Функциональный анализ и его приложения
2011, т. 45, вып. 4, с. 82–94

УДК 512.761+515.171.3

Теория пересечений и функция Гильберта*

© 2011. А. Г. Хованский

Памяти Владимира Игоревича Арнольда

Бирационально-инвариантная теория пересечений является далеким обобщением и развитием теоремы Бернштейна–Кушниренко. В статье приводятся прозрачные доказательства теоремы Гильберта о степени проективного многообразия и ряда близких утверждений, играющих важную роль в этой теории. Статью можно читать независимо — в ней напоминаются все необходимые определения и результаты.

Введение. Теорема Гильберта (см. разд. 7) связывает степень проективного многообразия с асимптотикой его функции Гильберта. В статье даются элементарные доказательства этой теоремы над полем комплексных чисел и ряда близких утверждений, некоторые из которых (теорема 10) не очевидны с точки зрения алгебраической геометрии.

Зачем снова доказывать классическую теорему, входящую в учебники по алгебраической геометрии? Эта фундаментальная теорема играет ключевую роль для недавно появившейся и находящейся в процессе построения бирационально-инвариантной теории пересечений, как для ее комплексно-аналитической версии, так и версии, справедливой над любым алгебраически замкнутым полем. Для алгебраической версии нужна теорема Гильберта в ее стандартной форме. Для аналитической версии естественно иметь аналитическое доказательство. Оно дает новое видение предмета и подсказывает новые алгебраические результаты.

0.1. Бирационально-инвариантная теория пересечений. В 1975 г. была найдена знаменитая теорема Бернштейна–Кушниренко о числе решений в $(\mathbb{C}^*)^n$ общей системы из n уравнений с заданными многогранниками Ньютона (доказательство, основанное на теореме Гильберта, можно найти в [1], [2]). Ее появлению способствовал богатый эмпирический материал, накопленный Владимиром Игоревичем Арнольдом при исследовании критических точек функций. Она послужила началом теории многогранников Ньютона, которая в рамках геометрии торических многообразий связала выпуклую геометрию с алгебраической геометрией и с теорией особенностей ([3], [4]). Эта теория интенсивно разрабатывалась (в частности, на семинаре Арнольда), ей посвящены сотни публикаций.

Теорема Бернштейна–Кушниренко не укладывается в рамки обычной теории пересечений: в ней идет речь о числе решений системы уравнений на неполном многообразии $(\mathbb{C}^*)^n$, левые части уравнений которой — достаточно общие функции из специальных конечномерных пространств. Ответ выражается в терминах многогранников Ньютона, само определение которых использует специфику этих пространств и многообразия $(\mathbb{C}^*)^n$.

*Работа выполнена при частичной поддержке Канадского гранта no. 0GP0156833.

В бирационально-инвариантной теории пересечений вместо $(\mathbb{C}^*)^n$ берется любое (не обязательно полное) неприводимое n-мерное алгебраическое многообразие X и рассматриваются системы, левые части уравнений которых — общие функции из произвольных конечномерных пространств рациональных функций на X. Эти конечномерные пространства образуют полугруппу (по умножению) $\mathcal{K}(X)$. Индекс пересечения n элементов из $\mathcal{K}(X)$ — это (правильно интерпретированное) число решений системы, левые части уравнений которой — общие функции из этих n пространств. Индекс пересечения автоматически переносится на группу Гротендика полугруппы $\mathcal{K}(X)$. Каждому пространству $L \in \mathcal{K}(X)$ сопоставляется его *тело Ньютона–Окунькова* $\Delta(L) \subset \mathbb{R}^n$ таким образом, что $\Delta(L_1) + \Delta(L_2) \subset \Delta(L_1 L_2)$ и что индекс самопересечения пространства L равен (как в теореме Кушниренко) умноженному на $n!$ объему тела $\Delta(L)$ (конструкция тела $\Delta(L)$ неоднозначна и содержит функциональные параметры, которые можно выбирать произвольно). Развиваемая теория связывает алгебру и геометрию вне рамок торической геометрии (см. [5], а также [6]).

Эта связь полезна в различных направлениях. Для алгебраической геометрии она доставляет элементарные доказательства аналогов геометрических неравенств Александрова–Фенхеля в теории пересечений ([5], [8]) и далекое обобщение теоремы об аппроксимации Фуджиты ([6], [8]). Для теории инвариантов она доставляет аналоги теоремы Бернштейна–Кушниренко для оросферических многообразий [9] и некоторых других многообразий, снабженных действием редуктивной группы ([10], [11]), и позволяет вычислить группу Гротендика полугруппы представлений редуктивной группы [10] (рассматриваемых с точностью до спектральной эквивалентности). В абстрактной алгебре она позволяет выделить широкий класс градуированных алгебр, функции Гильберта которых не совпадают при больших значениях аргумента с полиномом, но имеют полиномиальную асимптотику, а константы, характеризующие асимптотику, удовлетворяют аналогу геометрического неравенства Брунна–Минковского [8]. Для геометрии найденная связь доставляет прозрачное доказательство неравенства Александрова–Фенхеля и его многочисленных следствий ([5], [8]). Связь основана на геометрической теории полугрупп целых точек [8].

Опубликована часть комплексно-аналитической версии теории, содержащая ее глобальный вариант и вариант, связанный с действием редуктивных групп (см. список литературы). Мы с К. Каве записываем локальный вариант, доставляющий новые неравенства (аналогичные неравенству Александрова–Фенхеля) для кратностей примарных идеалов в локальном кольце. Соображения из настоящей статьи применяются для топологического доказательства формулы Самюэля для кратности корня системы уравнений в особой точке многообразия.

Мы записываем также версию теории, справедливую над любым алгебраически замкнутым полем (здесь мы пользуемся теоремой Гильберта в стандартной форме). Мы получаем абстрактные аналоги всех результатов, включая аналог для абстрактных локальных колец наших новых неравенств для кратностей примарных идеалов.

0.2. Содержание статьи. Пусть X — неприводимое n-мерное комплексное алгебраическое многообразие и $\mathcal{K}(X)$ — полугруппа по умножению ненулевых конечномерных подпространств над $\mathbb{C}$ поля рациональных функций $\mathbb{C}(X)$ на X. *Функция Гильберта* H_L и *нормализованная функция Гильберта* $\overline{H}_L$ пространства $L \in \mathcal{K}(X)$ определяются равенствами $H_L(k) = \dim_{\mathbb{C}} L^k$ и $\overline{H}_L(k) =$

$\dim_{\mathbb{C}} \overline{L^k}$, где $\overline{L^k}$ — целое замыкание пространства L^k в поле $\mathbb{C}(X)$ (см. разд. 2 и 6). Асимптотики функций $H_L \leqslant \overline{H}_L$ связаны с индексом самопересечения d пространства L.

Ситуация наиболее проста, если пространство L разделяет общие точки в X. В этом случае существуют верхние и нижние оценки функций $H_L \leqslant \overline{H}_L$, имеющие одинаковые асимптотики при $k \to \infty$ и зависящие лишь от n и d (а не от X и L). Доказательства основаны на свойствах индексов пересечения на алгебраических многообразиях и на несложных рассуждениях, справедливых для любых аналитических многообразий.

Из оценок вытекает, что

$$n! \lim_{k\to\infty} \frac{H_L(k)}{n^k} = d \quad \text{и} \quad n! \lim_{k\to\infty} \frac{\overline{H}_L(k)}{n^k} = d.$$

Первое из этих равенств эквивалентно теореме Гильберта для неприводимого проективного многообразия над полем $\mathbb{C}$ и дает самое простое из известных мне доказательств этой теоремы. Для приводимых проективных многообразий не существует двусторонних оценок функции Гильберта, зависящих лишь от n и d и имеющих правильные асимптотики.

Если пространство $L \in \mathcal{K}(X)$ не разделяет общие точки в X, то равенство $n! \lim_{k\to\infty} H_L(k)/n^k = d$ не выполняется. Если $d > 0$, то, во-первых, существует верхняя оценка функции $\overline{H}_L$, зависящая лишь от n и d и имеющая нужную асимптотику, и, во-вторых, справедливо равенство $d = n! \lim \overline{H}_L(k)/n^k$ (нижней оценки подобного вида для функции $\overline{H}_L$ не существует). В общем случае, без предположения $d > 0$, не существует и верхней оценки подобного вида для функции $\overline{H}_L$, но равенство $d = n! \lim \overline{H}_L(k)/n^k$ по-прежнему справедливо. Оно и доставляет связь асимптотики нормализованной функции Гильберта $\overline{H}_L$ и индекса самопересечения пространства L.

0.3. Расположение материала. Мы напоминаем нужные положения бирационально-инвариантной теории пересечений в разд. 1 и 2. В разд. 3 вводятся обозначения, используемые в разд. 4 и 5 при оценке размерностей некоторых пространств аналитических функций. В разд. 6 напоминаются свойства целого замыкания и дается простое доказательство того, что $\dim_{\mathbb{C}} \overline{L} < \infty$ при $L \in \mathcal{K}(X)$. В разд. 7 разбирается случай, когда L разделяет общие точки в X, в разд. 8 — случай, когда $d > 0$. В разд. 9 в общем случае доказывается связь асимптотики функции $\overline{H}_L$ и индекса самопересечения.

1. Индекс пересечения в полугруппе $\mathcal{K}(X)$. Пусть X — неприводимое n-мерное алгебраическое многообразие (в статье под алгебраическим многообразием мы подразумеваем квазипроективное алгебраическое многообразие) над полем $\mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{K}(X)$ — множество, состоящее из ненулевых конечномерных подпространств над $\mathbb{C}$ поля $\mathbb{C}(X)$ рациональных функций на X. Множество $\mathcal{K}(X)$ наделено структурой *коммутативной полугруппы* относительно следующей операции умножения: *произведением пространств* $L, M \in \mathcal{K}(X)$ называется пространство $LM \in \mathcal{K}(X)$, натянутое на все функции вида fg, где $f \in L$, $g \in M$.

Для всякого набора $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{K}(X)$ определен (см. [7]) *индекс пересечения* $[L_1, \dots, L_n]$: число $[L_1, \dots, L_n]$ равно числу решений в X системы уравнений

$f_1 = \dots = f_n = 0$, где $f_1 \in L_1, \dots, f_n \in L_n$ — общий набор функций из пространств $L_1, \dots, L_n$. При подсчете числа решений не учитываются решения, в которых обращаются в нуль все функции из некоторого пространства L_i, где $1 \leqslant i \leqslant n$, т. е. такие решения $a \in X$, что $f(a) = 0$, если $f \in L_i$. Не учитываются также решения, в которых хотя бы одна функция g из одного из пространств L_j имеет полюс. Напомним основные свойства индекса пересечения (см. [7]).

1) Индекс пересечения определен корректно. Скажем, что некоторым свойством обладает *общий элемент* линейного пространства M над $\mathbb{C}$, если существует комплексное полуалгебраическое множество $\Sigma \subset M$, такое, что этим свойством обладают элементы множества $M \setminus \Sigma$ и $\dim \Sigma < \dim M$. Пусть $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{K}(X)$ — любой набор пространств и $O \subset X$ — любое комплексное полуалгебраическое подмножество, такое, что

(a) O содержит все особые точки многообразия X,

(b) для $1 \leqslant i \leqslant n$ справедливо включение $O_i \subset O$, где O_i — множество точек, в которых обращаются в нуль все функции из пространства L_i,

(c) O содержит объединение дивизоров полюсов всех функций из пространств $L_1, \dots, L_n$,

(d) выполнено неравенство $\dim O < \dim X$.

Под корректностью определения индекса пересечения мы понимаем следующее утверждение: *для общего элемента* $(f_1, \dots, f_n) \in L_1 \times \dots \times L_n$ *все корни системы уравнений* $f_1 = \dots = f_n = 0$, *лежащие в множестве* $X \setminus O$, *невырожденны* (*т. е. дифференциалы* df_i *линейно независимы в каждом корне*) *и их число не зависит от выбора множества* O, *удовлетворяющего условиям* (*a*)–(*d*), *и равно* $[L_1, \dots, L_n]$.

2) Индекс пересечения симметричен, т. е. не меняется при перестановке пространств. Это свойство непосредственно вытекает из определения.

3) Индекс пересечения полилинеен. Линейность индекса по первому аргументу означает, что для любых пространств $L_1', L_1'', L_2, \dots, L_n \in \mathcal{K}(X)$ справедливо равенство $[L_1' L_1'', L_2, \dots, L_n] = [L_1', L_2, \dots, L_n] + [L_1'', L_2, \dots, L_n]$. Линейность по остальным аргументам определяется аналогично.

2. Группа Гротендика полугруппы $\mathcal{K}(X)$. Как и для всякой коммутативной полугруппы, для полугруппы $\mathcal{K}(X)$ определены ее *полугруппа Гротендика* и ее *группа Гротендика*.

Определение 1. Два элемента a, b коммутативной полугруппы S называются *эквивалентными*, $a \sim b$, если существует элемент $c \in S$, такой, что $ac = bc$. Множество классов эквивалентности с индуцированной операцией умножения образует коммутативную *полугруппу с сокращением* (т. е. полугруппу, в которой из равенства $AC = BC$ вытекает, что $A = B$), называемую *полугруппой Гротендика* полугруппы S. Полугруппу Гротендика полугруппы $\mathcal{K}(X)$ мы будем обозначать через $\mathcal{K}_G(X)$.

Определение 2. С коммутативной полугруппой S связано множество $G(S)$ пар (a, b) элементов a, b ее полугруппы Гротендика, в котором введено отождествление $(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$. Множество $G(S)$ с операцией умножения $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$ и операцией обращения $(a, b)^{-1} = (b, a)$ является группой, которая называется *группой Гротендика* полугруппы S. Группу Гротендика полугруппы $\mathcal{K}(X)$ будем обозначать через $G(X)$.

Всякий гомоморфизм $\tau\colon S \to G$ коммутативной полугруппы S в коммутативную группу G однозначно пропускается через естественное отображение

$\rho\colon S \to G(S)$ полугруппы S в ее группу Гротендика, т. е. существует единственный гомоморфизм $\tilde{\tau}\colon G(S) \to G$, такой, что $\tau = \tilde{\tau} \circ \rho$.

Утверждение 1. *Пусть* $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{K}(X)$ *и* $L'_1, \dots, L'_n \in \mathcal{K}(X)$, *причем* $L_1 \sim L'_1, \dots, L_n \sim L'_n$. *Тогда* $[L_1, \dots, L_n] = [L'_1, \dots, L'_n]$.

Доказательство. Покажем, что $[L_1, L_2, \dots, L_n] = [L'_1, L_2, \dots, L_n]$. Действительно, по линейности индекса пересечения отображение $\mathcal{K}(X) \mapsto \mathbb{Z}$, сопоставляющее элементу $L \in \mathcal{K}(X)$ число $[L, L_2, \dots, L_n] \in \mathbb{Z}$, является гомоморфизмом полугруппы $\mathcal{K}(X)$ в группу $\mathbb{Z}$. Этот гомоморфизм продолжается на группу Гротендика, откуда и вытекает нужное равенство. В силу симметрии индекса пересечения все остальные пространства тоже можно заменить на эквивалентные, не меняя индекса пересечения.

Обсудим очевидные свойства соотношения эквивалентности $L_1 \sim L_2$ в полугруппе $\mathcal{K}(X)$:

Утверждение 2. (i) *Если* $L_1 \sim L_2$, *то* $L_1 + L_2 \sim L_1 \sim L_2$.

(ii) *Если* $L_1 \sim L_2$ *и выполняются включения* $L_1 \subset L \subset L_2$, *то* $L_1 \sim L \sim L_2$.

Доказательство. (i) Если $L_1M = L_2M$, то $(L_1 + L_2)M = L_1M + L_2M = L_1M = L_2M$.

(ii) Если $L_1 \subset L \subset L_2$ и $L_1M = L_2M$, то $L_1M \subset LM \subset L_2M$. Поэтому $L_1M = LM = L_2M$.

Скажем, что функция $f \in \mathbb{C}(X)$ *тривиальна над* $L \in \mathcal{K}(X)$, если $L \sim L(f)$, где $L(f)$ — пространство, порожденное функциями из L и функцией f.

Утверждение 3. (i) *Если* $L \subset M$, $L \sim M$ *и* $f \in M$, *то* $L(f) \sim L$.

(ii) *Тривиальные над* $L \in \mathcal{K}(X)$ *функции образуют линейное пространство над* $\mathbb{C}$.

(iii) *Если* $L(f) \sim L$ *и* g *тривиальна над* $L(f)$, *то* $L(g) \sim L$.

(iv) *Если* f *тривиальна над* L^k *и* g *тривиальна над* L^m, *то* fg *тривиальна над* L^{k+m}.

Доказательство. (i) Имеем $L \subset L(f) \subset M$. Так как $L \sim M$, то $L(f) \sim L$.

(ii) Пусть $L(f) \sim L$ и $L(g) \sim L$. Тогда $L(f) + L(g) \sim L$. Для $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ имеем $L \subset L(\lambda f + \mu g) \subset L(f) + L(g)$. Поэтому $L(\lambda f + \mu g) \sim L$.

(iii) Положим $L' = L(f)$. Имеем $L' \sim L$ и $L'(g) \sim L'$, откуда $L'(g) \sim L$ и, следовательно, $L(g) \sim L$.

(iv) Если $L^k(f) \sim L^k$ и $L^m(g) \sim L^m$, то $L^k(f)L^m(g) \sim L^{k+m}$. Далее $L^{k+m} \subset L^k(f)L^m(g)$ и $fg \in L^k(f)L^m(g)$, поэтому $L^{k+m}(fg) \sim L^{k+m}$.

Тривиальность функции f над пространством L можно описать совершенно в других терминах (см. [7], [12]).

Определение 3. Функция $f \in \mathbb{C}(X)$ называется *целой функцией над* $L \in \mathcal{K}(X)$, если она удовлетворяет некоторому уравнению

$$f^d + a_1 f^{d-1} + \dots + a_d = 0, \tag{1}$$

коэффициенты a_i которого лежат в пространствах L^i.

Утверждение 4. $L(f) \sim L$, *если и только если* f — *целая функция над* L.

Доказательство. Если f удовлетворяет уравнению (1), то $L(f)(L(f))^d = L(L(f))^d$. Это доказывает, что целая функция над L тривиальна над L.

Пусть $L(f) \sim L$. Тогда есть $M \in \mathcal{K}(X)$, такое, что $LM = L(f)M$. Пусть $e_1, \ldots, e_d$ — базис пространства M над полем $\mathbb{C}$. Равенство $LM = L(f)M$ означает, что выполняются тождества $fe_i = \sum b_{i,j}e_j$, где $b_{i,j}$ — некоторые элементы пространства L. Поэтому f является корнем характеристического полинома $\det(B - fI) = 0$ $(d \times d)$-матрицы $B = \{b_{i,j}\}$. Это доказывает, что если $L(f) \sim L$, то f — целая функция над L.

Следствие 5. *Пусть $L(f) \sim L$ и все функции из $L \in \mathcal{K}(X)$ регулярны в области $U \subset X$. Тогда f регулярна в U.*

3. Обозначения. Ниже, в пп. 3.1 и 3.2, определяются специальные целочисленные функции, в терминах которых формулируются оценки из разд. 4 и 5. В п. 3.3 вводятся общие для этих пунктов обозначения.

3.1. Пусть $Q(n,l)$ — размерность пространства полиномов степени $\leqslant l$ от n переменных. Число $Q(n,l)$ равно числу целых точек в n-мерном симплексе Δ, заданном неравенствами $0 \leqslant u_1, \ldots, 0 \leqslant u_n$, $u_1 + \cdots + u_n \leqslant l$. Объем симплекса Δ равен $l^n/n!$. Поэтому при заданном n и $l \to \infty$ имеем $Q(n,l) \approx l^n/n!$. Легко видеть, что $Q(n,l) = C^n_{l+n}$.

Пространство однородных полиномов степени k от $n+1$ переменных изоморфно пространству полиномов степени $\leqslant k$ от n переменных. Поэтому $Q(n+1,k) - Q(n+1,k-1) = Q(n,k)$. Отсюда получаем равенство

$$Q(n+1,k) - Q(n+1,k-d) = Q(n,k) + Q(n,k-1) + \cdots + Q(n,k-d+1).$$

3.2. В разд. 5 нам понадобится следующее определение.

Определение 4. Пусть $N = kd + r$, где r, $0 \leqslant r < d$, — остаток от деления числа N на число d. Определим функцию F от (n,d,N) формулой

$$F(n,d,N) = rQ(n,k) + (d-r)Q(n,k-1).$$

При заданных n, d и $N \to \infty$ имеем $F(n,d,N) \approx dk^n/n!$, где $k = [N/d]$.

3.3. В разд. 4 и 5 мы будем использовать следующие обозначения:

X^* — n-мерное комплексно-аналитическое многообразие;

L — конечномерное пространство аналитических функций на X^*, содержащее константы; мы будем предполагать, что L содержит набор функций $x_1, \ldots, x_n$, такой, что в множестве решений системы уравнений $x_1 = \cdots = x_n = 0$ на X^* найдется подмножество $Y = \{y_1, \ldots, y_d\}$, состоящее из невырожденных решений (т. е. в точках множества Y дифференциалы dx_i функций x_i для $i = 1, \ldots, n$ линейно независимы);

$\mathbf{x}\colon X^* \to \mathbb{C}^n$ — отображение, заданное формулой $\mathbf{x}(q) = (x_1(q), \ldots, x_n(q))$;

$\mathbf{x}_i^{-1}\colon U \to V_i$ — локальное обращение отображения $\mathbf{x}$, такое, что $\mathbf{x}_i^{-1}(0) = y_i$, V_i — окрестность точки y_i и U — окрестность точки 0 (общая для всех i, $1 \leqslant i \leqslant d$).

4. Оценка размерности снизу. В следующей простой лемме 6 мы пользуемся обозначениями, введенными в разд. 3.

Лемма 6. 1. *Пусть функция $f \in L$ принимает в точках $y_1, \ldots, y_d$ различные значения. Тогда f не удовлетворяет никакому уравнению*

$$a_1(\mathbf{x})f^{d-1} + \cdots + a_d(\mathbf{x}) = 0,$$

в котором $a_1, \ldots, a_d$ — полиномы на $\mathbb{C}^n$ (не равные нулю одновременно).

2. *Пусть существует функция* $f \in L$, *принимающая в точках* $y_1, \ldots, y_d$ *различные значения. Тогда*

$$\dim_{\mathbb{C}} L^k \geqslant Q(n+1,k)-Q(n+1,k-d) = Q(n,k)+Q(n,k-1)+\cdots+Q(n,k-d+1).$$

Доказательство. 1. Пусть f_i — функция в области U, заданная формулой $f_i = f(\mathbf{x}_i^{-1})$. При разных i, j функции f_i, f_j в окрестности U не совпадают и удовлетворяют уравнению $a_1 y^{d-1} + \cdots + a_d = 0$. Но уравнение степени $d-1$ имеет не более $d-1$ корней. Противоречие доказывает п. 1.

2. Пространство L^k содержит функции $a_1(\mathbf{x}) f^{d-1} + \cdots + a_d(\mathbf{x})$, в которых a_i — полиномы от $x_1, \ldots, x_n$ степени, меньшей или равной $k-d+i$. По п. 1 эти функции линейно независимы. Лемма 6 доказана.

Скажем, что пространство $L \in \mathcal{K}(X)$ *разделяет общие точки* в алгебраическом многообразии X, если существует полуалгебраическое множество $O(L) \subset X$, такое, что: (i) $\dim O(L) < \dim X$; (ii) $O(L)$ содержит дивизор полюсов функций из L; (iii) для любых различных точек $a, b \in X \setminus O(L)$ существует функция $g \in L$, такая, что $g(a) \neq g(b)$.

Лемма 7. *Пусть* $L \in \mathcal{K}(X)$ *разделяет общие точки в* X *и* $Y \subset X$ — *конечное множество, не пересекающееся с* $O(L)$. *Тогда существует функция* $f \in L$, *принимающая разные значения в различных точках множества* Y.

Доказательство. Множество функций из L, принимающих равные значения в паре различных точек из Y, является собственным подпространством в L. Объединение конечного числа собственных подпространств не может совпадать с L.

Теорема 8. *Пусть* $L \in \mathcal{K}(X)$ *разделяет общие точки на неприводимом* n*-мерном алгебраическом многообразии* X *и* $[L, \ldots, L] = d > 0$. *Тогда*

$$\dim_{\mathbb{C}} L^k \geqslant Q(n+1,k)-Q(n+1,k-d) = Q(n,k)+Q(n,k-1)+\cdots+Q(n,k-d+1).$$

Доказательство. Положим $X^* = X \setminus (D \cup O)$, где D — дивизор полюсов функций из пространства L и O — объединение множества особых точек многообразия X с множеством точек, на которых обращаются в нуль все функции из пространства L. По лемме 7 найдется функция $f \in L$, принимающая в точках $y_1, \ldots, y_d$ различные значения. Для завершения доказательства осталось воспользоваться п. 2 леммы 6.

5. Оценка размерности сверху. В формулировке леммы 9 мы используем обозначения из разд. 3 и *предполагаем, что многообразие* X^* *связно.*

Лемма 9. *Пусть* M — *линейное пространство аналитических функций на* X^*, *содержащее константы и такое, что* $\dim_{\mathbb{C}} M > F(d, n, N)$. *Тогда есть функции* $l_1, \ldots, l_{n-1} \in L$ *и* $\varphi \in M$, *такие, что система уравнений* $l_1 = \cdots = l_{n-1} = \varphi = 0$ *имеет не меньше чем* N *невырожденных решений в* X^*.

Доказательство. Выделим r точек $y_1, \ldots, y_r$ из множества Y. Пусть $\Omega_{k,Y}$ — линейное пространство, точка которого — это набор k-струй гладких функций в точках $y_1, \ldots, y_r$ и набор $(k-1)$-струй гладких функций в точках $y_{r+1}, \ldots, y_d$. Ясно, что $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_{k,Y} = F(n, d, N) < \dim_{\mathbb{C}} M$. Поэтому существует ненулевая функция $g \in M$, которая переходит в нуль при отображении $\tau \colon M \to \Omega_{k,Y}$, сопоставляющем функции набор ее k-струй в точках $y_1, \ldots, y_r$ и набор ее $(k-1)$-струй в точках $y_{r+1}, \ldots, y_d$.

Если h — однородная линейная функция на $\mathbb{C}^n$, то функция $h(\mathbf{x})$ лежит в L. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений $h_1 = \dots = h_{n-1} = 0$ в $\mathbb{C}^n$. Ей соответствует система уравнений $l_1 = \dots = l_{n-1} = 0$ в X^*, где $l_i = h_i(\mathbf{x})$, которая определяет гладкие кривые $\Gamma_1, \dots, \Gamma_d$ в областях $V_1, \dots, V_d$, проходящие через точки $y_1, \dots, y_d$.

Если уравнения $h_1 = \dots = h_{n-1} = 0$ достаточно общие, то ограничения функции g на кривые $\Gamma_1, \dots, \Gamma_d$ не равны тождественно нулю и имеют нули кратностей $\geqslant k+1$ в точках $y_1, \dots, y_r$ и нули кратности $\geqslant k$ в точках $y_{r+1}, \dots, y_d$. Действительно, отображение $\mathbf{x}$ отождествляет окрестности $V_i \subset X^*$ точек y_i с окрестностью $U \subset \mathbb{C}^n$ точки 0. При этом отождествлении каждая из кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_d$ переходит в часть прямой $h_1 = \dots = h_{n-1} = 0$, лежащую в области U. Ограничение функции g на область V_i переходит в функцию $g_i = g(\mathbf{x}_i^{-1})$ на области U, не равную тождественному нулю (в противном случае в силу аналитичности функции g и связности многообразия X^* функция g тоже тождественно равна нулю, что не так). Раз функции $g_1, \dots, g_d$ не равны тождественному нулю в области U, то для почти всякой прямой $h_1 = \dots = h_{n-1} = 0$ ограничение каждой из функций g_i на эту прямую не обращается в тождественный нуль.

Поэтому система уравнений $l_1 = \dots = l_{n-1} = \varphi = 0$, где $\varphi = g - \varepsilon = 0$, при малом ε будет иметь не меньше чем N невырожденных корней: не меньше чем по $k+1$ невырожденных корней на кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ и не меньше чем по k невырожденных корней на кривых $\Gamma_{r+1}, \dots, \Gamma_d$. Лемма 9 доказана, так как $(k+1)r + k(d-r) = kd + r = N$.

Теорема 10. *Пусть X — неприводимое n-мерное алгебраическое многообразие, $L \in \mathcal{K}(X)$ и $[L, \dots, L] = d > 0$. Тогда если $M \in \mathcal{K}(X)$ и $[L, \dots, L, M] \leqslant N$, то $\dim_{\mathbb{C}} M \leqslant F(n, d, N+1)$.*

Доказательство. Положим $X^* = X \setminus (D \cup O)$, где D — дивизор полюсов функций из пространств L и M и O — объединение множества особых точек многообразия X с множествами точек O_1 и O_2, на которых обращаются в нуль соответственно все функции из пространств L и M. Если $\dim M > F(n, d, N+1)$, то по лемме 9 найдутся функции $l_1, \dots, l_{n-1} \in L$ и $\phi \in M$, такие, что система $l_1 = \dots = l_{n-1} = \phi = 0$ имеет не менее чем $N+1$ невырожденных корней в X^*, что противоречит неравенству $[L, \dots, L, M] \leqslant N$. Теорема 10 доказана.

Следствие 11. *В условиях теоремы* 10

(i) *если $M \sim L$, то $\dim_{\mathbb{C}} M \leqslant n + d$;*

(ii) *если $M \sim L^k$, то $\dim_{\mathbb{C}} M \leqslant Q(n, k+1) + (d-1)Q(n, k)$.*

Доказательство. Пункт (ii) вытекает из теоремы 10, так как $[L, \dots, L, L^k] = kd$ и $F(n, d, kd+1) = Q(n, k) + (d-1)Q(n, k-1)$. Пункт (i) вытекает из п. (ii), так как $Q(n, 1) = n + 1$ и $Q(n, 0) = 1$.

6. Целое замыкание подпространства. Вернемся к эквивалентности, превращающей полугруппу $\mathcal{K}(X)$ в ее полугруппу Гротендика $\mathcal{K}_G(X)$.

Определение 5. Для всякого пространства $L \in \mathcal{K}(X)$ определим его *целое замыкание* $\overline{L}$ как множество всех функций $f \in \mathbb{C}(X)$, целых над L.

Из утверждений 3 и 4 видно, что множество $\overline{L}$ является линейным пространством. Если $L, M \in \mathcal{K}(X)$ и $L \subset M$, то $\overline{L} \subset \overline{M}$.

Утверждение 12. *Пусть X — неприводимое n-мерное алгебраическое многообразие, $L \in \mathcal{K}(X)$ и $[L, \dots, L] = d > 0$. Тогда $\dim_{\mathbb{C}} \overline{L} \leqslant d + n$.*

Доказательство вытекает из следствия 11, п. (ii).

Следствие 13. (i) *Если* $L \in \mathcal{K}(X)$, *то* $\overline{L}$ *имеет конечную размерность, т.е.* $\overline{L} \in \mathcal{K}(X)$.

(ii) *Для* $M \in \mathcal{K}(X)$ *имеем* $M \sim L \iff \overline{M} = \overline{L}$.

Доказательство. Пункт (i) в случае $[L, \dots, L] > 0$ доказан в утверждении 12. Если $[L, \dots, L] = 0$, то вместо L возьмем любое большее пространство $L \subset M$, такое, что $[M, \dots, M] > 0$. Согласно утверждению 12, $\dim_{\mathbb{C}} \overline{M} < \infty$. Пункт (i) доказан, так как $\overline{L} \subset \overline{M}$.

(ii) Согласно п. (i), среди всех пространств, эквивалентных заданному пространству L, есть наибольшее пространство $\overline{L}$. Отсюда вытекает п. (ii).

Следствие 13 вытекает также из теоремы Нётер о целом замыкании ([7], [12]). Но наши оценки и здесь позволяют избежать ссылок на алгебраическую геометрию. Пример 1 показывает, что оценка из утверждения 12 неулучшаема.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{C}^n$, $x_1, \dots, x_n$ — координаты в $\mathbb{C}^n$. Возьмем в качестве L пространство, порожденное функциями $1, x_1, \dots, x_1^d$ и функциями $x_2, \dots, x_n$. Тогда $[L, \dots, L] = d$ и $\dim_{\mathbb{C}} L = d + n$.

Определение 6. Для пространства $L \in \mathcal{K}(X)$ *функция Гильберта* H_L и *нормализованная функция Гильберта* $\overline{H}_L$ определяются равенствами

$$H_L(k) = \dim_{\mathbb{C}} L^k, \qquad \overline{H}_L(k) = \dim_{\mathbb{C}} \overline{L^k}.$$

7. Случай, когда пространство функций разделяет точки.

Теорема 14. *Пусть* $L \in \mathcal{K}(X)$ *разделяет общие точки неприводимого* n*-мерного алгебраического многообразия* X. *Пусть* $[L, \dots, L] = d > 0$. *Тогда*

$$\sum_{k-d<i\leqslant k} Q(n,i) \leqslant H_L(k) \leqslant \overline{H}_L(k) \leqslant F(n,d,kd+1), \tag{2}$$

$$[L, \dots, L] = \lim_{k\to\infty} \frac{n!\, H_L(k)}{k^n} = \lim_{k\to\infty} \frac{n!\, \overline{H}_L(k)}{k^n}\,. \tag{3}$$

Доказательство. Соотношение (2) вытекает из теорем 8 и 10. Имеем $\sum_{k-d<i\leqslant k} Q(n,i) \approx F(n,d,kd+1) \approx dk^n/n!$. Поэтому (3) вытекает из (2).

Пример 2. Оценка снизу $H_L(k) \geqslant \sum_{k-d<i\leqslant k} Q(n,i)$ точна для алгебраической гиперповерхности $X \subset \mathbb{C}^{n+1}$ степени d и пространства L, порожденного координатными функциями в $\mathbb{C}^{n+1}$ и константами.

Пример 3. Пусть X — неприводимая плоская алгебраическая кривая степени d, а L — пространство, порожденное константами и координатными функциями. В этом случае нижняя оценка размерности $\dim_{\mathbb{C}} L^k$ точна (см. пример 2). Верхняя оценка $\overline{H}_L(k) \leqslant kd + 1$ для кривой X рода нуль точна, т. е. $\overline{H}_L(k) = kd+1$. При $k \gg 0$ для любого m, такого, что $1-(d-1)(d-2)/2 \leqslant m \leqslant 1$, можно построить плоскую кривую, для которой нижняя оценка точна, а верхняя оценка есть $\dim_{\mathbb{C}} \overline{L^k} = kd + m$.

Пример 4. Если $[L, \dots, L] = 1$ и если $[L, \dots, L] = 2$, то верхняя оценка функции $\overline{H}_L(k)$ совпадает с нижней оценкой функции $H_L(k)$. В этом случае теорема дает формулу для функций $\overline{H}_L(k) = H_L(k)$.

Степенью $d(X)$ проективного n-мерного многообразия $X \subset \mathbb{C}P^N$ называется число точек его пересечения с общим проективным подпространством коразмерности n. С многообразием $X \subset \mathbb{C}P^N$ связан идеал $I_X \subset \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_N]$, состоящий из полиномов от однородных координат $(x_0 : \cdots : x_N)$ на $\mathbb{C}P^N$, обращающихся в нуль на X, и кольцо $A_X = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_N]/I_X$. Кольцо A_X разлагается в прямую сумму однородных компонент $A_X = A_0 + A_1 + \ldots$. *Функцией Гильберта* $H_{[X]}$ многообразия $X \subset \mathbb{C}P^N$ называется функция на неотрицательных целых числах, определенная формулой $H_{[X]}(k) = \dim_{\mathbb{C}} A_k$.

Теорема Гильберта. *Для любого неприводимого n-мерного проективного многообразия $X \subset \mathbb{C}P^N$ существует предел $l(X) = \lim_{k\to\infty} H_{[X]}(k)/k^n$. Более того, степень $d(X)$ многообразия X равна $n!\,l(X)$.*

Замечание. В формулировку теоремы Гильберта обычно добавляется утверждение о полиномиальности функции H_X при достаточно больших значениях аргумента. Это свойство функций Гильберта справедливо для любых конечно порожденных градуированных модулей над кольцом полиномов и не связано со степенью проективного многообразия. В теореме Гильберта можно не предполагать, что многообразие X неприводимо (общий случай сводится к случаю неприводимого многообразия).

Доказательство теоремы Гильберта. Теорема 14 не только содержит теорему Гильберта, но и доставляет явные оценки функции Гильберта для любого значения аргумента. Действительно, пусть D — общее гиперплоское сечение. Представим $\mathbb{C}P^N$ в виде объединения пространства $\mathbb{C}^N$ и «бесконечно удаленного» пространства $\mathbb{C}P^{N-1}$ и будем считать, что D — пересечение многообразия X с $\mathbb{C}P^{N-1}$.

Рассмотрим аффинное многообразие $X_{\mathrm{af}} = X \setminus D \subset \mathbb{C}^N$. На нем есть выделенное конечномерное пространство функций L, состоящее из ограничений на X_{af} полиномов первой степени. Непосредственно из определения видно, что $H_L = H_{[X]}$. Степень $d(X)$ многообразия X равна числу решений общей системы линейных уравнений $l_1 = \cdots = l_n = 0$ на X_{af}, т. е. $d(X) = [L, \ldots, L]$.

Многообразие X_{af} с пространством функций L удовлетворяют всем условиям теоремы 14. Действительно, $X_{\mathrm{af}} \subset \mathbb{C}^N$ и L содержит ограничения на X_{af} всех координатных функции на $\mathbb{C}^N$. Поэтому пространство L разделяет точки на X_{af}. Покажем, что $[L, \ldots, L] > 0$. Возьмем любое аффинное пространство M коразмерности n, проходящее через какую-либо гладкую точку $a \in X_{\mathrm{af}}$ трансверсально к X_{af}. Пространство M задается системой уравнений $l_1 = \cdots = l_n = 0$, в которой l_i — полиномы первой степени. Эта система на X_{af} имеет невырожденный корень a. Общая система уравнений $l_1 = \cdots = l_n = 0$ на X_{af}, где $l_i \in L$, имеет не меньше невырожденных корней на X_{af}. Поэтому $[L, \ldots, L] > 0$. Теперь двусторонние оценки функции $H_{[X]}$ и теорема Гильберта вытекают из теоремы 14.

8. Случай, когда самопересечение положительно.

Утверждение 15. *Пусть X — неприводимое n-мерное алгебраическое многообразие, $L \in \mathcal{K}(X)$ и $[L, \ldots, L] = d > 0$. Рассмотрим отображение $\mathbf{x}\colon X \to \mathbb{C}^n$, в котором $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — общий набор функций из пространства L. Тогда всякая функция $f \in \mathbb{C}(X)$ удовлетворяет уравнению $f^d + a_1(\mathbf{x}) f^{d-1} + \cdots + a_0(\mathbf{x}) = 0$, в котором $a_1, \ldots, a_d$ — некоторые рациональные функции на $\mathbb{C}^n$.*

Доказательство. Так как $[L,\dots,L]=d$, то в $\mathbb{C}^n$ существует полуалгебраическое множество $\Sigma\subset\mathbb{C}^n$, такое, что $\dim\Sigma<n$ и каждая точка $z\in\mathbb{C}^n\backslash\Sigma$ имеет ровно d невырожденных прообразов $y_i=\mathbf{x}_i^{-1}(z)$ при отображении $\mathbf{x}\colon X\to\mathbb{C}^n$. Для $\phi\in\mathbb{C}(X)$ функция $\mathrm{Trace}_{\mathbf{x}}\,\phi$ на области $\mathbb{C}^n\setminus\Sigma$, определенная формулой $\mathrm{Trace}_{\mathbf{x}}\,\phi=\sum_i\phi(\mathbf{x}_i^{-1})$, продолжается до рациональной функции на $\mathbb{C}^n$. Это продолжение мы будем обозначать тем же символом $\mathrm{Trace}_{\mathbf{x}}\,\phi$. Для $k=0,\dots,d-1$ рассмотрим симметрические функции Ньютона $N_k=\sum_i f^k(\mathbf{x}_i^{-1})=\mathrm{Trace}_{\mathbf{x}}\,f^k$ от ветвей $f(\mathbf{x}_i^{-1})$ многозначной функции $f(\mathbf{x}^{-1})$. Пусть $S_k=P_k(N_1,\dots,N_k)$ — выражение базисной симметрической функции от ветвей $f(\mathbf{x}_i^{-1})$ через симметрические функции Ньютона этих ветвей. Тогда $f^d-S_1f^{d-1}+\dots+(-1)^dS_d=0$.

Следствие 16. *В условиях утверждения* 15 *существует число* m, *такое, что пространство* $\overline{L^m}$ *содержит функцию* g, *разделяющую точки* $y_1,\dots,y_d$.

Доказательство. Пусть z — точка области $\mathbb{C}^n\setminus\Sigma$ и $f\in\mathbb{C}(X)$ — функция, регулярная в точках множества $Y=(\mathbf{x})^{-1}(z)$ и принимающая разные значения в различных точках этого множества. Функция f удовлетворяет уравнению $f^d-S_1f^{d-1}+\dots+(-1)^dS_d=0$, в котором S_i — рациональные функции, регулярные в точке z. Функция $g=fQ$, где Q — наименьшее общее кратное знаменателей рациональных функций $S_1,\dots,S_d$, удовлетворяет уравнению $g^d-QS_1g^{d-1}+\dots+(-1)^dQ^dS_d=0$ с полиномиальными коэффициентами $(-1)^iQ^iS_i$. Функция g разделяет точки множества Y, так как $Q(z)\neq0$, и функция f разделяет точки множества Y. Осталось отметить, что функция g лежит в пространстве $\overline{L^m}$, где m — любое число, большее всех чисел $\deg(Q^iS_i)/i$ при $i=1,\dots,d$.

Теорема 17. *Пусть* X *— неприводимое* n*-мерное алгебраическое многообразие,* $L\in\mathcal{K}(X)$ *и* $[L,\dots,L]=d>0$. *Тогда*

$$\overline{H}_L(k)\leqslant F(n,d,kd+1),\tag{4}$$

$$[L,\dots,L]=\lim_{k\to\infty}\frac{n!\,\overline{H}_L(k)}{k^n}\,.\tag{5}$$

Доказательство. Неравенство (4) вытекает из теоремы 10. По следствию 16 при некотором m пространство $\overline{L^m}$ разделяет общие точки в X. Имеем $[\overline{L^m},\dots,\overline{L^m}]=dm^n$. Положим $p=[k/m]$. Так как $(\overline{L^m})^p\subset\overline{L^k}$, то из нижней оценки в (2) получаем $\dim_{\mathbb{C}}\overline{L^k}\geqslant\dim_{\mathbb{C}}(\overline{L^m})^p\geqslant\sum_{p-dn^m<i\leqslant p}Q(n,i)\approx dm^np^n/n!\approx dk^n/n!$. Для доказательства равенства (5) достаточно воспользоваться неравенством (4), так как $F(n,d,kd+1)\approx dk^n/n!$.

9. Общий случай. Со всяким пространством $L\in\mathbb{C}(X)$ связано рациональное *обобщенное отображение Веронезе* $\rho_L\colon X\to L^*$, определенное формулой $\langle\rho_L(x),f\rangle=f(x)$ для $f\in L$. Обозначим через X_L замыкание по Зарисскому образа многообразия X при отображении ρ_L.

Утверждение 18. *Пусть* X *— неприводимое* n*-мерное алгебраическое многообразие и* $L\in\mathcal{K}(X)$. *Тогда* $[L,\dots,L]>0$, *если и только если* $\dim X_L=n$.

Доказательство. Если $\dim X_L<n$, то почти любое аффинное подпространство в L^* коразмерности n не пересекает многообразия X_L. Поэтому почти любая система уравнений $l_1=\dots=l_n=0$, где $l_i\in L$, не имеет решений в X, т. е. $[L,\dots,L]=0$.

Пусть $\dim X_L = n$. Положим $X^* = X \setminus O$, где O — объединение множества особых точек многообразия X с дивизором полюсов функций из L. Образ многообразия X^* при обобщенном отображении Веронезе имеет размерность n. Поэтому найдется аффинное подпространство коразмерности n, трансверсально пересекающее этот образ. Соответствующая этому подпространству система уравнений $l_1 = \cdots = l_n = 0$, где $l_i \in L$, имеет невырожденные решения в X^*, поэтому $[L, \ldots, L] > 0$.

С отображением $\rho_L \colon X \to X_L$ можно связать алгебраическое многообразие $\widetilde{X}_L$, определенное с точностью до бирационального изоморфизма. Перейдем к его определению. Определим поле $\mathbb{C}(\widetilde{X}_L)$ как подполе поля $\mathbb{C}(X)$ рациональных функций на многообразии X, постоянных на каждой неприводимой компоненте слоя $\rho^{-1}(z) \subset X$ над каждой точкой $z \in X_L$.

Отображение $\rho_L^* \colon \mathbb{C}(X_L) \to \mathbb{C}(X)$ задает вложение поля $\mathbb{C}(X_L)$ в поле $\mathbb{C}(\widetilde{X}_L) \subset \mathbb{C}(X)$. Поле $\mathbb{C}(\widetilde{X}_L)$ является конечным расширением своего подполя $\rho_L^*(\mathbb{C}(X_L))$, так как число неприводимых компонент в слое $\rho^{-1}(z) \subset X$ ограничено общей константой (не зависящей от точки $z \in X_L$).

Определение 7. Определим $\widetilde{X}_L$ как алгебраическое многообразие, поле рациональных функций которого изоморфно полю $\mathbb{C}(\widetilde{X}_L)$.

Вложения $\mathbb{C}(\widetilde{X}_L) \subset \mathbb{C}(X)$ и $\rho_L^* \colon \mathbb{C}(X_L) \to \mathbb{C}(\widetilde{X}_L)$ индуцируют отображения, которые мы будем обозначать через $\widetilde{\pi}_L \colon X \to \widetilde{X}_L$ и $\widetilde{\rho}_L \colon \widetilde{X}_L \to X_L$. Из определения видно, что отображение $\widetilde{\rho}_L$ имеет конечную степень и что $\dim X_L = \dim \widetilde{X}_L$. Если отображение $\rho_L \colon X \to X_L$ имеет конечную степень, то многообразия $\widetilde{X}_L$ и X бирационально изоморфны.

Утверждение 19. *Если функция $f \in \mathbb{C}(X)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению над подполем $\rho_L^*(\mathbb{C}(X_L)) \subset \mathbb{C}(X)$, то $f \in \mathbb{C}(\widetilde{X}_L)$.*

Доказательство. Если $f^k + \rho_L^*(a_1) f^{k-1} + \cdots + \rho_L^*(a_k) = 0$, где $a_i \in \mathbb{C}(X_L)$, то функция f постоянна на каждой неприводимой компоненте прообраза $\rho^{-1}(z) \subset X$ каждой точки $z \in X_L$.

Теорема 20. *Пусть X — неприводимое алгебраическое многообразие, $L \in \mathcal{K}(X)$, $\dim X_L = p$, $\widetilde{L} = \rho_L^*(L) \in \mathcal{K}(\widetilde{X}_L)$ и $[\widetilde{L}, \ldots, \widetilde{L}] = d$. Тогда*

(i) $d > 0$;

(ii) $\overline{H}_L(k) \leqslant F(p, d, kd+1)$;

(iii) *если $\widetilde{\rho}_L \colon \widetilde{X}_L \to X_L$ — бирациональный изоморфизм, то*

$$\sum_{k-d<i\leqslant k} Q(p,i) \leqslant H_L(k) \quad \text{и} \quad [\widetilde{L}, \ldots, \widetilde{L}] = \lim_{k\to\infty} \frac{p!\, H_L(k)}{k^p} = \lim_{k\to\infty} \frac{p!\, \overline{H}_L(k)}{k^p};$$

(iv) *для любого $L \in \mathcal{K}(X)$ имеем $[\widetilde{L}, \ldots, \widetilde{L}] = \lim_{k\to\infty} p!\, \overline{H}_L(k)/k^p$.*

Доказательство. В условиях теоремы $H_L(k) = \dim_{\mathbb{C}} (\widetilde{L})^k$ и $\overline{H}_L(k) = \dim_{\mathbb{C}} (\overline{\widetilde{L}^k})$. Поэтому теорема сводится к вопросу об индексе самопересечения пространства $\widetilde{L}$ на многообразии $\widetilde{X}_L$.

(i) Положительность индекса самопересечения d вытекает из равенства размерностей $\dim \widetilde{X}_L = \dim X_L$ и утверждения 18.

(ii) вытекает из неравенства (4) в теореме 17, примененной к многообразию $\widetilde{X}_L$ и пространству $\widetilde{L}$.

(iii) В условиях п. (iii) пространство $\widetilde{L}$ разделяет общие точки многообразия $\widetilde{X}_L$. Поэтому п. (iii) вытекает из теоремы 14. Пункт (iv) вытекает из теоремы 17.

Литература

[1] А. Г. Хованский, *Многогранник Ньютона, полином Гильберта и суммы конечных множеств*, Функц. анализ и его прил., **26**:4 (1992), 57–63.

[2] В. А. Тиморин, А. Г. Хованский, *Многогранники и уравнения*, в кн.: Математическое просвещение, сер. 3, вып. 14, 2010, 30–57.

[3] А. Г. Хованский, *Многогранники Ньютона и торические многообразия*, Функц. анализ и его прил., **11**:4 (1977), 56–64.

[4] А. Г. Хованский, *Многогранники Ньютона и род полных пересечений*, Функц. анализ и его прил., **12**:1 (1978), 51–61.

[5] K. Kaveh, A. G. Khovanskii, *Convex bodies and algebraic equations on affine varieties*, `http://arxiv.org/abs/0804.4095v1`; краткий вариант с названием *Algebraic equations and convex bodies*, in: Perspectives in Analysis, Topology and Geometry, Progress in Math., Birkhäuser (в печати).

[6] R. Lazarsfeld, M. Mustata, *Convex bodies associated to linear series*, Ann. Sci. Ec. Norm., **42**:5 (2009), 783–835.

[7] K. Kaveh, A. G. Khovanskii, *Mixed volume and an extension of intersection theory of divisors*, Mosc. Math. J., **10**:2 (2010), 343–375.

[8] K. Kaveh, A. G. Khovanskii, *Newton–Okounkov convex bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory*, `http://arxiv.org/abs/0904.3350v1`; представлено в Ann. of Math.

[9] K. Kaveh, A. G. Khovanskii, *Newton polytopes for horospherical spaces*, Mosc. Math. J., **11**:2 (2011), 265–283.

[10] K. Kaveh, A. G. Khovanskii, *Moment polytopes, semigroup of representations and Kazarnovskii's theorem*, J. Fixed Point Theory Appl., **7**:2 (2010), 401–417.

[11] K. Kaveh, A. G. Khovanskii, *Convex bodies associated to actions of reductive groups*, `http://arxiv.org/abs/1001.4830`; представлено в Mosc. Math. J.

[12] О. Зарисский, П. Самюэль, *Коммутативная алгебра*, Т. 2, ИЛ, М., 1963, доп. 4.

Институт системного анализа РАН
Независимый московский университет
The University of Toronto, Canada
e-mail: askold@math.toronto.edu

Поступило в редакцию
7 декабря 2010 г.