по Маколею для градуированных алгебр с двойственностью Пуанкаре, порожденных элементами степени 1.

Мы будем называть градуированную коммутативную алгебру $A = \bigoplus_{i=0}^n A_i$ над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики *алгеброй с двойственностью Пуанкаре*, если выполнены следующие условия:

- $A_0 \simeq A_n \simeq \mathbb{K}$;
- билинейное отображение $A_i \times A_{n-i} \to A_n$ невырождено при всех $i = 0, \dots, n$ (двойственность Пуанкаре).

Основной пример алгебры с двойственностью Пуанкаре получается следующим образом. Пусть X — гладкое замкнутое ориентируемое многообразие размерности $2n$. Тогда алгебра когомологических классов четной размерности $A = \bigoplus_{i=0}^n H^{2i}(X)$ есть алгебра с двойственностью Пуанкаре. В частности, поскольку для обобщенных квазиторических многообразий $H^{2i+1}(X_{\Sigma,\Lambda}) = 0$ для любого $i \geq 0$, их кольца когомологий $H^*(X_{\Sigma,\Lambda})$ также являются алгебрами с двойственностью Пуанкаре. Следующая теорема описывает алгебры с двойственностью Пуанкаре.

Теорема 6.10. *Пусть A — алгебра с двойственностью Пуанкаре, порожденная (как алгебра) элементами из $A_1 = \mathbb{K}\langle v_1, \dots, v_r\rangle$ степени 1. Тогда*

$$A \simeq \mathbb{K}[t_1, \dots, t_r] \Big/ \left\{ p(t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{K}[t_1, \dots, t_r] \colon\ p\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r}\right) f(x_1, \dots, x_r) = 0 \right\},$$

где мы отождествили A_1 с $\mathbb{K}^r$ при помощи выбора базиса $v_1, \dots, v_r$ и $f\colon A_1 \simeq \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}$ — многочлен, задаваемый формулой

$$f(x_1, \dots, x_r) = (x_1 v_1 + \ldots + x_r v_r)^n \in A_n \simeq \mathbb{K}.$$

Теорема 6.10 была использована в работе [25] для получения описания кольца когомологий гладкого проективного торического многообразия. Позднее она была применена в [13] при описании кольца когомологий полного многообразия флагов G/B. Более общая версия теоремы 6.10 была недавно получена в работе [16] и использована в [11, 15] для получения описаний колец когомологий торических и квазиторических расслоений.

Теорема 6.10 допускает бескоординатную формулировку. В самом деле, кольцо $\mathbb{K}[t_1,\ldots,t_r]$ из теоремы 6.10 можно отождествить с кольцом дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами $\mathrm{Diff}(A_1)$ на A_1. Поэтому описание алгебры A принимает вид

$$A \simeq \mathrm{Diff}(A_1)/\mathrm{Ann}(f),$$

где $\mathrm{Ann}(f)=\{D\in\mathrm{Diff}(A_1)\colon D\cdot f=0\}$ — аннулирующий идеал для f.

Теорема 6.11. *Пусть $X_{\Sigma,\Lambda}$ — обобщенное квазиторическое многообразие и $\mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda}$ — соответствующее ему пространство обобщенных виртуальных многогранников. Тогда кольцо когомологий $H^*(X_{\Sigma,\Lambda})$ можно описать как*

$$H^*(X_{\Sigma,\Lambda})=\mathrm{Diff}(\mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda})/\mathrm{Ann}(\mathrm{Vol}),$$

где $\mathrm{Diff}(\mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda})$ — кольцо дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на $\mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda}$, а $\mathrm{Ann}(\mathrm{Vol})$ — аннулирующий идеал для многочлена объема.

Доказательство. В силу теоремы 6.2 кольцо когомологий $H^*(X_{\Sigma,\Lambda})$ порождено классами характеристических подмногообразий коразмерности 2 в $X_{\Sigma,\Lambda}$. Поэтому существует сюръективное отображение $\mathrm{Diff}(\mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda})\to H^*(X_{\Sigma,\Lambda})$ с ядром, задаваемым как аннулирующий идеал для многочлена самопересечений $S(h)$ классов характеристических подмногообразий коразмерности 2, в силу теоремы 6.10. Но по теореме 6.6 мы имеем $S(h)=n!\,\mathrm{Vol}(h)$, а потому

$$H^*(X_{\Sigma,\Lambda})=\mathrm{Diff}(\mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda})/\mathrm{Ann}(S)=\mathrm{Diff}(\mathcal{P}_{\Sigma,\Lambda})/\mathrm{Ann}(\mathrm{Vol}). \qquad \square$$

Благодарности. Авторы благодарны А.А. Айзенбергу, В.М. Бухштаберу, М. Дэвису, Т.Е. Панову, М. Хараде и Й. Хофшайеру за плодотворные обсуждения и интерес к этой работе. Кроме того, первый автор является лауреатом конкурса “Молодая математика России” и выражает признательность жюри конкурса и его спонсорам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ayzenberg A., Masuda M.* Volume polynomials and duality algebras of multi-fans // Arnold Math. J. 2016. V. 2, N 3. P. 329–381.
2. *Baralić Đ., Grbić J., Limonchenko I., Vučić A.* Toric objects associated with the dodecahedron // Filomat. 2020. V. 34, N 7. P. 2329–2356.
3. *Бухштабер В.М., Ероховец Н.Ю., Масуда М., Панов Т.Е., Пак С.* Когомологическая жесткость многообразий, задаваемых трехмерными многогранникам // УМН. 2017. Т. 72, №2. С. 3–66.
4. *Бухштабер В.М., Панов Т.Е.* О многообразиях, задаваемых 4-раскрасками простых 3-многогранников // УМН. 2016. Т. 71, №6. С. 157–158.
5. *Buchstaber V.M., Panov T.E., Ray N.* Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds // Moscow Math. J. 2007. V. 7, N 2. P. 219–242.
6. *Choi S., Masuda M., Suh D.Y.* Quasitoric manifolds over a product of simplices // Osaka J. Math. 2010. V. 47, N 1. P. 109–129.
7. *Davis M.W., Januszkiewicz T.* Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions // Duke Math. J. 1991. V. 62, N 2. P. 417–451.
8. *Hasui S., Kishimoto D.* p-Local stable cohomological rigidity of quasitoric manifolds // Osaka J. Math. 2017. V. 54, N 2. P. 343–350.
9. *Hasui S., Kishimoto D., Sato T.* p-Local stable splitting of quasitoric manifolds // Osaka J. Math. 2016. V. 53, N 3. P. 843–854.
10. *Hattori A., Masuda M.* Theory of multi-fans // Osaka J. Math. 2003. V. 40, N 1. P. 1–68.
11. *Hofscheier J., Khovanskii A., Monin L.* Cohomology rings of toric bundles and the ring of conditions: E-print, 2020. arXiv: 2006.12043 [math.AG].
12. *Ishida H., Fukukawa Y., Masuda M.* Topological toric manifolds // Moscow Math. J. 2013. V. 13, N 1. P. 57–98.
13. *Kaveh K.* Note on cohomology rings of spherical varieties and volume polynomial // J. Lie Theory. 2011. V. 21, N 2. P. 263–283.

14. *Хованский А.Г.* Гиперплоские сечения многогранников, торические многообразия и дискретные группы в пространстве Лобачевского // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20, №1. С. 50–61.
15. *Khovanskii A., Limonchenko I., Monin L.* Cohomology rings of quasitoric bundles: E-print, 2021. arXiv: 2112.14970 [math.AT].
16. *Khovanskii A., Monin L.* Gorenstein algebras and toric bundles: E-print, 2021. arXiv: 2106.15562 [math.AC].
17. *Лимонченко И.Ю., Лю Жи, Панов Т.Е.* Гиперповерхности Калаби–Яу и SU-бордизмы // Тр. МИАН. 2018. Т. 302. С. 287–295.
18. *Lü Z., Panov T.* On toric generators in the unitary and special unitary bordism rings // Algebr. Geom. Topol. 2016. V. 16, N 5. P. 2865–2893.
19. *Lü Z., Wang W.* Examples of quasitoric manifolds as special unitary manifolds // Math. Res. Lett. 2016. V. 23, N 5. P. 1453–1468.
20. *Masuda M.* Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index // Tohoku Math. J. Ser. 2. 1999. V. 51, N 2. P. 237–265.
21. *Masuda M., Panov T.* On the cohomology of torus manifolds // Osaka J. Math. 2006. V. 43, N 3. P. 711–746.
22. *McMullen P.* On simple polytopes // Invent. math. 1993. V. 113, N 2. P. 419–444.
23. *Panov T., Ustinovsky Yu.* Complex-analytic structures on moment–angle manifolds // Moscow Math. J. 2012. V. 12, N 1. P. 149–172.
24. *Пухликов А.В., Хованский А.Г.* Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, №2. С. 161–185.
25. *Пухликов А.В., Хованский А.Г.* Теорема Римана–Роха для интегралов и сумм квазиполиномов по виртуальным многогранникам // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, №4. С. 188–216.
26. *Тиморин В.А.* Аналог соотношений Ходжа–Римана для простых выпуклых многогранников // УМН. 1999. Т. 54, №2. С. 113–162.