Функциональный анализ и его приложения
2006, т. 40, вып. 2, с. 55–64

УДК 512.7+514.17

Аналог определителя, связанный с теорией Паршина–Като, и целочисленные многогранники*

© 2006. А. Г. Хованский

Определитель n векторов в линейном n-мерном пространстве L^n над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — это единственная принимающая значения в поле $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ненулевая полилинейная функция от n векторов, инвариантная относительно линейных преобразований и равная нулю, если ранг n векторов меньше, чем n. Существует единственная функция от $n+1$ векторов в n-мерном пространстве над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, обладающая в точности теми же свойствами. Она встречается при вычислении произведения в группе $(\mathbb{C}^*)^n$ корней системы из n полиномиальных уравнений с достаточно общими многогранниками Ньютона (см. [1]); она же встречается в теории Паршина–Като (см. [2, 3]). В настоящей заметке мы обсуждаем эту замечательную функцию.

Определитель матрицы A над полем вещественных чисел — это объем ориентированного параллелепипеда, натянутого на столбцы матрицы A. Является ли объемом какой-либо фигуры аналог определителя для $n+1$ векторов в n-мерном пространстве над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? В статье дается положительный ответ на этот вопрос. Он тесно связан с геометрией целочисленных многогранников[1)].

Я признателен моей жене Т. В. Белокриницкой за помощь при подготовке статьи к печати и рецензентам этой статьи за полезные замечания.

§1. Аналог определителя для $n+1$ векторов в n-мерном пространстве над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

В этом параграфе мы опишем линейную алгебру, связанную с аналогом определителя. Начнем с определения.

Определение. Обозначим через D функцию от $n+1$ векторов из n-мерного линейного пространства над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, принимающую значения в поле $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и заданную следующими соотношениями: значение $D(k_1,\dots,k_{n+1})$ функции D равно

(a) нулю, если ранг набора векторов $k_1,\dots,k_{n+1}$ меньше, чем n;

(b) $\lambda_1+\dots+\lambda_{n+1}+1$, если векторы $k_1,\dots,k_{n+1}$ связаны единственным соотношением $\lambda_1k_1+\dots+\lambda_{n+1}k_{n+1}=0$.

Лемма 1. *Функция D*

(1) *$GL_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-инвариантна, т. е. для всякого линейного преобразования $A\in GL_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ справедливо тождество $D(k_1,\dots,k_{n+1})=D(Ak_1,\dots,Ak_{n+1})$;*

---

*Работа выполнена при частичной поддержке Канадского гранта №156833-2.

1)Как я узнал от А. Н. Паршина, обсуждаемое ниже простое определение функции D и связанная с этой функцией геометрия целочисленных многогранников ему не были известны, хотя та же самая функция D встречается в изобретенных им символах.

(2) *равна нулю на наборах векторов* $k_1, \ldots, k_{n+1}$*, ранг которых меньше, чем* n;

(3) *полилинейна.*

Доказательство. Свойства (1) и (2) непосредственно вытекают из определения функции D. Для доказательства свойства (3) достаточно показать, что для любого фиксированного набора векторов $k_1, \ldots, k_n$ функция φ, определенная равенством $\varphi(k) = D(k_1, \ldots, k_n, k)$, линейна.

Ранг системы векторов $k_1, \ldots, k_n$ может быть равным n, равным $n-1$ или может быть меньше, чем $n-1$. Рассмотрим эти три случая отдельно.

1. Ранг равен n. В этом случае векторы $k_1, \ldots, k_n$ образуют базис в рассматриваемом линейном пространстве и вектор k единственным способом представляется в виде их линейной комбинации, $k = \lambda_1 k_1 + \cdots + \lambda_n k_n$. Тогда $\varphi(k) = D(k_1, \ldots, k_n, k) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ является линейной функцией от k.

2. Ранг равен $n-1$. В этом случае функция φ обращается в нуль на гиперплоскости Λ, натянутой на векторы $k_1, \ldots, k_n$, и принимает постоянное значение на дополнении к этой гиперплоскости. Действительно, если $k \in \Lambda$, то ранг системы векторов $k_1, \ldots, k_n$, k меньше, чем n, и значение $D(k_1, \ldots, k_n, k)$ равно нулю. Если же $k \notin \Lambda$, векторы связаны единственным соотношением, не зависящим от вектора k. Поэтому функция φ постоянна на дополнении к гиперплоскости Λ. Функция, обладающая таким свойством в линейном пространстве над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, очевидно, является линейной.

3. Ранг меньше, чем $n-1$. В этом случае функция φ тождественно равна нулю и, следовательно, линейна.

Лемма 2. *Существует единственная ненулевая функция* D*, обладающая свойствами* (1)–(3) *из леммы* 1.

Доказательство. Полилинейную функцию достаточно задать на всех наборах $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n+1}}$ векторов из стандартного базиса $e_1, \ldots, e_n$. Из свойства (2) вытекает, что функция может не равняться нулю, только если в наборе все векторы, кроме двух, различны. Из свойства (1) вытекает, что на всех таких наборах функция D принимает одно и то же значение. Если это значение равно нулю, то функция D нулевая. Остается единственная возможность: это значение равно единице. Эта возможность соответствует определенной выше функции D, которая, согласно лемме 1, действительно является $GL_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-инвариантной.

Лемма 3. *В координатах функция* D *выражается формулой*

$$D(k_1, \ldots, k_{n+1}) = \sum_{j>i} \det_{ij},$$

где $\det_{ij}$ *— определитель* $n \times n$*-матрицы, первые* $n-1$ *строк которой представляют собой последовательность векторов* $k_1, \ldots, k_{n+1}$*, из которой вычеркнуты векторы с номерами* i *и* j*, а последняя строка — это покоординатное произведение векторов* k_i *и* k_j*.*

Доказательство. Функция $\sum_{j>i} \det_{ij}$ является полилинейной функцией от векторов $k_1, \ldots, k_{n+1}$. На наборах векторов стандартного базиса она, очевидно, совпадает с функцией D.

Приведем еще одну формулу для функции D. Пусть $\widetilde{A}$ есть $n \times (n+1)$-матрица, строки которой — векторы $k_1, \ldots, k_{n+1}$, и $\det_i$ — определитель матрицы, которая получается из матрицы $\widetilde{A}$ вычеркиванием i-й строки.

Лемма 4. *Векторы $k_1, \ldots, k_{n+1}$ связаны следующим соотношением:*

$$\sum (-1)^{i-1} \det_i k_i = 0.$$

Лемма 4 — простой факт из линейной алгебры.

Лемма 5. *Функция $\prod_{1 \leqslant i \leqslant n+1}(1+\det_i)$ равна нулю, если векторы $k_1, \ldots, k_{n+1}$ порождают пространство L^n. В противном случае она равна единице.*

Доказательство. Векторы $k_1, \ldots, k_{n+1}$ порождают пространство L^n, если и только если хотя бы один из миноров $\det_i$ не равен нулю (и, следовательно, равен единице).

Теорема 1. *Справедлива формула*

$$D(k_1, \ldots, k_{n+1}) = 1 + \det_1 + \cdots + \det_{n+1} + \prod_{1 \leqslant i \leqslant n+1} (1 + \det_i).$$

Доказательство. Если векторы $k_1, \ldots, k_{n+1}$ не порождают всего пространства L^n, то все миноры $\det_i$ равны нулю и $D = 1 + 1 = 0$. Если векторы $k_1, \ldots, k_{n+1}$ порождают все пространство, то они связаны единственным соотношением $\sum \det_i k_i = 0$ (см. лемму 4). В этом случае $\prod(1+\det_i) = 0$ (см. лемму 5). По определению функции D имеем

$$D(k_1, \ldots k_{n+1}) = 1 + \det_1 + \cdots + \det_{n+1}.$$

Теорема 1 доказана.

§ 2. Объем цепи на $(n+1)$-мерном торе, граница которой — сумма рациональных n-мерных торов

2.1. В § 2 обсуждается геометрия, связанная с функцией D. Несколько слов о полученных результатах.

Пусть $\mathbb{Z}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $T^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{Z}^{n+1}$ есть $(n+1)$-мерный вещественный тор. Мы геометрически определяем (см. разд. 2.2) некоторую вещественную функцию J на пространстве гомологичных нулю n-мерных циклов в торе T^{n+1}, заданную с точностью до прибавления целого числа (функцию J можно рассматривать как первообразную формы объема на торе). С каждым упорядоченным набором $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ из n целочисленных векторов $a_i \in \mathbb{Z}^{n+1}$ мы связываем (см. разд. 2.2) гомологичный нулю n-мерный цикл $C(\boldsymbol{a})$ в торе T^{n+1}.

Рассмотрим $n \times (n+1)$-матрицу A, столбцы которой — целочисленные векторы $a_1, \ldots, a_n$. Пусть $k_1, \ldots, k_{n+1}$ — строчки матрицы $\widetilde{A}$ над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, полученной из матрицы A приведением по модулю два. Значение функции $2J$ на цикле $C(\boldsymbol{a})$ лежит в поле $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (см. теорему 2) и совпадает со значением функции D на наборе векторов $k_1, \ldots, k_{n+1}$ (см. теорему 4). Это утверждение придает функции D ясный геометрический смысл. Попутно мы получаем новые результаты о геометрии целочисленных многогранников (см. теоремы 3 и 3′).

Отметим, что близкая геометрическая конструкция позволяет не только объяснить геометрический смысл знаков, фигурирующих в теории Паршина–Като, но геометрически построить классы когомологий аналитических многообразий с коэффициентами в $\mathbb{C}^*$ из этой теории и некоторые обобщения этих классов (см. [4]).

2.2. Обозначения и формулировки теорем. Пусть $T^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{Z}^{n+1}$ — стандартный $(n+1)$-мерный тор, снабженный ориентацией и стандартной формой объема ω, $\int_{T^{n+1}} \omega = 1$. Определим функцию J на пространстве гомологичных нулю кусочно-гладких n-мерных циклов в торе T^{n+1}.

Определение. Значение $J(C)$ функции J на гомологичном нулю n-мерном цикле C — это объем $\int_{\sigma_{n+1}} \omega$ цепи σ_{n+1}, такой, что $\partial\sigma_{n+1} = C$. Цепь σ_n определена с точностью до прибавления взятого с целым коэффициентом фундаментального цикла тора T^{n+1}; поэтому число $J(C)$ — корректно определенный элемент группы $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Аффинное подпространство в $\mathbb{R}^{n+1}$ называется *рациональным*, если оно является аффинной оболочкой некоторого подмножества целочисленной решетки $\mathbb{Z}^{n+1}$. В каждом k-мерном линейном рациональном подпространстве $K \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ определен *целочисленный k-мерный объем V_k*: это инвариантный относительно параллельных переносов объем, нормированный условием $V_k(\Delta) = 1$, где Δ есть k-мерный параллелепипед, стороны которого образуют базис решетки $K \cap \mathbb{Z}^{n+1}$. При факторизации $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{Z}^{n+1} = T^{n+1}$ пространство K переходит в рациональный k-мерный тор. На этом торе V_k индуцирует объем, который инвариантен относительно параллельных переносов и таков, что объем всего k-мерного тора равен единице. Параллельный перенос в $\mathbb{R}^{n+1}$ дает возможность распространить определение целочисленного объема на рациональные аффинные подпространства.

С упорядоченным набором $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$, содержащим n целочисленных векторов $a_i \in \mathbb{Z}^{n+1}$, свяжем следующие объекты: *ориентированный параллелепипед* $\Pi[\boldsymbol{a}] \subset \mathbb{R}^{n+1}$, натянутый на векторы $a_1, \dots, a_n$; целочисленный n-мерный *объем $V_n[\boldsymbol{a}]$ параллелепипеда* $\Pi[\boldsymbol{a}]$; *цепь $T[\boldsymbol{a}]$* в торе T^{n+1}, являющуюся образом ориентированного параллелепипеда $\Pi[\boldsymbol{a}]$ при факторизации $\mathbb{R}^{n+1} \to T^{n+1}$; *поливектор* $v[\boldsymbol{a}] = a_1 \wedge \dots \wedge a_n$.

Цепь $T[\boldsymbol{a}]$ является циклом. Если поливектор $v[\boldsymbol{a}]$ не равен нулю, то эта цепь совпадает с умноженным на число $V_n[\boldsymbol{a}]$ фундаментальным циклом n-мерного тора — образа при факторизации $\mathbb{R}^{n+1} \to T^{n+1}$ ориентированного n-мерного пространства, содержащего параллелепипед $\Pi[\boldsymbol{a}]$. Если $v[\boldsymbol{a}] = 0$, то $T[\boldsymbol{a}]$ — цикл, гомологичный нулю, который можно затянуть пленкой, размерность которой меньше, чем $n+1$.

Пусть $\boldsymbol{a}_j$, $j = 1, \dots, m$, — упорядоченные наборы, содержащие по n целочисленных векторов. Очевидно, что *сумма $v[\boldsymbol{a}_1] + \dots + v[\boldsymbol{a}_m]$ поливекторов $v[\boldsymbol{a}_j]$ равна нулю, если и только если сумма $T[\boldsymbol{a}_1] + \dots + T[\boldsymbol{a}_m]$ циклов $T[\boldsymbol{a}_j]$ в группе $H_n(T^{n+1}, \mathbb{Z})$ равна нулю.*

Центральным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2. *Пусть сумма $v[\boldsymbol{a}_1] + \dots + v[\boldsymbol{a}_m]$ поливекторов $v[\boldsymbol{a}_j]$ равна нулю. Тогда значение $J(C)$ функции J на цикле $C = T[\boldsymbol{a}_1] + \dots + T[\boldsymbol{a}_m]$ является полуцелым числом. Для целого числа $2J(C)$* (определенного по модулю 2) *справедливо сравнение* $2J(C) \equiv (V_n[\boldsymbol{a}_1] + \dots + V_n[\boldsymbol{a}_m]) \mod 2$.

Теорему 2 мы докажем одновременно с формулируемой ниже теоремой 3, относящейся к геометрии целочисленных многогранников. Скажем, что n-мерная грань Γ выпуклого $(n+1)$-мерного многогранника *сократима*, если у этого многогранника есть еще одна грань, равная грани Γ с точностью до параллельного переноса.

Определение. Выпуклый $(n+1)$-мерный многогранник имеет *параллелепипедный тип*, если каждая его несократимая n-мерная грань является параллелепипедом.

Теорема 3. *Пусть выпуклый $(n+1)$-мерный целочисленный многогранник Δ имеет параллелепипедный тип. Тогда его удвоенный целочисленный $(n+1)$-мерный объем является целым числом. Это число имеет ту же четность, что и сумма всех целочисленных n-мерных объемов граней многогранника Δ, являющихся параллелепипедами.*

Целочисленный объем целочисленного параллелепипеда является целым числом. Если пара сократимых граней многогранника является парой параллелепипедов, то сумма их объемов — четное число. Поэтому в рамках теоремы 3 объемы сократимых пар параллелепипедов можно не учитывать. Утверждение теоремы 3 можно обобщить, после чего оно становится применимым к более широкому классу многогранников (см. теорему $3'$ из разд. 2.6).

Обозначим через $e_1, \dots, e_{n+1}$ стандартный базис в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ и через $v[\boldsymbol{e}_i]$ внешнее произведение всех векторов $e_1, \dots, e_{n+1}$, кроме вектора e_i. Пусть $\boldsymbol{a}$ — упорядоченный набор $(a_1, \dots, a_n)$, состоящий из n целочисленных векторов $a_i \in \mathbb{Z}^{n+1}$, и пусть $v[\boldsymbol{a}] = \sum m_i v[\boldsymbol{e}_i]$ — разложение поливектора $v[\boldsymbol{a}]$ по базисным поливекторам. Обозначим через $C(\boldsymbol{a})$ гомологичный нулю цикл $C(\boldsymbol{a}) = T[\boldsymbol{a}] - \sum m_i T[\boldsymbol{e}_i]$.

Теорема 4. *Значение функции $2J$ на цикле $C(\boldsymbol{a})$ — корректно определенный элемент поля $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, совпадающий со значением функции D на векторах $k_1, \dots, k_{n+1}$ — строках $n \times (n+1)$-матрицы $\widetilde{A}$, полученной приведением по модулю 2 матрицы A, столбцами которой являются векторы $a_1, \dots, a_n$.*

2.3. Одномерный случай. Напомним классическую формулу Пика.

Формула Пика. *Площадь $V_2(\Delta)$ целочисленного многоугольника Δ, число $B(\Delta)$ его внутренних целых точек и целочисленная длина его границы* $\sum_j V_1(\Delta_j)$ (здесь суммирование ведется по множеству всех сторон Δ_j многоугольника Δ) *связаны следующим соотношением*:

$$V_2(\Delta) = B(\Delta) + \frac{1}{2}\sum_j V_1(\Delta_j) - 1.$$

Лемма 6. *Теорема 2 справедлива при $n = 1$.*

Доказательство. При $n = 1$ поливекторы $\boldsymbol{a}_j$ являются векторами на плоскости. Так как сумма векторов $\boldsymbol{a}_j$ равна нулю, то можно считать, что векторы $\boldsymbol{a}_j$ являются сторонами Δ_j некоторого выпуклого многоугольника Δ, ориентированными обходом его границы «в направлении против часовой стрелки». Из формулы Пика видно, что удвоенная площадь многоугольника Δ — целое число, отличающееся от целочисленной длины $\sum_j V_1(\Delta_j)$ его границы на четное число $2(B(\Delta) - 1)$. Образ ориентированного многоугольника Δ при факторизации $\mathbb{R}^2 \to T^2$ является двумерной цепью, граница C которой равна $T[\boldsymbol{a}_1] + \dots + T[\boldsymbol{a}_m]$. Поэтому $2J(C) \equiv 2V(\Delta) \mod 2$. Очевидно, что $V_1[\boldsymbol{a}_j] = V_1(\Delta_j)$. Лемма доказана.

Итак, при $n = 1$ теорема 2 вытекает из формулы Пика. Объемы многомерных целочисленных многогранников, вообще говоря, не являются полуцелыми числами. Но для очень специальных многомерных многогранников все же справедлив аналог формулы Пика над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (см. теорему 3 и формулируемую ниже теорему 3′).

Любой выпуклый многоугольник имеет параллелепипедный тип. Для многоугольников теорема 3 тоже вытекает из формулы Пика.

2.4. Шаг индукции. В этом разделе мы формулируем и доказываем основную лемму, которая нужна для доказательства теорем 2 и 3. Сумму по Минковскому выпуклых многогранников Δ_1, Δ_2 мы будем обозначать символом $\Delta_1 + \Delta_2$.

Лемма 7. *Пусть отрезок I в некотором аффинном пространстве трансверсален выпуклому $(n+1)$-мерному многограннику Δ. Тогда каждая несократимая грань старшей размерности для многогранника $\Delta+I$ имеет вид Γ_i+I, где Γ_i — несократимая грань старшей размерности многогранника Δ. В частности, если многогранник Δ имеет параллелепипедный тип, то многогранник $\Delta + I$ тоже имеет параллелепипедный тип.*

Доказательство. Многогранник $\Delta+I$ содержит следующие $(n+1)$-мерные грани. Во-первых, это пара сократимых граней $\Delta+a$, $\Delta+b$, где a и b — концы отрезка I. Во-вторых, это пара сократимых граней Γ_1+I и Γ_2+I для каждой пары сократимых n-мерных граней Γ_1 и Γ_2 многогранника Δ. Все остальные $(n+1)$-мерные грани многогранника $\Delta+I$ несократимы и имеют вид Γ_i+I, где Γ_i — несократимая n-мерная грань многогранника Δ.

Основная лемма. *Если теорема 3 верна для всякого целочисленного многогранника, аффинно эквивалентного данному $(n+1)$-мерному многограннику Δ, то она верна для всякого целочисленного многогранника, аффинно эквивалентного $(n+2)$-мерному многограннику $\Delta+I$, где I — отрезок, трансверсальный многограннику Δ.*

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{L}$ и l $(n+1)$-мерное и одномерное аффинные рациональные пространства, содержащие многогранник Δ и отрезок I. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathscr{L}$ и l являются линейными пространствами. Сумма $L=\mathscr{L}+l$ этих пространств является $(n+2)$-мерным рациональным пространством, содержащим многогранник $\Delta+I$.

Шаг 1. Допустим дополнительно, что решетка в пространстве L является суммой решеток в пространствах $\mathscr{L}$ и l. В этом случае лемма очевидна. Действительно, по предположению леммы целочисленный $(n+1)$-мерный объем многогранника Δ является полуцелым числом и выполняется сравнение

$$2V_{n+1}(\Delta) \equiv \sum_i V_n(\Gamma_i) \mod 2, \tag{$*$}$$

где суммирование ведется по всем n-мерным граням Γ_i многогранника Δ, являющимся параллелепипедами. В условиях шага 1 для каждого рационального подпространства $K\subset\mathscr{L}$ решетка в $K+l$ совпадает с суммой решеток в пространствах K и l. Целочисленный объем в $K+l$ есть произведение целочисленных объемов в K и в l. Аналогичное соотношение объемов справедливо для рациональных аффинных пространств, параллельных пространствам K, l и $K+l$. Умножая равенство $(*)$ на целочисленную длину отрезка I, получим утверждение шага 1.

Шаг 2. Для сведе́ния общего случая к случаю из шага 1 нам понадобятся преобразования расслоенного сдвига. Скажем, что непрерывное отображение

$F\colon L \to L$ является *расслоенным сдвигом в направлении прямой* l, если оно переводит каждую прямую, параллельную прямой l, в себя, причем ограничение отображения F на такую прямую является сдвигом (на вектор, зависящий от выбора прямой, параллельной l). Ясно, что всякий расслоенный сдвиг сохраняет форму объема на L, инвариантную относительно параллельных переносов. Пусть аффинное рациональное подпространство $K \subset L$ содержит прямую, параллельную рациональной прямой l. Тогда K инвариантно относительно расслоенного сдвига F, причем ограничение F на K сохраняет целочисленный объем в K.

Шаг 3. В пространстве $L = \mathscr{L} + l$ выделим прямую l. Выберем линейное целочисленное пространство $\mathscr{L}_1 \subset L$ таким образом, чтобы $L = \mathscr{L}_1 + l$ и чтобы $\Lambda_{n+2} = \Lambda_{n+1} + \Lambda_1$, где Λ_{n+2}, Λ_{n+1} и Λ_1 — решетки целых точек в L, $\mathscr{L}_1$ и l. Пространство $\mathscr{L}_1$ с такими свойствами существует. Для построения $\mathscr{L}_1$ несократимый вектор e_1 из решетки Λ_1 дополним до базиса $e_1, \dots, e_{n+2}$ в решетке Λ_{n+2}. В качестве $\mathscr{L}_1$ достаточно взять линейное пространство, порожденное векторами $e_2, \dots, e_{n+2}$. Рассмотрим проекцию $\pi\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}_1$ пространства $\mathscr{L}$ на пространство $\mathscr{L}_1$ вдоль прямой l. Целочисленный $(n+1)$-мерный многогранник $\pi(\Delta)$ аффинно эквивалентен многограннику Δ; поэтому целочисленный $(n+1)$-мерный объем многогранника $\pi(\Delta)$ является полуцелым числом и выполняется сравнение

$$2V_{n+1}(\pi(\Delta)) \equiv \sum_i V_n(\pi(\Gamma_i)) \mod 2,$$

где суммирование ведется по всем n-мерным граням $\pi(\Gamma_i)$ многогранника $\pi(\Delta)$, являющимся n-мерными параллелепипедами. Согласно шагу 1,

$$2V_{n+2}(\pi(\Delta) + I) \equiv \sum_i V_{n+1}(\pi(\Gamma_i) + I) \mod 2.$$

Построим теперь аффинный расслоенный сдвиг $F\colon L \to L$ вдоль прямой l, переводящий многогранник $\Delta + I$ в многогранник $\pi(\Delta) + I$. Для этого на каждой прямой λ, параллельной l, отметим точки $x(\lambda) = \lambda \cap \mathscr{L}$ и $y(\lambda) = \lambda \cap \mathscr{L}_1$. Определим F как отображение, ограничение которого на прямую λ является сдвигом на вектор $y(\lambda) - x(\lambda)$. Ясно, что $F(\Delta) = \pi(\Delta)$, $F(\Delta + I) = \pi(\Delta) + I$, $F(\Gamma_i) = \pi(\Gamma_i)$, $F(\Gamma_i + I) = \pi(\Gamma_i) + I$. Согласно шагу 2, общий случай вытекает из случая, рассмотренного в шаге 1.

2.5. Доказательства теорем 2 и 3. Для завершения доказательства теоремы 2 основная лемма будет использоваться в форме такого следствия:

Следствие. *Теорема* 3 *справедлива для многогранников* $\Delta_{n+1} = \Delta_2 + \Pi$, *где* Δ_2 *— целочисленный многоугольник, а* Π *есть* $(n-1)$*-мерный целочисленный параллелепипед, трансверсальный многоугольнику* Δ_2. *Все* n*-мерные грани многогранника* Δ, *кроме некоторых пар сократимых граней, имеют вид* $a_i + \Pi$, *где* a_i *— сторона многоугольника* Δ_2.

Доказательство теоремы 2. 1) Элементарным соотношением между поливекторами назовем соотношение вида $a \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n + b \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n + c \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 0$, где $a, b, c, a_2, \dots a_n$ — любые целочисленные векторы, для которых $a + b + c = 0$. Теорему 2 достаточно проверить лишь для элементарных соотношений. Действительно, если в соотношении между поливекторами встречается целочисленный вектор $a \in \mathbb{Z}^{n+1}$, у которого сумма модулей координат больше единицы, то он представим в виде $a = -b - c$, где $b, c \in \mathbb{Z}^{n+1}$ — векторы, у каждого из которых сумма модулей координат меньше, чем у вектора a. Продолжая этот процесс, сведем исходное соотношение к соотношениям, в которых фигурируют лишь векторы $\pm e_i$. Для подобных соотношений теорема 2 очевидна.

2) Осталось проверить теорему 2 для элементарного соотношения, связанного с тремя наборами векторов $\boldsymbol{a} = (a, a_2, \dots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b, a_2, \dots, a_n)$ и $\boldsymbol{c} = (c, a_2, \dots, a_n)$, такими, что $a + b + c = 0$. Сначала сделаем это при условии, что векторы $a, b, c, a_2, \dots a_n$ лежат в некотором n-мерном подпространстве K. В этом случае гомологичный нулю цикл $C = T[\boldsymbol{a}]+T[\boldsymbol{b}]+T[\boldsymbol{c}]$ лежит в n-мерном торе $T(K)$ — образе пространства K при факторизации $\mathbb{R}^{n+1} \to T^{n+1}$. Цепь σ_{n+1}, затягивающую цикл C, можно выбрать в торе $T(K)$; поэтому $J(C) = 0$. С другой стороны, $V_n[\boldsymbol{a}] + V_n[\boldsymbol{b}] + V_n[\boldsymbol{c}] = 0$. Действительно, вычисление объема n-мерного параллелепипеда в K сводится к вычислению определителя, а определитель полилинеен.

3) Перейдем к случаю, когда векторы $a, b, c, a_2, \dots, a_n$ не лежат ни в каком n-мерном подпространстве. В этом случае треугольник Δ_2 со сторонами a, b, c трансверсален $(n-1)$-мерному параллелепипеду Π со сторонами $a_2, \dots, a_n$. К многограннику $\Delta_{n+1} = \Delta_2 + \Pi$ применимо следствие. Из него вытекает, во-первых, что граница $\partial\sigma_{n+1}$ цепи σ_{n+1}, являющейся образом при факторизации $\mathbb{R}^{n+1} \to T^{n+1}$ ориентированного многогранника Δ_{n+1}, равна циклу $C = T[\boldsymbol{a}]+T[\boldsymbol{b}]+T[\boldsymbol{c}]$. Действительно, пары сократимых граней многогранника Δ_{n+1} при факторизации уничтожатся и войдут в границу цепи σ_{n+1} с нулевым коэффициентом. Во-вторых, согласно следствию, теорема 3 справедлива для многогранника Δ_{n+1}. Поэтому справедливо сравнение $2J(C) \equiv (V_n[a] + V_n[b] + V_n[c]) \bmod 2$, которое и требовалось доказать.

Из теоремы 2 легко выводится теорема 3.

Доказательство теоремы 3. Пусть σ_{n+1} — цепь в торе T^{n+1}, являющаяся образом при факторизации $\mathbb{R}^{n+1} \to T^{n+1}$ целочисленного многогранника Δ, имеющего параллелепипедный тип. Граница цепи σ_{n+1} равна сумме образов при факторизации ориентированных граней многогранника Δ, являющихся параллелепипедами. Действительно, пары сократимых граней многогранника Δ при факторизации уничтожаются и входят в границу цепи σ_{n+1} с нулевым коэффициентом. Теорема 3 вытекает теперь из теоремы 2.

2.6. Усиление теоремы 3. Теорему 3 можно усилить. Со всякой гиперплоскостью $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в $(n+1)$-мерном выпуклом многограннике $\Delta \subset \mathbb{R}^{n+1}$ связаны две грани $\Gamma_1(K)$ и $\Gamma_2(K)$, для которых гиперплоскость, параллельная K и содержащая любую из этих граней, является опорной к многограннику. Пусть $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to T^{n+1}$ — отображение факторизации. Скажем, что многогранник Δ *уравновешен* относительно рациональной гиперплоскости K *с весом* $m(K) \geqslant 0$, если в группе n-мерных цепей n-мерного тора $\pi(K) = T(K)$ выполнено равенство $\pi(\Gamma_1(K)) + \pi(\Gamma_2(K)) = \pm m(K)T(K)$. В этом равенстве $\Gamma_1(K)$ и $\Gamma_2(K)$ рассматриваются как n-мерные цепи, снабженные ориентацией границы многогранника Δ, а $T(K)$ — как фундаментальный цикл тора, снабженного произвольной ориентацией. Объемы граней $\Gamma_1(K)$ и $\Gamma_2(K)$ многогранника, уравновешенного относительно рациональной гиперплоскости K с весом $m(K) \geqslant 0$, удовлетворяют соотношению $|V_n(\Gamma_1(K)) - V_n(\Gamma_2(K))| = m(K)$. Скажем, что целочисленный многогранник Δ имеет *обобщенно параллелепипедный* *тип*, если он уравновешен относительно каждой рациональной гиперплоскости K (это условие содержательно лишь для конечного числа гиперплоскостей K, параллельных n-мерным граням многогранника Δ).

Теорема 3$'$. *Пусть Δ — выпуклый целочисленный $(n+1)$-мерный многогранник, имеющий обобщенно параллелепипедный тип. Тогда удвоенный целочисленный $(n+1)$-мерный объем многогранника Δ является целым числом, имеющим ту же четность, что и сумма весов $m(K)$ по всем рациональным гиперплоскостям K* (суммирование достаточно проводить по конечному числу гиперплоскостей K, параллельных n-мерным граням многогранника Δ).

Теорема 3$'$ выводится из теоремы 2 в точности так же, как теорема 3.

Отметим, что в трехмерном пространстве есть много многогранников, имеющих обобщенно параллелепипедный тип. Легко проверяется следующая

Лемма 8. *Сумма Минковского любого числа целочисленных отрезков и многоугольников, произвольным образом расположенных в $\mathbb{R}^3$, имеет обобщенно параллелепипедный тип.*

2.7. Геометрический смысл функции $\boldsymbol{D}$. В этом разделе доказывается теорема 4, сформулированная в разд. 2.2.

Напомним определение векторного произведения n векторов в $(n+1)$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, снабженном стандартной формой объема ω. Векторное произведение упорядоченных векторов $a_1, \dots, a_n$ — это такой ковектор $\boldsymbol{a}^\perp \in (\mathbb{R}^{n+1})^*$, что для всякого вектора $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ справедливо равенство $\langle \boldsymbol{a}^\perp, a\rangle = \omega(a \wedge a_1 \wedge \dots \wedge a_n)$. Пусть A есть $n \times (n+1)$-матрица, столбцы которой — компоненты векторов $a_1, \dots, a_n$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть $\det_i(\boldsymbol{a})$ — определитель матрицы, которая получается из матрицы A вычеркиванием i-й строки. Справедлива следующая

Лемма 9. 1) *В стандартном базисе пространства $(\mathbb{R}^{n+1})^*$ векторное произведение $\boldsymbol{a}^\perp$ векторов $a_1, \dots, a_n$ задается формулой $\boldsymbol{a}^\perp = (\det_1(\boldsymbol{a}), \dots, (-1)^n \det_{n+1}(\boldsymbol{a}))$.*

2) *Ковектор $\boldsymbol{a}^\perp$ ортогонален каждому из векторов $a_1, \dots, a_n$, т. е. для любого $i = 1, \dots, n$ справедливо равенство $\langle \boldsymbol{a}^\perp, a_i\rangle = 0$.*

3) *Если векторы $a_1, \dots, a_n$ целочисленны, то вектор $\boldsymbol{a}^\perp$ тоже целочислен* (*т. е. принадлежит решетке $(\mathbb{Z}^{n+1})^*$, двойственной решетке $\mathbb{Z}^{n+1}$*). *При этом целочисленная длина $V_1(\boldsymbol{a}^\perp)$ ковектора $\boldsymbol{a}^\perp$ равна целочисленному объему $V_n[\boldsymbol{a}]$ параллелепипеда $\Pi[\boldsymbol{a}]$.*

Лемма 9 — простой факт из линейной алгебры. Мы не будем останавливаться на его доказательстве.

Доказательство теоремы 4. Поливектор $v[\boldsymbol{a}] = a_1 \wedge \dots \wedge a_n$ следующим образом разлагается по координатным поливекторам $v[\boldsymbol{a}] = \det_1(\boldsymbol{a}) e_2 \wedge \dots \wedge e_{n+1} + \dots + \det_{n+1}(\boldsymbol{a}) e_1 \wedge \dots \wedge e_n$. Согласно теореме 2, $2J(C(A))$ — целое число, определенное с точностью до прибавления четного числа, и справедливо сравнение

$$2J(C[\boldsymbol{a}]) \equiv [V_n[\boldsymbol{a}] + \det_1(\boldsymbol{a}) + \dots + \det_{n+1}(\boldsymbol{a})] \mod 2.$$

По определению число $V_n[\boldsymbol{a}]$ равно целочисленному объему параллелепипеда $\Pi[\boldsymbol{a}]$, натянутого на векторы $a_1, \dots, a_n$. По лемме 9 этот объем равен целочисленной длине $V_1(\boldsymbol{a}^\perp)$ ковектора $\boldsymbol{a}^\perp = (\det_1(\boldsymbol{a}), \dots, (-1)^n \det_{n+1}(\boldsymbol{a}))$. Справедливо сравнение

$$V_1(\boldsymbol{a}^\perp) \equiv \left[1 + \prod_{1\leqslant i\leqslant n+1} (1 + \det_i(\boldsymbol{a}))\right] \mod 2.$$

Действительно, как левая, так и правая части этого сравнения являются четными числами, если и только если все числа $\det_1(\boldsymbol{a}), \dots, \det_{n+1}(\boldsymbol{a})$ одновременно являются четными. Итак, выполняется следующее сравнение:

$$2J(C[\boldsymbol{a}]) \equiv \left[1 + \det_1(\boldsymbol{a}) + \dots + \det_{n+1}(\boldsymbol{a}) + \prod_{1\leqslant i\leqslant n+1} (1 + \det_i(\boldsymbol{a}))\right] \mod 2.$$

Для завершения доказательства теоремы 4 осталось сослаться на формулу для функции D из теоремы 1.

Замечание при корректуре. Только что появилось еще одно применение функции D, обсуждаемой в настоящей статье. Совместно с А. И. Эстеровым мы вычислили отношение коэффициентов при любых двух экстремальных мономах многомерного результанта. Многомерные результанты — это определенные с точностью до знака специальные полиномы Лорана от многих переменных. Они интенсивно изучались Гельфандом, Капрановым, Зелевинским, Штурмфельсом и др. Известны их многогранники Ньютона. Известно, что коэффициенты при экстремальных мономах (т. е. при мономах, соответствующих вершинам многогранника Ньютона) в каждом таком результанте равны ± 1. Наша с Эстеровом формула для отношения таких коэффициентов использует комбинаторику целочисленных многогранников и функцию D.

Литература

1. *Khovanskii A.* Newton polyhedrons, a new formula for mixed volume, product of roots of a system of equations. In: The Arnoldfest (Proceedings of a conference in honour of V. I. Arnold for his 60th birthday, Toronto, Canada, June 15–21, 1997), Fields Inst. Commun., Vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 325–364.
2. *Паршин А. Н.* Локальная теория полей классов. Труды МИАН, **165**, 143–170 (1984).
3. *Паршин А. Н.* Когомологии Галуа и группа Брауэра локальных полей. Труды МИАН, **183**, 159–169 (1990).
4. *Хованский А. Г.* Логарифмический функционал и многомерные символы. Готовится к печати.

Институт системного анализа РАН
Московский независимый университет
The University of Toronto, Canada
e-mail: askold@math.toronto.edu

Поступило в редакцию
12 января 2005 г.