Алгебра и анализ
Том 4 (1992), вып. 4

ТЕОРЕМА РИМАНА—РОХА ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ И СУММ КВАЗИПОЛИНОМОВ ПО ВИРТУАЛЬНЫМ МНОГОГРАННИКАМ

А. В. Пухликов, А. Г. Хованский

Работа посвящена доказательству теоремы (называемой авторами теоремой Римана–Роха), связывающей интеграл и целочисленную сумму квазиполинома по выпуклой цепи из некоторого семейства. Показано, что существует линейный дифференциальный оператор (оператор Тодда), переводяший интеграл в сумму. Это дает многомерное обобщение известной формулы Эйлера–Маклорена.

Введение

Настоящая работа является непосредственным продолжением статьи [1] тех же авторов. Развитая в [1] теория выпуклых цепей и конечно-аддитивных мер на них реализует один из возможных подходов к их изучению; в данной работе предлагается другой, „трансверсальный", подход, основанный на систематическом использовании концепции конического представления выпуклой цепи, т.е. представления цепи как целочисленной линейной комбинации характеристических функций конусов. Один раз эта тема затрагивалась в [1]: когда рассматривался вопрос о восстановлении выпуклой цепи по ее опорной функции (§ 4, предложение 2, где по существу уже намечены общие контуры техники, на которой построена настоящая работа).

Предметом нашего изучения являются специальные меры выпуклых цепей — интегралы и целочисленные суммы (т.е. суммы по точкам дискретной решетки) квазиполиномов. Мы приводим достаточно развернутое вычисление этих мер, что позволяет нам получить основной результат — „теорему Римана–Роха", связывающую целочисленную сумму и интеграл (одного и того же) квазиполинома по семейству выпуклых цепей. Одномерный вариант этой теоремы есть старая формула Эйлера–Маклорена для специального класса функций (квазиполиномов), так что наша „теорема Римана–Роха" может быть интерпретирована как многомерное обобщение формулы Эйлера–Маклорена (по поводу последней см., например, [2]).

Мы свободно и без специальных ссылок пользуемся языком предшествующей статьи [1] — прежде всего понятиями выпуклой цепи и ее опорной функции. Вместе с тем данная работа почти независима от [1] — из результатов, доказанных в [1], нам необходимо по существу только почти тривиальное предложение 2 из § 4, упомянутое выше.

Ключевые слова: интеграл и целочисленная сумма квазиполинома, развернутые и остроконечные конуса, мероморфная функция.

Система нумерации утверждений и определений та же, что и в [1].

Авторы благодарят Международную лабораторию „Математические методы информатики и управления“ и ее директора С. К. Коровина за финансовую поддержку настоящей работы.

§ 1. Формулировка основной теоремы

В данном параграфе вводятся понятия и конструкции, необходимые для формулировки теоремы Римана–Роха. Кроме того, мы кратко объясняем алгебро–геометрическое происхождение этой теоремы.

1. Исходные понятия и конструкции. Пусть (V, Λ) — допустимая пара [1], где V — n-мерное вещественное линейное пространство, а Λ в данном случае — дискретная полная решетка. Зафиксируем изоморфизм $V \underset{\sim}{\to} \mathbb{R}^n$, относительно которого Λ становится естественно вложенной целочисленной решеткой $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$; на точки $x \in \Lambda$ мы будем ссылаться как на целочисленные вектора. Пусть $\Lambda^* = \{l \in V^* | l(\Lambda) \subset \mathbb{Z}\} \subset V^*$ — двойственная решетка. Ее элементы мы будем называть целочисленными ковекторами.

Понятия, которыми мы будем пользоваться, в большинстве своем общеприняты. Однако во избежание возможных разночтений мы приведем их список с указанием точного значения.

(1) *Луч* есть замкнутая аффинная полупрямая в V, *вершина* луча — его начало, луч есть Λ-луч (или целочисленный луч), если он содержит по крайней мере две (и, значит, бесконечно много) точки из Λ, одна из которых — его вершина.

(2) Аффинное подпространство $W \subset \Lambda$ есть Λ-подпространство (или целочисленное подпространство), если W есть аффинная оболочка $W \cap \Lambda$.

(3) *Конус* $C \subset V$ есть выпуклая оболочка конечного множества лучей $R_1, \ldots, R_N$ с общей вершиной; C есть Λ-конус (или целочисленный конус), если лучи $R_1, \ldots, R_N$ можно выбрать целочисленными. Обозначим через $\langle C \rangle$ и $vs(C)$ аффинную оболочку и вершинное пространство конуса C соответственно. Очевидно, для Λ-конуса C имеем $\langle C \rangle$ и $vs(C)$ суть Λ-подпространства. Грань Λ-конуса есть, очевидно, Λ-конус.

(4) Конус C назовем *развернутым*, если $\dim vs(C) \geqslant 1$. В противном случае конус C назовем *остроконечным*. В последнем случае определена его вершина — точка $vs(C)$ и ребра (одномерные грани), причем C есть выпуклая оболочка своих ребер.

(5) Пусть R — луч с вершиной x. Направляющий вектор луча R есть $y - x$, где $y \in R \setminus \{x\}$ есть ближайшая к x целочисленная точка, если R – Λ-луч, и любая точка в противном случае.

(6) *Простой* конус C — это остроконечный конус C, направляющие вектора ребер которого линейно независимы. Простой Λ-конус (или простой целочисленный конус) C — это простой конус C, являющийся таким Λ-конусом, что направляющие вектора его ребер образуют базис решетки $\langle C \rangle \cap \Lambda$.

(7) Размерность конуса есть $\dim\langle C \rangle$, внутренность конуса $\operatorname{Int} C$ понимается всегда как внутренность в $\langle C \rangle$. Подчеркнем, что конус в нашем понимании всегда замкнут.

Все перечисленные понятия применимы, разумеется, к любому пространству и любой дискретной полной решетке (на самом деле к любой допустимой паре в смысле [1]). Применяя их к паре (V^*, Λ^*), дадим еще одно определение.

(8) *Разбиение* пространства V^* есть конечный набор конусов $\Sigma = \{C_i^* \subset V | i \in I\}$ со следующими свойствами:

(а) $0 \in vs(C_i^*)$, $i \in I$;

(б) $\operatorname{Int} C_a^* \cap \operatorname{Int} C_b^* = \varnothing$ при $a \neq b$, $a, b \in I$;

(в) $C_a^* \cap C_b^* = C_e^*$ для некоторого $e \in I$;

(г) $C_a^* \subset C_b^*$ влечет: C_a^* есть грань C_b^*;

(д) $V^* = \bigcup\limits_{i \in I} \operatorname{Int} C_i^*$.

Разбиение простое, если все конусы C_i^* простые, и простое целочисленное (или Λ-), если все C_i^* — простые Λ-конусы. *Ребрами* простого (целочисленного) разбиения назовем все ребра конусов C_i^*, а направляющими векторами разбиения — направляющие вектора ребер.

(9) Выпуклый многогранник $A \in \mathcal{P}(V)$ полной размерности (т.е. $\langle A \rangle = V$) назовем простым, целочисленным (Λ-), простым целочисленным, если все конуса при его вершинах соответственно простые, целочисленные, простые целочисленные. (Подчеркнем, что в нашей терминологии „простой целочисленный" есть более сильное условие, чем „и простой, и целочисленный"!). Нетрудно видеть, что простой целочисленный многогранник A порождает простое целочисленное разбиение Σ_A пространства V^* (называемое двойственным к A): пусть $\Gamma(A)$ — множество граней A, $C_{\Delta,A}$ для $\Delta \in \Gamma(A)$ — конус при грани Δ (т.е. $vs(C_{\Delta,A}) = \langle \Delta \rangle$ и для любого $x \in \operatorname{Int} \Delta$ существует окрестность $U \ni x$ такая, что $C_{\Delta,A} \cap U = A \cap U$), тогда $\Sigma_A = \{C_{\Delta,A}^* | \Delta \in \Gamma(A)\}$, где $C_{\Delta,A}^* \subset V^*$ — конус, двойственный к конусу $C_{\Delta,A} \subset V$, сдвинутому так, чтобы начало координат лежало в его вершинном пространстве.

Хорошо известно (в теории торических многообразий это означает, что всякое полное торическое многообразие разрешается до неособого проективного торического многообразия), что всякое целочисленное разбиение пространства V^* (т.е. разбиение с целочисленными конусами) измельчается до простого целочисленного разбиения, двойственного простому целочисленному многограннику.

С каждым простым целочисленным разбиением Σ свяжем следующие четыре подмножества группы выпуклых цепей $Z(V)$: $Z(V, \Sigma)$ — цепи, опорные функции которых линейны в Σ; $Z(\Lambda, \Sigma)$ — целочисленные цепи: $Z(\Lambda) \cap Z(V, \Sigma)$; $\mathcal{P}^*(V, \Sigma) = \mathcal{P}^*(V) \cap Z(V, \Sigma)$ — виртуальные многогранники, опорные функции которых линейны в Σ; $\mathcal{P}^*(\Lambda, \Sigma) = \mathcal{P}^*(\Lambda) \cap Z(V, \Sigma)$ — целочисленные виртуальные многогранники из $\mathcal{P}^*(V, \Sigma)$.

Группы виртуальных многогранников $\mathcal{P}^*(V, \Sigma)$ и $\mathcal{P}^*(\Lambda, \Sigma)$ имеют естественную параметризацию, канонически строящуюся по данным разбиения Σ. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_N \in \Lambda^*$ — целочисленные направляющие вектора ребер разбиения Σ. Очевидно, кусочно-линейная функция $f : V^* \to \mathbb{R}$, линейная в разбиении Σ, однозначно определяется своими „координатами" $z_i = f(l_i)$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Более того, из условия, что Σ — простое целочисленное разбиение, легко вытекает, что для любого набора $(z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{R}^N$ существует кусочно-линейная функция

f, линейная в Σ, такая, что $z_i = f(l_i)$, $1 \leqslant i \leqslant N$, причем соответствующий f виртуальный многогранник обозначим через $\alpha(z_1, \dots, z_N)$ целочисленный тогда и только тогда, когда $z_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Таким образом, имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^N & \hookrightarrow & \mathbb{R}^N \\ {\scriptstyle\alpha(\cdot)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\alpha(\cdot)} \\ Z(\Lambda, \Sigma) & \hookrightarrow & Z(V, \Sigma) \end{array}$$

Опорную функцию виртуального многогранника $\alpha(z_1, \dots, z_N)$ будем обозначать через $f(z_1, \dots, z_N)$, а ее значение на ковекторе $\xi \in V^*$ — через $f(z_1, \dots, z_N, \xi)$ или $f(z, \xi)$ для простоты.

2. Интегралы и суммы по выпуклым цепям.

Определение 1. А) Пусть $h : V \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Ее *интегралом по выпуклой цепи* $\alpha \in Z(V)$ назовем число

$$I_h(\alpha) = \int_V \alpha(x) h(x) dx,$$

где элемент объема dx порожден целочисленной решеткой $\Lambda \subset V$, а интеграл всегда существует в силу компактности носителя α.

Б) Пусть $h : \Lambda \to \mathbb{C}$ — любая функция. Ее (*целочисленной*) *суммой* по цепи $\alpha \in Z(V)$ назовем число

$$S_h(\alpha) = \sum_{x \in \Lambda} \alpha(x) h(x),$$

определенное в силу компактности носителя α, так что сумма имеет лишь конечное число ненулевых слагаемых.

Основной результат настоящей работы — это выяснение связи между отображениями $I_h(\cdot)$ и $S_h(\cdot)$ (очевидно, это — меры на группе выпуклых цепей) для специального класса функций h, ограниченными на подходящие семейства цепей. Точнее, пусть $\beta \in Z(\Lambda, \Sigma)$ и $\alpha(z) \in \mathcal{P}^*(V, \Sigma)$, $(z) = (z_1, \dots, z_N)$, тогда для фиксированной h имеем пару отображений

$$I_h(\beta * \alpha(\cdot)) : \mathbb{R}^N_z \to \mathbb{C},$$
$$S_h(\beta * \alpha(\cdot)) : \mathbb{Z}^N_z \to \mathbb{C}.$$

Мы хотим восстановить второе из этих отображений по первому, когда в качестве $h(x)$ берется многочлен на V. Напомним, что, согласно [1] (следствия 2.4 и 2.5), в этом случае оба этих отображения полиномиальны по (z) степени $\deg h + \dim V$. Задача, таким образом, сводится к тому, чтобы по коэффициентам многочлена $I_h(\beta * \alpha(z))$ найти коэффициенты многочлена $S_h(\beta * \alpha(z))$ или, точнее, построить линейный оператор, переводящий первый многочлен во второй. Такой оператор (оператор Тодда) существует и решает поставленную задачу. Однако для того чтобы это доказать, мы вынуждены рассматривать более широкий класс функций $h(x)$ — квазиполиномы, т.е. линейные комбинации функций вида $P(x)\exp\xi(x)$, где P — полином, $\xi : V \to \mathbb{C}$ — комплексный ковектор, $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$. Действие (комплексного) ковектора ξ на вектор $x \in V$ мы будем записывать $\xi(x)$ или $(\xi \cdot x)$.

3. Оператор Тодда. Пусть $z_1, \ldots, z_N$ — независимые переменные, вещественные или комплексные, $(\partial/\partial z_i)$ — соответствующие операторы дифференцирования.

Определение 2. *Отображением Тодда* мы называем функцию

$$\mathrm{Td}(z) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \quad \text{или} \quad \mathrm{Td}(z) : \mathbb{C}^N - - \to \mathbb{C}$$

вещественно-аналитическую в первом и мероморфную во втором случаях, определяемую равенством $\mathrm{Td}(z) = \prod\limits_{i=1}^{N} \frac{z_i}{1-\exp(-z_i)}$.

Свойства отображения Тодда. (i) Оно симметрично относительно перестановок переменных.

(ii) Пусть $(z'_1, \ldots, z'_M) \subset (z_1, \ldots, z_N)$, $M \leqslant N$ — некоторое подмножество переменных. Ограничение $\mathrm{Td}(z)$ на плоскость переменных (z') есть $\mathrm{Td}(z')$. Это следует из того, что $\mathrm{Td}(0) = 1$.

(iii) Мероморфная функция $\mathrm{Td}(z)$ имеет полюса кратности 1 вдоль гиперплоскостей $z_i = 2\pi\sqrt{-1}m$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. В частности, радиус сходимости степенного ряда $\mathrm{Td}(z)$ в начале координат равен 2π по каждой из переменных z_i, а сам ряд имеет вид

$$\mathrm{Td}(z) = \prod_{k=1}^{N}(1 + \frac{1}{2}z_i + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}z_i^{2k}),$$

где B_k — k-е число Бернулли.

Раскрывая скобки в последней формуле, запишем

$$\mathrm{Td}(z) = \sum_{I \in \mathbb{Z}_+^N} \tau_I z^I \cdot$$

в обычных мультииндексных обозначениях: $I = (i_1, \ldots, i_N), |I| = \sum\limits_{k=1}^{N} i_k$. Злоупотребляя обозначениями, мы будем выписывать это представление для разных N: $\mathrm{Td}(z) = \sum\limits_I \tau_I z^I$ без указания числа N. Это оправдано свойством (ii) и не вызовет недоразумений.

Оператор Тодда в нашем понимании есть результат подстановки операторов дифференцирования $\frac{\partial}{\partial z_i}$ вместо переменных z_i в этом разложении. Функции, к которым мы будем его применять, будут комплекснозначными аналитическими функциями вещественных переменных z_i — ограничениями голоморфных на $D \subset \mathbb{C}^N$ функций на вещественную область $D \cap \mathbb{R}^N$ (координаты фиксированы, вложение $\mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N$ естественное).

Определение 3. Функция $f(z)$ *допускает оператор Тодда* $\mathrm{Td}(\frac{\partial}{\partial z})$, если ряд $\sum\limits_{I\in\mathbb{Z}_+^N} \tau_I \frac{\partial^{|I|}}{\partial z_I} f(z)$ абсолютно сходится на области определения f равномерно на компактных подмножествах к функции $h(z)$, и тогда $h(z) = \mathrm{Td}(\frac{\partial}{\partial z}) f(z)$.

Рассмотрим действие оператора Тодда на некоторые классы функций.

(i) Очевидно, полиномы $P(z)$ допускают оператор Тодда, а его действие комментариев не требует. К сожалению, ограничиться классом полиномов мы не можем — причины станут ясны ниже.

(ii) Пусть p_i, $i = 1, \dots, N$, — комплексные координаты. Легко видеть, что при $|p_i| < 2\pi$ экспонента $\exp \sum\limits_{i=1}^{N} p_i z_i$ допускает оператор Тодда и

$$\mathrm{Td}(\frac{\partial}{\partial z}) \exp \sum_{i=1}^{N} p_i z_i = \mathrm{Td}(p_1, \dots, p_N) \exp \sum_{i=1}^{N} p_i z_i.$$

Более того, нетрудно понять, что ряд, реализующий действие оператора Тодда, сходится равномерно на компактах в $D_{2\pi} = \{(p) | |p_i| < 2\pi\}$.

(iii) Рассмотрим $\exp \sum\limits_{i=1}^{N} p_i z_i$ как функцию (p, z), тогда для любого полинома $P(z)$ имеем, очевидно,

$$P(z) \exp \sum_{i=1}^{N} p_i z_i = P(\frac{\partial}{\partial p_i}) \exp \sum_{i=1}^{N} p_i z_i.$$

Все конкретные вычисления действия оператора Тодда, которые нам понадобятся в дальнейшем, охватываются следующим утверждением.

Лемма 1. *Квазиполином* $P(z) \exp \sum\limits_{i=1}^{N} p_i z_i$ *при* $|p_i| < 2\pi$ *допускает оператор Тодда, а результат его действия таков:*

$$\mathrm{Td}(\frac{\partial}{\partial z}) P(z) \exp \sum_{i=1}^{N} p_i z_i = P(\frac{\partial}{\partial q}) (\mathrm{Td}(q_1, \dots, q_N) \exp \sum_{i=1}^{N} q_i z_i)\big|_{q_i = p_i}.$$

Доказательство. Применим оператор Тодда, используя выписанное выше представление квазиполинома:

$$\mathrm{Td}(\frac{\partial}{\partial z}) P(z) \exp \sum_{i=1}^{N} p_i z_i = \sum_{I} \tau_I \frac{\partial^{|I|}}{\partial z_I} P(\frac{\partial}{\partial p_i}) \exp \sum_{i=1}^{N} p_i z_i =$$
$$= \sum_{I} P(\frac{\partial}{\partial p_i}) (\tau_I p^I \exp \sum_{i=1}^{N} p_i z_i).$$

Поскольку ряд $\sum\limits_I \tau_I p^I \exp \sum\limits_{i=1}^N p_i z_i$ сходится абсолютно и равномерно на компактах по p в $D_{2\pi}$, а его члены голоморфны, то же верно и для всех его производных по p, так что требуемый ряд также сходится абсолютно равномерно на компактах, а оператор $P(\frac{\partial}{\partial p_i})$ можно вынести за знак суммирования и получить ответ, написанный в условии леммы, — функцию, голоморфную по p в $D_{2\pi}$ и по z всюду. Лемма доказана.

4. Основная теорема и ее происхождение. Сформулируем теперь основной результат.

Теорема Римана–Роха для интегралов и сумм квазиполиномов. *В принятых обозначениях для фиксированного простого целочисленного разбиения Σ существует окрестность начала координат $0 \in U \subset V^*$ такая, что для любого квазиполинома*

$$f = \sum_{j \in J} P_j(x) \exp \xi_j(x),$$

где $\xi_j \in U$, $j \in J$, функция

$$I_f(\beta * \alpha(z_1, \dots, z_N)) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$$

допускает оператор Тодда и для $(c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{Z}^N$

$$\operatorname{Td}(\frac{\partial}{\partial z}) I_f(\beta * \alpha(z_1, \dots, z_N))\Big|_{\substack{z_i = c_i, \\ 1 \leqslant i \leqslant N}} = S_f(\beta * \alpha(c_1, \dots, c_N)).$$

Грубо говоря, оператор Тодда преобразует интегрирование квазиполинома (с достаточно маленькими показателями) по выпуклой цепи в его целочисленное суммирование. Для доказательства теоремы необходимы явные формулы для $I_f(\beta * \alpha(z))$ и $S_f(\beta * \alpha(z))$, которые будут получены ниже. Эти формулы представляют и самостоятельный интерес. Другими методами такие формулы получались и раньше (см., например, [3]). Но поразительная связь между интегрированием и целочисленным суммированием до сих пор не была известна.

Объясним кратко алгебро-геометрическое происхождение нашей теоремы (а заодно и ее название). Хорошо известно [4,5], что с каждым простым целочисленным разбиением Σ пространства V^* естественно связано гладкое торическое многообразие X_Σ (элементам решетки Λ^* соответствуют однопараметрические подгруппы тора $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$, элементам решетки Λ — его характеры). Для виртуального многогранника $\alpha \in \mathcal{P}^*(\Lambda, \Sigma)$ обозначим соответствующий ему обратимый пучок через $\mathcal{F}(\alpha)$. Имеем (см. [5]):

$$\chi(X, \mathcal{F}(\alpha)) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F}(\alpha)) = S_{\mathbb{1}}(\alpha),$$

где $\mathbb{I} : V \to \mathbb{R}$ — постоянная функция, т.е. эйлерова характеристика пучка есть „число целых точек“ соответствующего ему виртуального многогранника. Согласно обычной алгебро-геометрической теореме Римана–Роха [6,7],

$$\chi(X, \mathcal{F}(\alpha)) = \deg(\operatorname{ch}(\mathcal{F}(\alpha)) \cdot \operatorname{td}(\mathcal{T}_X))_n,$$

где $\operatorname{ch}(\mathcal{F}(\alpha)) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} c_1^i(\mathcal{F}(\alpha))$ — экспоненциальный характер Чженя обратимого пучка $\mathcal{F}(\alpha)$, а $\operatorname{td}(\mathcal{T}_X)$ — класс Тодда касательного пучка многообразия X.

Способ вычисления числа целых точек многогранника через теорему Римана–Роха был предложен в [5]; таким путем в упомянутой работе были доказаны полиномиальность числа целых точек многогранника nA относительно $n \in \mathbb{Z}_+$ и соответствующий частный случай теоремы двойственности Эрхарта (см. теоремы 1.1 и 1.2 в [1]); теорема двойственности вытекала из алгебро-геометрической теоремы двойственности Серра. Сейчас, однако, мы можем сказать гораздо больше. Пусть $v : \mathbb{R}_z^N \to \mathbb{R}$ функция объема виртуального многогранника,

$$v(z_1, \ldots, z_N) = I_{\mathbb{I}}(\alpha(z_1, \ldots, z_N)) = \int_V \alpha(z, x)\, dx$$

(относительно элемента объема, определяемого решеткой $\Lambda \subset V$). Очевидно, $v(z)$ — полином степени $\dim V$. Пусть $J_v \subset \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_N]$ — идеал, состоящий из многочленов $p(x_1, \ldots, x_N)$ таких, что $p(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_N}) v(z_1, \ldots, z_N) = 0$. Имеет место

Теорема. *Кольцо Чжоу $A(X) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{i=0}^{n} A^i(X) \otimes \mathbb{Q}$ алгебраических циклов на многообразии X по модулю численной эквивалентности, градуированное коразмерностью циклов, изоморфно как градуированная алгебра кольцу $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_N]/J_v$.*

Можно показать далее, что класс Чженя обратимого пучка $\mathcal{F}(\alpha)$, где $\alpha = \alpha(b_1, \ldots, b_N)$, представлен в $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_N]/J_v$ многочленом $\sum_{i=1}^{N} b_i x_i$, а соответствующий экспоненциальный характер Чженя – оборванным рядом для функции $\exp(\sum_{i=1}^{N} b_i x_i)$, наконец, класс Тодда касательного расслоения $\mathcal{T}_X$ представлен оборванным рядом функции

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{x_i}{1 - \exp(-x_i)}.$$

Отсюда уже несложно вывести, что

$$S_{\mathbb{I}}(\alpha) = \chi(X, \mathcal{F}(\alpha)) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\frac{\partial}{\partial z_i}}{1 - \exp(-\frac{\partial}{\partial z_i})} v(z_1, \ldots, z_N)\Big|_{z_i = b_i},$$

т.е. частный случай (для $f = \mathbb{I}$) нашей теоремы Римана–Роха (поскольку $v(z) = I_{\mathbb{I}}(\alpha(z_1, \ldots, z_N))$). Подробное изложение этих рассуждений и фактов будет опубликовано в другом месте.

5. План доказательства теоремы Римана–Роха. Идея доказательства теоремы Римана–Роха, предлагаемого ниже (ему посвящена вся оставшаяся часть работы), состоит в следующем. В предыдущей статье [1] было показано (предложение 4.2), что выпуклая цепь может быть восстановлена по ее опорной функции как линейная комбинация характеристических функций конусов, причем в качестве конусов можно взять сдвиги двойственных к конусам разбиения Σ. При изменении $z_1, \ldots, z_N$ сама цепь $\beta * \alpha(z)$ меняется сложным образом, но движение каждого из конусов есть просто его параллельный перенос, причем вектор переноса линейно зависит от координат (z). Если интеграл (сумма) квазиполинома по конкретному простому конусу существует (благодаря экспоненте), то для этого отдельного конуса и квазиполинома теорема Римана–Роха (т.е. связь суммы с интегралом) формулируется и доказывается без труда (этому посвящен § 2).

Для того чтобы „склеить“ эти факты в нашу теорему Римана–Роха, необходимо уметь так раскладывать выпуклую цепь в линейную комбинацию конусов, чтобы квазиполином с данным показателем $\xi \in V^*$ в экспоненте мог бы быть проинтегрирован по каждому из них. Цель достигается с помощью техники конических представлений выпуклых цепей, развиваемой в § 3. Прообразом нашей техники является известная конструкция А.Н.Варченко и И.М.Гельфанда [8].

Наконец, соединяя результаты § 2 и 3 в § 4, мы показываем, что интеграл (сумма) квазиполинома по подходящим конусам продолжается до мероморфнозначной меры на множестве конических цепей. Это позволяет работать так, как если бы можно было интегрировать (суммировать) любой квазиполином по любому конусу, не боясь расходимостей. Отсюда легко выписываются достаточно явные формулы для интеграла и суммы квазиполинома по выпуклой цепи и (независимо от этих формул) доказывается теорема Римана–Роха (§ 5).

Из этого поверхностного описания уже видно, почему мы не можем ограничиться рассмотрением сумм и интегралов полиномов по выпуклым цепям — для конуса их не существует, необходима экспонента, обеспечивающая сходимость.

§ 2. Теорема Римана–Роха для простого конуса

1. Универсальная экспонента. Пусть $V^*_{\mathbb{C}} = V^* \otimes \mathbb{C} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$ — комплексификация пространства V^*, $V^* = V^* \otimes 1 \hookrightarrow V^*_{\mathbb{C}}$ — естественное вложение вещественных пространств, так что над $\mathbb{R}$ имеем $V^*_{\mathbb{C}} = V^* \otimes 1 \oplus V^* \otimes \sqrt{-1}$ и соответственно для $\xi \in V^*_{\mathbb{C}}$ имеем каноническое разложение $\xi = \mathbb{R}e\xi + \sqrt{-1}\mathrm{Im}\xi$. Всякий раз, когда появляется координатная запись, подразумевается, что на V задана система координат $x_1, \ldots, x_n \in V^*$, относительно которой дискретная решетка $\Lambda \subset V$ реализуется как стандартная целочисленная решетка (такие системы координат мы называем целочисленными), а на V^* — система двойственных координат $\xi_1, \ldots, \xi_n \in V$, $(\xi_i \cdot x_j) = \delta_{ij}$, причем ξ_i естественно распространяются на $V^*_{\mathbb{C}}$ как комплексные координаты,

$$\xi_i(\mathbb{R}el + \sqrt{-1}\mathrm{Im}l) = \xi_i(\mathbb{R}el) + \sqrt{-1}\xi_i(\mathrm{Im}l).$$

Универсальной экспонентой мы называем функцию

$$\exp : V \times V_{\mathbb{C}}^* \to \mathbb{C}, \exp : (x, \xi) \mapsto \exp \xi(x).$$

Очевидно, универсальная экспонента аналитична по (x, ξ) и, в частности, голоморфна как функция комплексных переменных ξ_i.

2. Формулировка теоремы. Зафиксируем пару (C, C^*) двойственных друг другу простых целочисленных конусов в V и V^* соответственно, с вершинами в начале координат (легко показать, что если один из конусов — C или C^* — простой целочисленный, то и другой такой же).

Определение 1. Конус $G \subset V$ *приведен относительно ковектора* $\xi \in V^* \setminus \{0\}$, если он остроконечный и функция $\xi|_G$ достигает своего максимума ровно в одной точке — вершине конуса.

Для данного остроконечного конуса G обозначим через U_G (очевидно, открытое) множество комплексных ковекторов ξ таких, что G приведен относительно $\mathbb{R}e\xi$. Обозначим также через $G(x)$ сдвиг конуса G на вектор $x \in V$, определим следующие функции:

$$i : V \times U_C \to \mathbb{C}, \quad i : (x, \xi) \mapsto \int\limits_{C(x)} \exp \xi(y) dy,$$

$$s : V \times U_C \to \mathbb{C}, \quad s : (x, \xi) \mapsto \sum_{y \in \Lambda \cap C(x)} \exp \xi(y)$$

(очевидно, интегралы и ряды сходятся в силу приведенности). Далее, пусть $P : V \to \mathbb{C}$ — полиномиальная функция. Положим

$$i(P, x, \xi) = \int\limits_{C(x)} P(y) \exp \xi(y) dy, s(P, x, \xi) = \sum_{y \in \Lambda \cap C(x)} P(y) \exp \xi(y)$$

для $\xi \in U_C$ так, что, в частности, $i(\mathbb{1}, x, \xi) = i(x, \xi)$ и $s(\mathbb{1}, x, \xi) = s(x, \xi)$. Заметим, что естественное отождествление $V_{\mathbb{C}}^*$ с комплексифицированным касательным пространством $T_\xi V^* \otimes \mathbb{C}$ в любом ковекторе ξ позволяет интерпретировать полином P как линейный дифференциальный оператор на $V_{\mathbb{C}}^*$ с постоянными коэффициентами. Точнее, пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — пара двойственных целочисленных координат на V и $V^* \subset V_{\mathbb{C}}^*$, тогда полиному $P(x) = \sum\limits_{|I| \leqslant K} a_I x^I$ соответствует линейный дифференциальный оператор

$$P(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}) = \sum_{|I| \leqslant K} a_I \frac{\partial^{|I|}}{\partial \xi_I}$$

в обычных мультииндексных обозначениях. Имеем, очевидно,

$$P(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}) \exp(\xi \cdot x) = P(x_1, \ldots, x_n) \exp(\xi \cdot x),$$

т.е., как и в п.1.3, мы интерпретируем квазиполином на V как результат применения линейного дифференциального оператора к универсальной экспоненте.

Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — направляющие вектора ребер конуса C.

Предложение 1. А) *Для любого $x \in V$ функция $i(x,\xi) : U_C \to \mathbb{C}$ продолжается до мероморфной на $V^*_{\mathbb{C}}$ функции*

$$\xi \mapsto \left(\prod_{k=1}^{n} -\xi(v_k)\right)^{-1} \exp \xi(x)$$

с полюсами в наборе n гиперплоскостей $\xi(v_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$, эту функцию мы обозначим также $i(x,\xi)$. Вне этого набора гиперплоскостей для любого полинома $P : V \to \mathbb{C}$ функция $i(P,x,\xi)$ продолжается до голоморфной (и мероморфной на $V^*_{\mathbb{C}}$) функции $P(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}) i(x,\xi)$, которую мы также обозначим через $i(P,x,\xi)$.

Б) *Для любого $x \in \Lambda$ функция $s(x,\xi) : U_C \to \mathbb{C}$ продолжается до мероморфной на $V^*_{\mathbb{C}}$ функции*

$$\xi \mapsto \prod_{k=1}^{n} (1 - \exp \xi(v_k))^{-1} \exp \xi(x)$$

с полюсами вдоль гиперплоскостей $\xi(v_k) = 2\pi\sqrt{-1}m$, $m \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, эту функцию мы обозначим тем же символом $s(x,\xi)$. Вне этих гиперплоскостей для любого полинома $P : V \to \mathbb{C}$ функция $s(P,x,\xi)$ продолжается до голоморфной, мероморфной на $V^*_{\mathbb{C}}$ функции

$$P\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right) s(x,\xi),$$

которую мы также обозначим через $s(P,x,\xi)$.

Доказательство. Мы рассмотрим часть А) — часть Б) полностью аналогична ей. Вычисления становятся совсем тривиальными в подходящей системе координат. Построим ее.

С парой (C, C^*) двойственных простых целочисленных конусов естественно связана пара двойственных систем целочисленных координат (x_i), (ξ_i) на V и V^*, единственная с точностью до перестановки координатных функций. А именно, она однозначно определяется условиями: ребра C^* имеют в качестве направляющих векторов вектора $(\xi_j = \delta_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$, т.е. координатные орты (иными словами, $\xi_i = -v_i \in V = V^{**}$), а ребра C — векторы $(x_j = -\delta_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$ (иными словами, координатные функции $x_i \in V^*$ — это в точности направляющие вектора конуса C^*; между ребрами конусов C и C^* существует естественное взаимно-однозначное соответствие, как и между координатами x_j и ξ_j). В координатах (x), (ξ) Λ и Λ^* есть $\mathbb{Z}^n$, $C = \{(x_j) | x_j \leqslant 0\}$ и $C^* = \{(\xi_j) | \xi_j \geqslant 0\}$. В этих координатах имеем для $\xi \in U_C (\mathbb{R}e \xi \in \mathrm{Int} C^*)$

$$i(x,\xi) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \exp \sum_{i=1}^{n} \xi_i y_i dy_1 \ldots dy_n = \frac{1}{\xi_1 \ldots \xi_n} \exp \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i,$$

причем интеграл сходится равномерно на компактах в $U_C \subset V^*_{\mathbb{C}}$, а подынтегральная функция голоморфна по ξ. Остальные утверждения теперь очевидны. Предложение доказано.

Отметим попутно важное свойство введенных мероморфных функций. Положим $i_+(x,\xi) = i(x,\xi)$, $i_+(P,x,\xi) = i(P,x,\xi)$, $i_-(x,\xi)$ и $i_-(P,x,\xi)$ — интегралы универсальной экспоненты и квазиполинома по сдвинутому на вектор x конусу C_-, натянутому на векторы $-v_1$, $v_2,\dots,v_n$, так что $C \cup C_-$ — развернутый конус с вершинным пространством — прямой $\langle v_1\rangle$. Положим C_0 — простой целочисленный конус в $\langle v_2,\dots,v_n\rangle$, натянутый на $v_2,\dots,v_n$, и $s_+(x,\xi) = s(x,\xi)$, $s_+(P,x,\xi) = s(P,x,\xi)$, $s_-(x,\xi)$ и $s_0(x,\xi)$ — мероморфные функции на $V^*_{\mathbb{C}}$, продолжающие функции

$$s_-(x,\xi) : \Lambda \times U_{C_-} \to \mathbb{C}, s_-(x,\xi) = \sum_{y\in C_-(x)\cap\Lambda} \exp\xi(y),$$

$$s_0(x,\xi) : \Lambda \times U_{C_0} \to \mathbb{C}, s_0(x,\xi) = \sum_{y\in C_0(x)\cap\Lambda} \exp\xi(y),$$

и аналогично для квазиполинома определим $s_-(P,x,\xi)$ и $s_0(P,x,\xi)$.

Предложение 2. *Имеют место соотношения для любого $P : V \to \mathbb{C}$*

$$i_+(P,x,\xi) + i_-(P,x,\xi) = 0, \quad s_+(P,x,\xi) + s_-(P,x,\xi) = s_0(P,x,\xi).$$

Доказательство. Проверка этих соотношений для $P \equiv 1$ — элементарное вычисление. Применение предложения 1 завершает доказательство.

Пусть (x_j), (ξ_j) — естественно связанные с конусами C, C^* системы координат, введенные при доказательстве предложения. Определим оператор Тодда конуса C как оператор $\mathrm{Td}_C = \mathrm{Td}(\frac{\partial}{\partial x_j})$.

Теорема 1 (теорема Римана–Роха для простого конуса). *Для любого полинома $P(x)$ и любого ковектора $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in (\mathbb{C}\setminus\{0\})^n$ такого, что $|\xi_i| < 2\pi$ (т.е. $0 \neq |\xi(v_i)| < 2\pi$) функция $i(P,x_1,\dots,x_n,\xi)$ — допускает оператор Тодда Td_C, причем при $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{Z}^n$ имеем*

$$\mathrm{Td}_C\, i(P,y_1,\dots,y_n,\xi)|_{y_i=x_i} = s(P,x_1,\dots,x_n,\xi),$$

причем ряд, реализующий оператор Тодда, сходится по ξ равномерно на компактах в области $0 \neq |\xi_i| < 2\pi$, $i = 1,\dots,n$.

3. Доказательство теоремы Римана–Роха. Прежде чем доказывать теорему 1, что совсем несложно, мы приведем некоторое рассуждение (по-видимому, аналогичное тому, с помощью которого Эйлер и Маклорен пришли к своей формуле), ничего не доказывающее, но достаточно прозрачно объясняющее на уровне интуиции, почему происходит это удивительное преобразование интеграла в сумму. Наши выкладки чисто формальны. Пусть $f : V \to \mathbb{C}$ —

функция, $F : V \to \mathbb{C}$ — ее „неопределенный интеграл“ по конусу $C(x)$ (координаты $(x), (\xi)$ — такие, как в условии теоремы): $F(x) = \int\limits_{C(x)} f(y)dy$. Очевидно, $\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} F(x) = f(x)$. Применим к $F(x)$ оператор Тодда Td_C следующим образом:

$$\mathrm{Td}_C\, F(x) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \exp(-\frac{\partial}{\partial x_i}))^{-1} (\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}) F(x),$$

а оператор $(1 - \exp(-\frac{\partial}{\partial x_i}))^{-1}$ рассмотрим (формально!) как сумму бесконечного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \exp(-k \frac{\partial}{\partial x_i})$. Но оператор $\exp(a \frac{\partial}{\partial z})$ можно интерпретировать (формула Тейлора) как оператор сдвига на a, откуда

$$\mathrm{Td}_C\, F(x) = \sum_{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n} f(x_1 - k_1, \ldots, x_n - k_n),$$

т.е. в точности то, что нужно!

Перейдем к строгому доказательству теоремы Римана–Роха. Оно совсем несложно и получается комбинацией явных формул предложения 1 и рассуждений п.1.3. Для универсальной экспоненты

$$i(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n) = \frac{1}{\xi_1 \ldots \xi_n} \exp \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i,$$

$$s(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n) = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1 - \exp(-\xi_i))} \exp \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i,$$

откуда и следует теорема. Общий случай произвольного P следует из леммы 1.1 и ее доказательства. Теорема полностью доказана.

§ 3. Конические представления выпуклых цепей

1. Определение группы конических цепей. Пусть (V, Λ) — допустимая пара [1] (т.е. существует изоморфизм $V \underset{\sim}{\to} \mathbb{R}^n$, относительно которого Λ есть или $\mathbb{Z}^n$, или F^n, где $F \subset \mathbb{R}$ — подполе). Все определения п. 1.1 имеют смысл в этом общем случае, так что именно общий случай и будет рассматриваться в данном параграфе. К определениям и обозначениям п. 1.1 добавим следующие новые понятия и символы.

(1) Множество всех Λ-конусов обозначим через $C(\Lambda)$. В частности, множество всех конусов обозначается через $C(V)$.

(2) Множество всех Λ-конусов $C \in C(\Lambda)$ таких, что $x \in vs(C)$, обозначим через $C(\Lambda, x)$.

(3) Множество всех развернутых Λ-конусов обозначим $\tilde{C}(\Lambda)$.

(4) Положим $\tilde{C}(\Lambda, x) = C(\Lambda, x) \cap \tilde{C}(\Lambda)$.

(5) *Коническая цепь* (Λ-*цепь*) есть $\mathbb{Z}$-значная функция

$$\alpha : V \to \mathbb{Z},$$

имеющая представление вида $\alpha = \sum_{i \in I} n_i \mathbb{I}_{C_i}$, где $\#I < \infty$, $C_i \in C(V)$ (соответственно $C(\Lambda)$), $n_i \in \mathbb{Z}, \mathbb{I}_\bullet$ — индикатор множества $\bullet$. Аддитивную группу конических цепей (Λ-цепей) обозначим $ZC(V)$ (соответственно $ZC(\Lambda)$).

(6) Коническая цепь $\alpha \in ZC(V)$ *развернутая*, если она имеет представление

$$\alpha = \sum_{i \in I} n_i \mathbb{I}_{C_i},$$

где $C_i \in \tilde{C}(V)$ — развернутые конусы. Подгруппу развернутых конических цепей обозначим через $\widetilde{ZC}(V)$ (соответственно определяется $\widetilde{ZC}(\Lambda)$).

(7) Коническая цепь $\alpha \in \widetilde{ZC}(V)$ *развернута в точке* $x \in V$, если существуют развернутая цепь $\beta \in ZC(V)$ и окрестность $U \ni x$ такие, что $\alpha|_U = \beta|_U$.

(8) Точка $x \in V$ есть *вершина* цепи $\alpha \in ZC(V)$, если α не развернута в x.

(9) Для $x \in \Lambda$ положим

$$ZC(\Lambda, x) = \{\alpha = \sum_{i \in I} n_i \mathbb{I}_{C_i} | C_i \in C(\Lambda, x), i \in I\},$$
$$\widetilde{ZC}(\Lambda, x) = \{\alpha \in ZC(\Lambda, x) | \alpha \quad \text{развернута в} \quad x\}.$$

(10) Ненулевой ковектор $\xi \in V^* \setminus \{0\}$ *находится в общем положении* с конусом $C \in C(V, x) \setminus \tilde{C}(V, x)$, если гиперплоскость $H_{\xi,x} = \{y \in V | \xi(y) = \xi(x)\}$ не содержит ребер конуса C. Ковектор ξ находится в общем положении с конусом $C \in \tilde{C}(V, x)$, если $H_{\xi,x} \not\supset vs(C)$. Ковектор ξ находится в общем положении с цепью $\alpha \in ZC(V, x)$, если существует такое представление $\alpha = \sum_{i \in I} n_i \mathbb{I}_{C_i}$, что $C_i \in C(V, x)$, и ξ находится в общем положении с $C_i, i \in I$. Наконец, для произвольной конической цепи $\alpha \in ZC(V)$ и точки $x \in V$ положим $\{\alpha\}_x \in ZC(V, x)$ — такая цепь, что в некоторой окрестности $U \ni x$ $\{\alpha\}_x|_U = \alpha|_U$ (с этим условием $\{\alpha\}_x$ определена однозначно). Ковектор ξ находится в общем положении с конической цепью $\alpha \in ZC(V)$, если для любой точки $x \in V$ ξ находится в общем положении с $\{\alpha\}_x$.

Замечание. Для краткости письма мы будем рассматривать, как правило, случай $\Lambda = V$. Все рассуждения и утверждения автоматически переносятся на общий случай с очевидной переменой формулировок и обозначений.

Предложение 1. *А) Множество вершин конической цепи конечно.*

Б) Цепь, развернутая в каждой точке, развернута.

Доказательство. А) очевидно. Установим Б). Пусть $\alpha = \sum_{i \in I} n_i \mathbb{I}_{C_i}$. Зафиксируем это представление. Для $x \in V$ положим $I(x) = \{i \in I | vs(C_i) = x\}$. Если

$I(x)=\varnothing$ для всех $x\in V$, то все конусы C_i развернутые, и доказывать нечего. В противном случае существует конечное множество точек $x_1,\ldots,x_K\in V$ таких, что $I(x_k)\neq\varnothing$, $1\leqslant k\leqslant K$. Очевидно, $I(x_a)\cap I(x_b)=\varnothing$ для $a\neq b$. Поскольку α развернута в каждой точке, имеем для каждого $k, 1\leqslant k\leqslant K$,

$$\sum_{i\in I(x_k)} n_i \mathbb{I}_{C_i} = \sum_{j\in N_k} m_{kj}\mathbb{I}_{D_{kj}},$$

$m_{kj}\in\mathbb{Z}$, $D_{kj}\in\tilde{C}(V,x)$. Справа стоит развернутая цепь. Полагая $I'=I\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{K} I(x_k)$, получим

$$\alpha=\sum_{i\in I'} n_i\mathbb{I}_{C_i}+\sum_{k=1}^{K}\sum_{j\in N_k} m_{kj}\mathbb{I}_{D_{kj}},$$

т.е. α — развернутая цепь, что и требовалось.

2. Цепи, приведенные относительно ковектора.

Теорема 1. *Пусть $\alpha\in ZC(V,x)$ — коническая цепь, $\xi\in V^*\setminus\{0\}$ — ковектор, ξ и α находятся в общем положении. Тогда существует и единственна цепь $T(\alpha,\xi)$ со следующими свойствами:*

(i) $T(\alpha,\xi)=\sum\limits_{i\in I} n_i\mathbb{I}_{C_i}$, $C_i\in C(V,x)\setminus\widetilde{C}(V,x)$.

(ii) $\xi|_{C_i}\leqslant\xi(x)$ *и* $H_{\xi,x}\cap C_i=\{x\}$ *для всех* $i\in I$.

В частности, ξ находится в общем положении с $C_i, i\in I$.

(iii) $\alpha-T(\alpha,\xi)\in\widetilde{ZC}(V,x)$.

(И формулировка, и нижеследующее доказательство без изменений переносятся на случай Λ-цепей.)

Доказательство. Существование. Очевидно, достаточно установить существование $T(\alpha,\xi)$ для цепи вида $\alpha=\mathbb{I}_C$, где $C\in C(V,x)\setminus\tilde{C}(V,x)$ — простой (остроконечный) конус, причем ξ находится с ним в общем положении. Пусть $R_1,\ldots,R_K$ — ребра конуса C. Если $\xi|_{R_i}\leqslant\xi(x)$ для всех $k=1,\ldots,K$, то доказывать нечего. В противном случае пусть, например, $\xi|_{R_1}\geqslant\xi(x)$. Положим $\bar{R}_1$ — луч с вершиной x, противоположный лучу R_1. Положим также C_1 — выпуклая оболочка лучей $\bar{R}_1,R_2,\ldots,R_K$, C_1' — выпуклая оболочка лучей $R_2,\ldots,R_K$. Очевидно, что $\mathbb{I}_{C_1}+\mathbb{I}_C-\mathbb{I}_{C_1'}$ есть характеристическая функция развернутого конуса $C_1\cup C$, вершинное пространство которого — прямая $R_1\cup\bar{R}_1$. Но у конусов C_1 и C_1' число ребер, на которых $\xi\geqslant\xi(x)$, меньше, чем у C. Действуя таким образом, через конечное ($\leqslant\dim V$) число шагов получим цепь требуемого вида.

Единственность. Это менее тривиальный факт. Мы приведем наиболее прозрачное доказательство. Очевидно, достаточно установить следующий факт: пусть $\alpha\in\widetilde{ZC}(V,x)$ — развернутая цепь, находящаяся с ковектором $\xi\in V^*\setminus\{0\}$ в общем положении. Пусть

$$V_{\xi,\pm}=\{y\in V\,|\,\pm\xi(y)>\xi(x)\}$$

— полупространства, на которые $H_{\xi,x}$ разбивает V. Тогда если $\alpha|_{V_{\xi,+}} \equiv 0$, то и $\alpha|_{V_{\xi,-}} \equiv 0$. Это утверждение мы и будем доказывать.

Запишем $\alpha = \sum_{i\in I} n_i \mathbb{1}_{C_i}$, где $C_i \in \tilde{C}(V,x)$ — развернутые конусы, причем гиперплоскость $H_{\xi,x}$ не содержит их вершинных пространств. Положим $H_\pm = \{y \in V | \xi(y) = \xi(x) \pm 1\}$ — параллельные $H_{\xi,x}$ гиперплоскости „над“ и „под“ ней соответственно.

Пусть W — линейное пространство размерности $\dim H_{\xi,x}$, $V \ni v \neq 0$ — вектор такой, что $\xi(v) = 1$. Зафиксируем изоморфизм аффинных пространств $\varphi : W \to H_{\xi,x}$, $\varphi(0) = x$ и положим $\varphi_\pm : W \to H_\pm$, $\varphi_\pm : w \mapsto \varphi(w) \pm v$. Рассмотрим конические цепи на W:

$$\alpha_\pm = \varphi_\pm^*(\alpha|_{H_\pm}) \in ZC(W).$$

Мы знаем, что $\alpha_+ \equiv 0$. Докажем, что $\alpha_- \equiv 0$: очевидно, это завершит доказательство теоремы.

Определим на конусах $C \in C(W)$ операцию θ следующим образом: $\theta(C)$ есть сдвиг конуса C на вектор $(-2v)$, $\theta(C) = -2v + C$, где $v \in vs(C)$ — любой вектор из вершинного пространства конуса C.

Лемма 1. *Пусть числа* $n_i \in \mathbb{Z}$ *и конуса* $D_i \in C(W)$, $i \in I$, *таковы, что* $\sum_{i\in I} m_i \mathbb{1}_{D_i} \equiv 0$. *Тогда* $\sum_{i\in I} m_i \mathbb{1}_{\theta(D_i)} \equiv 0$.

Окончание доказательства теоремы. Выше мы записали $\alpha = \sum_{i\in I} n_i \mathbb{1}_{C_i}$, $C_i \in \tilde{C}(V,x)$, $vs(C_i) \not\subset H_{\xi,x}$. Положим $D_i^\pm = \varphi_\pm^{-1}(C_i \cap H_\pm)$, так что имеет место представление

$$\alpha_\pm = \sum_{i\in I} n_i \mathbb{1}_{D_i^\pm}.$$

Нетрудно убедиться, что $D_i^- = \theta(D_i^+)$, так что в силу леммы 1 получаем $\alpha_- \equiv 0$, что и требовалось.

Доказательство леммы 1. Мы будем доказывать ее убывающей индукцией по $M = \min\{\dim vs(D_i) | i \in I\}$. Если $M = \dim W$, то все $D_i = W$, $\theta(D_i) = W$ и лемма очевидна. Пусть лемма доказана для $M \geqslant m+1$. Установим ее для $M = m \geqslant 0$.

Для аффинного подпространства $L \subset W$ размерности m положим $I(L) = \{i \in I | L = vs(D_i)\}$. Очевидно, существует конечное множество $L_1, \ldots, L_K$ m-мерных аффинных плоскостей таких, что $I(L_k) \neq \varnothing$, $1 \leqslant k \leqslant K$. Понятно, что $I(L_a) \cap I(L_b) = \varnothing$ для $a \neq b$. Положим

$$I' = I \setminus \bigcup_{k=1}^{K} I(L_k).$$

Теперь I разбивается на $K+1$ непересекающихся подмножеств $I(L_1), \ldots, I(L_K)$, I'. Заметим, что для любого $D \in C(W)$ $vs(\theta(D)) = -vs(D)$. По условию

$\sum\limits_{i\in I} m_i 1\!\!1_{D_i} \equiv 0$. Отсюда следует, что для любого $k, 1 \leqslant k \leqslant K$, существует представление вида

$$\sum_{i\in I(L_k)} m_i 1\!\!1_{D_i} = \sum_{j\in N_k} m_{kj} 1\!\!1_{G_{kj}},$$

где $\dim vs(G_{kj}) \geqslant m+1$, $L_k \subset vs(G_{kj})$. Таким образом,

$$\sum_{i\in I'} m_i 1\!\!1_{D_i} + \sum_{k=1}^{K} \sum_{j\in N_k} m_{kj} 1\!\!1_{G_{kj}} \equiv 0.$$

Но нетрудно проверить, что

$$\sum_{i\in I(L_k)} m_i 1\!\!1_{\theta(D_i)} = \sum_{j\in N_k} m_{kj} 1\!\!1_{\theta(G_{kj})},$$

ибо если $v_k \in L_k$ — произвольный вектор, то для $i \in I(L_k)$ и $j \in N_k$ имеем $\theta(D_i) = (-2v_k) + D_i$, $\theta(G_{kj}) = (-2v_k) + G_{kj}$, т.е. все конусы, участвующие в преобразовании цепи „вокруг“ L_k, сдвигаются на один и тот же вектор. В силу сказанного имеем

$$\sum_{i\in I} m_i 1\!\!1_{\theta(D_i)} = \sum_{i\in I'} m_i 1\!\!1_{\theta(D_i)} + \sum_{k=1}^{K} \sum_{i\in I(L_k)} m_i 1\!\!1_{\theta(D_i)} =$$
$$= \sum_{i\in I'} m_i 1\!\!1_{\theta(D_i)} + \sum_{k=1}^{K} \sum_{j\in N_k} m_{kj} 1\!\!1_{\theta(G_{kj})}.$$

Но последняя цепь равна нулю по предположению индукции. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если ненулевая коническая цепь $\alpha \in ZC(V)$ имеет компактный носитель, т.е. $\alpha \in Z(V)$, то она имеет хотя бы одну вершину.*

Доказательство несложно и оставляется читателю.

Определение 2. (i) Цепь $\alpha \in ZC(V, x)$ *приведена относительно ковектора* $\xi \in V^* \setminus \{0\}$, если ξ и α находятся в общем положении и $\alpha = T(\alpha, \xi)$.

(ii) Пусть $\alpha \in ZC(V)$ — коническая цепь. *Приведенным представлением* цепи α относительно ковектора $\xi \in V^* \setminus \{0\}$ назовем набор цепей $\{\alpha_{x_i} \in ZC(V, x_i) | i \in I\}$ такой, что

(1) α_{x_i} приведена относительно ξ для каждого $i \in I$;

(2) $\alpha - \sum\limits_{i\in I} \alpha_{x_i}$ всюду развернута (и тем самым развернута).

Предложение 2. А) *Приведенное представление цепи $\alpha \in ZC(V)$ относительно общего ковектора $\xi \in V^* \setminus \{0\}$ существует и единственно.*

Б) *Пусть цепь $\alpha \in ZC(V)$ имеет компактный носитель ($\alpha \in Z(V)$) и $\{\alpha_{x_i} \in ZC(V, x_i) | i \in I\}$ — ее приведенное представление относительно ковектора ξ. Тогда $\alpha = \sum\limits_{i \in I} \alpha_{x_i}$.*

Доказательство. А) очевидно в силу теоремы 1. Установим Б). Нетрудно проверить: для ковекторов $\eta \in V^*$, достаточно близких к ξ, $\{\alpha_{x_i} | i \in I\}$ будет приведенным представлением α и относительно η. Рассмотрим цепь $\beta = \alpha - \sum\limits_{i \in I} \alpha_{x_i}$. В силу сделанного замечания можно считать, что эта цепь находится в общем положении с ковектором ξ. С другой стороны, она развернута. Наконец, в силу компактности носителя α и приведенности цепей α_{x_i} имеем: для $C \gg 0$ $\beta|_{\{z \in V | \xi(z) \geqslant C\}} \equiv 0$. Предположим, что $\beta \equiv 0$. Пусть $\lambda \doteq \sup\{\xi(z) | \beta(z) \neq 0\}$ и $x \in \operatorname{Supp} \beta \cap \{z \in V | \xi(z) = \lambda\}$. Тогда имеем: $\{\beta\}_x$ — развернутая цепь, находящаяся в общем положении с ξ и равная нулю над гиперплоскостью $\{\xi(z) = \lambda\}$. Согласно теореме 1, $\{\beta\}_x \equiv 0$, т.е. $\beta \equiv 0$ в некоторой окрестности точки x. Противоречие. Предложение доказано.

Определение 3. Цепь $\alpha \in ZC(V)$ *приведена относительно ковектора* $\xi \in V^* \setminus \{0\}$, если $\alpha = \sum\limits_{i \in I} \alpha_{x_i}$, где $\{\alpha_{x_i} | i \in I\}$ — приведенное представление цепи α относительно ξ. Цепь α назовем *остроконечной*, если она приведена относительно некоторого ковектора.

3. Критерий компактности конической цепи.

Определение 4. Пусть цепь $\alpha \in ZC(V, x)$ приведена относительно ковектора $\xi \in V^* \setminus \{0\}$. Луч R с вершиной x, смотрящий строго „вниз“ от гиперплоскости $H_{\xi, x}$, назовем *ребром* цепи α, если для гиперплоскости $H_- = \{z | \xi(z) = \xi(x) - 1\}$ имеем: точка $R \cap H_-$ есть вершина цепи $\alpha|_{H_-} \in ZC(H_-)$.

Предложение 3 (критерий компактности носителя). *Пусть $\alpha_i \in ZC(V, x_i)$, $i \in I$, — конические цепи, приведенные относительно ковектора $\xi \in V^* \setminus \{0\}$. Для любой аффинной прямой $L \subset V$ положим*

$$I(L) = \{i \in I | x_i \in L \quad \text{и} \quad \alpha_i \quad \text{имеет ребро} \quad R_{i,L} \subset L\}.$$

Цепь $\alpha = \sum\limits_{i \in I} \alpha_i$ имеет компактный носитель (т.е. является выпуклой цепью) тогда и только тогда, когда для всех аффинных прямых $L \subset V$ таких, что $I(L) \neq \varnothing$, выполнено условие: цепь $\sum\limits_{i \in I(L)} \tau_{-x_i} \alpha_i \in ZC(V, 0)$ (где $\tau_h \alpha(x) = \alpha(x - h)$) не имеет ребра, лежащего на прямой L, сдвинутой в 0.

Доказательство несложно и оставляется читателю.

4. В заключение данного параграфа рассмотрим вопрос о явном восстановлении выпуклой цепи с точностью до $\widetilde{ZC}(V)$ по ее опорной функции — в том виде, в каком это нам понадобится для завершения доказательства теоремы

Римана–Роха. Пусть $\Sigma = \{C_i^* | i \in I\}$ — простое целочисленное разбиение пространства V^* (терминология и обозначения п. 1.1). Положим $I = I^* \cup \tilde{I}$, где $i \in I^*$, если $\dim\langle C_i^* \rangle = n$, и $i \in \tilde{I}$, если $\dim\langle C_i^* \rangle < n$. Пусть $C_i \in C(\Lambda)$ — конус, двойственный к C_i^*, $i \in I$, $0 \in vs(C_i)$. Заметим, что условие, что C_i — остроконечный или развернутый в точности эквивалентно условию $i \in I^*$ или $i \in \tilde{I}$ соответственно.

Пусть $\beta \in Z(V, \Sigma)$ — выпуклая цепь, тогда для любого $i \in I$ существует нульмерная цепь $\beta_i \in \mathbb{Z}[V]$ такая, что при отождествлении $V = V^{**} \beta_i|_{C_i^*}$ реализует опорную функцию цепи β на C_i^*, и $\deg \beta = \deg \beta_i$ (см. [1], § 4). Если $i \in I^*$, то цепь β_i определена однозначно, причем $\beta_i \in \mathbb{Z}[\Lambda]$ для всех $i \in I^*$ тогда и только тогда, когда цепь β целочисленная, $\beta \in Z(\Lambda, \Sigma)$.

Сдвиг конуса $C \in C(V)$ на нульмерную цепь $\gamma = \sum_{j \in J} m_j [v_j]$ (где через $[v]$ для $v \in V$ мы обозначаем соответствующую этому вектору образующую групповой алгебры) мы записываем в терминах цепей:

$$\sum_{j \in J} m_j \mathbb{1}_{C(v_j)} = \gamma * \mathbb{1}_C = \mathbb{1}_C * \gamma.$$

В [1] (предложение 4.2) было доказано, в частности, что

$$\beta - \sum_{i \in I^*} \beta_i * \mathbb{1}_{C_i} \in \widetilde{ZC}(V)$$

— развернутая коническая цепь. В частности, по модулю $\widetilde{ZC}(V)$ $\beta * \alpha(z_1, \dots, z_N)$ представлена конической цепью

$$\sum_{i \in I^*} (\beta_i * \alpha_i(z_1, \dots, z_N)) * \mathbb{1}_{C_i},$$

где в скобках стоят нульмерные цепи $\beta_i * \alpha_i(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{Z}[V]$. Выясним, что собой представляют $\alpha_i(z_1, \dots, z_N)$.

В обозначениях п. 1.1 $l_1, \dots, l_N \in \Lambda^*$ — целочисленные направляющие вектора ребер разбиения Σ. Пусть $l_{i_1}, \dots, l_{i_n}$ — направляющие вектора ребер конуса C_i^*, $z_{i_1}, \dots, z_{i_n}$ — соответствующие им координаты на пространстве виртуальных многогранников $\mathcal{P}^*(V, \Sigma)$. Ковектора $l_{i_1} \dots, l_{i_n}$ будем рассматривать как целочисленную систему координат на V. Теперь имеем $\alpha_i(z_1, \dots, z_N) = [w_i(z_1, \dots, z_N)]$, где $w_i(z_1, \dots, z_N) \in V$— вектор такой, что $l_{i_k}(w_i) = z_{i_k}$. Отметим, что $w_i(z_1, \dots, z_N)$ зависит реально лишь от переменных $z_{i_1}, \dots, z_{i_n}$.

§ 4. Суммы и интегралы квазиполиномов по коническим цепям

1. Пусть $C \in C(V)$ — остроконечный конус с вершиной $vs(C) \in V$ и комплексный ковектор $\xi \in V_{\mathbb{C}}^*$ таков, что C приведен относительно $\operatorname{Re} \xi$. Тогда определены интеграл и целочисленная сумма универсальной экспоненты по

конусу C : $\int\limits_C \exp\xi(x)dx$ и $\sum\limits_{x\in C\cap\Lambda} \exp\xi(x)$. Мы получили две функции двух аргументов: конуса C и ковектора $\xi \in V_{\mathbb{C}}^*$. Во втором случае (суммирования) мы будем рассматривать только целочисленные конуса $C \in C(\Lambda)$. Изучение обеих функций совершенно аналогично, доказательства повторяются дословно с той лишь разницей, что для сумм вся работа идет в классе целочисленных цепей. Мы будем вести подробное изложение для интегралов, а для сумм приводить только формулировки. Необходимые изменения в рассуждениях для сумм сводятся к очевидным заменам понятий и обозначений ($ZC(V)$ на $ZC(\Lambda)$, буквы I, соответствующей интегралу, на букву S, соответствующую сумме, и т.д.). Обозначим через $\mathcal{M}(V_{\mathbb{C}}^*)$ и $\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}^*)$ пространства мероморфных и голоморфных функций на $V_{\mathbb{C}}^* \cong \mathbb{C}^n$ соответственно.

Предложение 1. А) *Интеграл универсальной экспоненты по приведенным конусам продолжается до мероморфнозначной меры на группе конических цепей. Точнее, существует единственный гомоморфизм абелевых групп $I : ZC(V) \to \mathcal{M}(V_{\mathbb{C}}^*)$ (значение функции $I(\alpha)$, $\alpha \in ZC(V)$, на комплексном ковекторе $\xi \in V_{\mathbb{C}}^*$ мы будем обозначать $I(\alpha, \xi)$ для упрощения обозначений) такой, что* (i) *если остроконечный конус C приведен относительно* $\mathrm{Re}\,\xi$, *то*

$$I(\mathbb{1}_C, \xi) = \int\limits_C \exp\xi(x)dx.$$

Отображение I обладает следующими свойствами:

(ii) $I(\tau_h\alpha, \xi) = \exp\xi(h)I(\alpha, \xi)$ *для* $h \in V$;

(iii) *I есть тождественный нуль на развернутых цепях.*

Б) *Целочисленная сумма универсальной экспоненты по приведенным целочисленным конусам продолжается до мероморфнозначной меры на группе целочисленных конических цепей. Точнее, существует единственный гомоморфизм абелевых групп $S : ZC(\Lambda) \to \mathcal{M}(V_{\mathbb{C}}^*)$ (значение функции $S(\alpha)$, $\alpha \in ZC(\Lambda)$, на ковекторе $\xi \in V_{\mathbb{C}}^*$ обозначаем через $S(\alpha, \xi)$) такой, что*

(i) *если остроконечный целочисленный конус C приведен относительно* $\mathrm{Re}\,\xi$, *то*

$$S(\mathbb{1}_C, \xi) = \sum_{x\in C\cap\Lambda} \exp\xi(x).$$

Отображение S обладает следующими свойствами:

(ii) $S(\tau_h\alpha, \xi) = \exp\xi(h)S(\alpha, \xi)$ *для* $h \in \Lambda$;

(iii) *S есть тождественный нуль на развернутых целочисленных цепях.*

Доказательство. Мы установим часть А), часть Б) доказывается дословно так же. Пусть $\alpha \in ZC(V)$ — коническая цепь, приведенная относительно ковектора $\xi_0 \in V^* \setminus \{0\}$. Тогда для $\xi \in V_{\mathbb{C}}^*$ таких, что $\mathrm{Re}\,\xi$ близко к ξ_0, интеграл $\int\limits_V \alpha(x)\exp\xi(x)dx$ сходится абсолютно и равномерно на компактах, определяя голоморфную функцию

$$V_{\mathbb{C}}^* \supset U_\alpha \ni \xi \mapsto \int\limits_V \alpha(x)\exp\xi(x)dx,$$

где $U_\alpha \subset V_{\mathbb{C}}^*$ — открытое подмножество, состоящее из ковекторов ξ таких, что α приведена относительно $\operatorname{Re}\xi$. Понятно, что α имеет представление вида $\alpha = \sum\limits_{i\in I} n_i \mathbb{1}_{C_i}$, где C_i — простые конусы, приведенные относительно всех ковекторов $\operatorname{Re}\xi$, $\xi \in U_\alpha$. Следовательно,

$$\int\limits_V \alpha(x)\exp\xi(x)dx = \sum_{i\in I} n_i \int\limits_{C_i} \exp\xi(x)dx$$

для $\xi \in U_\alpha$. Но здесь справа стоит, как показано в § 2, голоморфная функция на U_α, продолжающаяся до мероморфной функции на $V_{\mathbb{C}}^*$. Итак, мы доказали, что для любой остроконечной цепи α голоморфная функция

$$U_\alpha \ni \xi \mapsto \int\limits_V \alpha(x)\exp\xi(x)dx$$

продолжается до мероморфной функции на $V_{\mathbb{C}}^*$, которую мы обозначим через $I(\alpha)$. Покажем, что сопоставление (остроконечным цепям) $\alpha \mapsto I(\alpha) \in \mathcal{M}(V_{\mathbb{C}}^*)$ однозначно продолжается до гомоморфизма абелевых групп $I : ZC(V) \to \mathcal{M}(V_{\mathbb{C}}^*)$ и что I обладает свойством (iii). Заметим, что в силу существования приведенного представления свойствами (i) и (iii) I определяется однозначно.

Заметим, что построенное отображение на остроконечных цепях $\alpha \mapsto I(\alpha)$ обладает свойством „локальной линейности": если α_i, $i \in \mathcal{J}$, — конечный набор цепей такой, что все α_i одновременно приведены относительно ковектора ξ_0, то для любых $n_i \in \mathbb{Z}$

$$I(\sum_{i\in\mathcal{J}} n_i\alpha_i) = \sum_{i\in\mathcal{J}} n_i I(\alpha_i).$$

Предложение будет доказано, если мы установим, что „локальная линейность" продолжается до „глобальной".

Лемма 1. *Пусть α_i, $i \in \mathcal{J}$, — конечный набор остроконечных цепей такой, что цепь $\sum\limits_{i\in\mathcal{J}} \alpha_i$ развернута. Тогда*

$$\sum_{i\in\mathcal{J}} I(\alpha_i) \equiv 0 \in \mathcal{M}(V_{\mathbb{C}}^*).$$

Лемма 2. *Пусть $C_i \in C(V,x)$, $i \in \mathcal{L}$, — остроконечные конуса с вершиной $x \in V$. Если $\sum\limits_{i\in\mathcal{L}} m_i\mathbb{1}_{C_i} \equiv 0$ для $m_i \in \mathbb{Z}$, то $\sum\limits_{i\in\mathcal{L}} m_i I(\mathbb{1}_{C_i}) \equiv 0 \in \mathcal{M}(V_{\mathbb{C}}^*)$.*

Лемма 3. *Пусть $C \in \tilde{C}(V,x)$ — развернутый конус. Тогда существуют такие остроконечные конуса $D_j \in C(V,x)$, $j \in \mathcal{N}$, что $\sum\limits_{j\in\mathcal{N}} r_j\mathbb{1}_{D_j} = \mathbb{1}_C$, $r_j \in \mathbb{Z}$ и $\sum\limits_{j\in\mathcal{N}} r_j I(\mathbb{1}_{D_j}) \equiv 0$.*

Вывод предложения из леммы 1. Пусть $\alpha \in ZC(V)$ – произвольная коническая цепь, $\{\alpha_i \in ZC(V, x_i) | i \in I\}$ — ее приведенное представление относительно какого-либо общего ковектора. Положим $I(\alpha) = \sum_{i \in I} I(\alpha_i) \in \mathcal{M}(V_{\mathbb{C}}^*)$. Лемма 1 гарантирует, что это определение не зависит от выбора ковектора. Свойство (i) выполнено по построению, (iii) — по лемме 1, (ii) — очевидно. Предложение доказано.

Вывод леммы 1 из лемм 2 и 3. Очевидно, достаточно доказать лемму 1 для случая, когда все цепи α_i имеют общую вершину $x \in V$ и не имеют других вершин. Будем это предполагать и подразумевать ниже, что вершинные пространства всех конусов, участвующих в доказательстве, содержат точку x.

Каждую цепь α_i можно представить в виде линейной комбинации характеристических функций остроконечных конусов C_{ij}, $j \in \mathcal{W}_i$, $\alpha_i = \sum_{j \in \mathcal{W}_i} p_{ij} \mathbb{1}_{C_{ij}}$ так, что $I(\alpha_i) = \sum_{j \in \mathcal{W}_i} p_{ij} I(\mathbb{1}_{C_{ij}})$. Далее, по условию $\sum_{i \in J} \alpha_i = \sum_{k \in K} q_k \mathbb{1}_{D_k}$, $D_k \in \tilde{C}(V, x)$. Применим к каждому из развернутых конусов D_k, $k \in K$, лемму 3: пусть G_{ka}, $a \in A_k$, остроконечны и таковы, что

$$\sum_{a \in A_k} r_{ka} \mathbb{1}_{G_{ka}} = \mathbb{1}_{D_k} \text{ и } \sum_{a \in A_k} r_{ka} I(\mathbb{1}_{G_{ka}}) \equiv 0.$$

Теперь достаточно проверить, что

$$\sum_{i \in J} \sum_{j \in \mathcal{W}_i} p_{ij} I(\mathbb{1}_{C_{ij}}) - \sum_{k \in K} \sum_{a \in A_k} (q_k r_{ka}) I(\mathbb{1}_{G_{ka}}) \equiv 0.$$

Поскольку

$$\sum_{i \in J} \sum_{j \in \mathcal{W}_i} p_{ij} \mathbb{1}_{C_{ij}} - \sum_{k \in K} \sum_{a \in A_k} (q_k r_{ka}) \mathbb{1}_{G_{ka}} \equiv 0$$

по построению, требуемое равенство есть прямое следствие леммы 2.

Доказательство леммы 2. Нетрудно построить набор остроконечных конусов $F_j \in C(V, x)$, $j \in \mathcal{J}$, такой, что

(i) $\operatorname{Int} F_a \cap \operatorname{Int} F_b = \varnothing$, если $a \neq b$;

(ii) для каждого $i \in \mathcal{L}$ выделено подмножество $\mathcal{J}(i) \subset \mathcal{J}$ и существует представление $\mathbb{1}_{C_i} = \sum_{j \in \mathcal{J}(i)} m_{ij} \mathbb{1}_{F_j}$, причем $F_j \subset C_i$ для $j \in \mathcal{J}(i)$. В силу „локальной линейности“ теперь имеем $I(\mathbb{1}_{C_i}) = \sum_{j \in \mathcal{J}(i)} m_{ij} I(\mathbb{1}_{F_j})$, так что

$$\sum_{i \in \mathcal{L}} m_i I(\mathbb{1}_{C_i}) \equiv \sum_{i \in \mathcal{L}} \sum_{j \in \mathcal{J}(i)} (m_i m_{ij}) I(\mathbb{1}_{F_j}).$$

С другой стороны, в силу условия леммы

$$\sum_{i \in \mathcal{L}} \sum_{j \in \mathcal{J}(i)} (m_i m_{ij}) \mathbb{1}_{F_j} \equiv 0.$$

Нетрудно проверить, что благодаря свойству (i) построенного набора конусов для любого фиксированного $j \in \mathcal{J}(i)$ имеем $\sum\limits_{i \in \mathcal{L}, j \in \mathcal{J}(i)} m_i m_{ij} = 0$, и лемма 2 тем самым доказана.

Лемма 3 без труда выводится из предложения 2.2. Подробные рассуждения оставляем читателю. Доказательство предложения 1 завершено.

Пусть теперь $\alpha \in Z(V)$ — коническая цепь с компактным носителем. Тогда мероморфная функция $I(\alpha, \xi)$ голоморфна всюду на $V_{\mathbb{C}}^*$ и $I(\alpha, \xi) = \int\limits_V \alpha(x) \exp \xi(x) dx$. Более того, $I(\alpha) \in \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}^*)$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in Z(V)$. В частности, $I(\alpha, 0)$ есть „объем" цепи α.

2. Явные формулы для интегралов и сумм экспоненты. Развитая выше техника позволяет нам выписать достаточно явные формулы для интеграла и суммы экспоненты по выпуклой цепи через ее опорную функцию. Пусть $\Sigma = \{C_i^* | i \in I\}$ — простое целочисленное разбиение. В обозначениях п.1.1 и 3.4 имеем для цепи $\beta \in Z(V, \Sigma)$: $\beta - \sum\limits_{i \in I^*} \beta_i * \mathbb{1}_{C_i} \in \widetilde{ZC}(V)$ так, что

$$I(\beta, \xi) = \sum_{i \in I^*} I(\beta_i * \mathbb{1}_{C_i}, \xi).$$

Определим значение экспоненты на нульмерной цепи $\gamma = \sum m_j [v_j]$ по линейности: $\exp \xi(\gamma) = \sum m_j \exp \xi(v_j)$. Теперь имеем $I(\beta, \xi) = \sum\limits_{i \in I^*} \exp \xi(\beta_i) I(\mathbb{1}_{C_i}, \xi)$, где „коэффициенты" $I(\mathbb{1}_{C_i}, \xi)$ зависят только от разбиения Σ, но не от цепи $\beta \in Z(V, \Sigma)$. Аналогично для целочисленной цепи $\beta \in Z(\Lambda, \Sigma)$ имеем $S(\beta, \xi) = \sum\limits_{i \in I^*} \exp \xi(\beta_i) S(\mathbb{1}_{C_i}, \xi)$. Но если $v_{i1}, \ldots, v_{in} \in \Lambda$ — направляющие вектора ребер конуса C_i, $i \in I^*$, то, согласно результатам § 2,

$$I(\mathbb{1}_{C_i}, \xi) = \frac{(-1)^n}{\xi(v_{i1}) \ldots \xi(v_{in})} \text{ и } S(\mathbb{1}_{C_i}, \xi) = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - \exp \xi(v_{ik}))},$$

так что получаем окончательно

$$I(\beta, \xi) = \sum_{i \in I^*} \frac{\exp \xi(\beta_i)(-1)^n}{\xi(v_{i1})) \ldots \xi(v_{in})} \text{ и } S(\beta, \xi) = \sum_{i \in I^*} \frac{\exp \xi(\beta_i)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - \exp \xi(v_{ik}))}$$

(во втором случае $\beta \in Z(\Lambda, \Sigma)$). Эти формулы верны для общего ковектора $\xi \in V_{\mathbb{C}}^*$. Мы знаем, однако, что для выпуклой цепи β функции $I(\beta, \xi)$ и $S(\beta, \xi)$ глобально голоморфны на $V_{\mathbb{C}}^*$. Поэтому чтобы получить значение $I(\beta, \xi_0)$ и $S(\beta, \xi_0)$ для произвольного ковектора ξ_0, можно поступить следующим образом. Пусть $t \in \mathbb{C}$ — комплексный параметр, $\eta \in V_{\mathbb{C}}^*$ — общий ковектор. Мы проведем построения для интеграла; для суммы они совершенно аналогичны. Рассмотрим

$$I(\beta, \xi_0 + t\eta) = \sum_{i \in I^*} \frac{(-1)^n \exp\left((\xi_0 + t\eta) \cdot \beta_i\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (\xi_0(v_{ik}) + t\eta(v_{ik}))}$$

как функцию параметра t. При $t \to 0$ функция остается ограниченной (устранимая особенность). Поэтому в каждом слагаемом выписанной выше суммы необходимо выделить член нулевой степени по t, и все такие члены просуммировать по $i \in I^*$. Распишем получающиеся выражения более развернуто. Пусть ξ_0 обращается в нуль на векторах v_{ik}, $k \in K_i$, и $\xi_0(v_{ik}) \neq 0$, если $k \in K_i^*$. Положим $\nu_i = \# K_i$. Запишем явное представление нульмерной цепи $\beta_i = \sum\limits_{a \in A_i} m_{ia}[b_{ia}]$, $b_{ia} \in V$. Теперь, действуя по описанной схеме, получим, что $I(\beta, \xi_0)$ есть сумма $\sum\limits_{i \in I^*} \sum\limits_{a \in A_i}$, (i, a)-е слагаемое которой выглядит так:

$$(-1)^n \frac{m_{ia} \exp \xi_0(b_{ia})}{\prod\limits_{k \in K_i} \eta(v_{ik}) \prod\limits_{k \in K_i^*} \xi_0(v_{ik})} \times [\ldots],$$

где содержимое квадратной скобки есть коэффициент при t^{ν_i} в ряде

$$\Big(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} \eta^l(b_{ia})\Big) \prod_{k \in K_i^*} \Big(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l t^l \frac{\eta^l(v_{ik})}{\xi_0^l(v_{ik})}\Big).$$

Это представление зависит от выбора общего ковектора η. Аналогичное представление может быть получено для $S(\beta, \xi_0)$. Выписанные формулы являются источником многих более специальных формул и некоторых утверждений. Мы отметим часть из них.

Следствие 1. *Если $\beta = \beta(y_1, \ldots, y_M)$ линейно зависит от каких-то координат (y), т.е. все b_{ia}, $i \in I^*$, $a \in A_i$, линейно зависят от (y), то для фиксированного ξ $I(\beta(y), \xi)$ есть квазиполином вида*

$$\sum_{a \in A} \exp\left[\gamma_a(y)\right] Q_a(y_1, \ldots, y_M),$$

где $\gamma_a(y)$ — линейные функции, а $Q_a(y)$ — полиномы степени, не превосходящей $(n - \min\{\dim C_i^* | i \in I,\ \xi \in C_i^*\})$.

Если $\beta \in \mathcal{P}^*(V, \Sigma)$ — виртуальный многогранник, то $\beta_i = [b_i]$, $b_i \in V$, $i \in I^*$, так что формулы упрощаются — исчезает суммирование по $a \in A_i$. Если $\xi_0 = 0$, то формула может быть написана явно.

Следствие 2. *Для общего ковектора $\eta \in V_{\mathbb{C}}^*$ и $\beta \in \mathcal{P}^*(V, \Sigma)$*

$$I(\beta, 0) = \sum_{i \in I^*} \frac{(-1)^n \eta(b_i)^n}{n! \eta(v_{i1}) \ldots \eta(v_{in})}$$

— *„объем“ виртуального многогранника β.*

Последняя формула имеет особенно прозрачный вид для простого выпуклого многогранника (в обычном смысле), так как в этом случае b_i, $i \in I^*$, — это в точности его вершины, а v_{ik} — направляющие вектора ребер конусов при вершинах.

3. Интегралы и суммы квазиполиномов. Пусть $(x_1,\dots,x_n)$ и $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ — пара двойственных целочисленных координат на V, V^* и (ξ) рассматриваются как комплексные координаты на $V^*_{\mathbb{C}}$. Как и в § 2, мы интерпретируем квазиполином

$$P(x)\exp\xi(x), P(x) = \sum_{|I|\leqslant K} a_I x^I, a_I \in \mathbb{C},$$

как результат применения линейного дифференциального оператора $P(\frac{\partial}{\partial\xi})$ к универсальной экспоненте.

Пусть $\alpha \in ZC(V,x)$ — приведенная относительно ковектора $\xi_0 \in V^* \setminus \{0\}$ коническая цепь. Положим, как выше, $U_\alpha = \{\xi \in V^*_{\mathbb{C}} | \alpha$ приведена относительно $\operatorname{Re}\xi\}$. Для $\xi \in U_\alpha$ имеем $I(\alpha,\xi) = \int\limits_V \alpha(x)\exp\xi(x)dx$, где интеграл справа сходится равномерно по ξ на каждом компактном подмножестве U_α. Поэтому на U_α имеем

$$P(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\dots,\frac{\partial}{\partial\xi_n})I(\alpha,\xi) = \int\limits_V \alpha(x)P(x_1,\dots,x_n)\exp\xi(x)dx.$$

Сказанное очевидным образом переносится на целочисленные суммы. Теперь из предложения 1 с помощью теоремы единственности для аналитических функций получаем

Предложение 2. А) *Пусть $P(x)$ — полином на V с комплексными коэффициентами; интеграл квазиполинома $P(x)\exp\xi(x)$ по приведенным относительно $\operatorname{Re}\xi$ коническим цепям продолжается до мероморфнозначной меры на группе конических цепей. Точнее, существует единственный гомоморфизм абелевых групп (линейный по P) $I(P) : ZC(V) \to \mathcal{M}(V^*_{\mathbb{C}})$ (образ цепи α и его значение на ковекторе ξ мы обозначаем $I(P,\alpha)$ и $I(P,\alpha,\xi)$ соответственно) такой, что если остроконечный конус C приведен относительно $\operatorname{Re}\xi$, то*

$$I(P,\mathbb{1}_C,\xi) = \int\limits_C P(x)\exp\xi(x)dx.$$

Отображение $I(P)$ есть тождественный нуль на развернутых цепях. Кроме того, имеет место соотношение $I(P,\alpha,\xi) = P(\frac{\partial}{\partial\xi})I(\alpha,\xi)$, и если $\alpha \in Z(V)$ — цепь с компактным носителем, то $I(P,\alpha) \in \mathcal{O}(V^*_{\mathbb{C}})$ — глобальная голоморфная функция и

$$I(P,\alpha,\xi) = \int\limits_V \alpha(x)P(x)\exp\xi(x)dx.$$

В частности, $I(P,\alpha,0)$ есть „интеграл полинома P по цепи α“.

Б) *Целочисленная сумма квазиполинома* $P(x)\exp\xi(x)$ *по приведенным относительно* $\operatorname{Re}\xi$ *целочисленным коническим цепям продолжается до мероморфнозначной меры на группе целочисленных конических цепей: существует единственный гомоморфизм абелевых групп, линейный по* P, $S(P): ZC(\Lambda) \to \mathcal{M}(V_{\mathbb{C}}^*)$ (*образ цепи* α *и его значение на ковекторе* ξ *обозначаются* $S(P,\alpha)$ *и* $S(P,\alpha,\xi)$), *такой, что если остроконечный конус* $C \in C(\Lambda)$ *приведен относительно* $\operatorname{Re}\xi$, *то*

$$S(P, \mathbb{I}_C, \xi) = \sum_{x \in C\cap\Lambda} P(x)\exp\xi(x).$$

Отображение $S(P)$ *есть тождественный нуль на развернутых цепях. Кроме того, имеет место соотношение* $S(P,\alpha,\xi) = P(\frac{\partial}{\partial\xi})S(\alpha,\xi)$, *и если* $\alpha \in Z(\Lambda)$ — *цепь с компактным носителем, то* $S(P,\alpha) \in \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}^*)$ — *голоморфная функция и*

$$S(P,\alpha,\xi) = \sum_{x\in\Lambda} \alpha(x)P(x)\exp\xi(x).$$

В частности, $S(P,\alpha,0)$ *есть „целочисленная сумма полинома* P *по цепи* α*“.*

Что касается явных формул для интегралов и сумм квазиполиномов по выпуклым цепям, аналогичных формулам п.2, то они получаются из последних применением дифференциального оператора $P(\frac{\partial}{\partial\xi})$ и, как следствие, плохо поддаются развертыванию. Мы отметим лишь некоторые моменты вычислений. Для цепи $\beta \in Z(V,\Sigma)$ в обозначениях п.2 имеем $(-1)^n I(P,\beta,\xi) = \sum_{i\in I^*} P(\frac{\partial}{\partial\xi}[\exp\xi(\beta_i)\xi^{-1}(v_{i1})\dots\xi^{-1}(v_{in})]$ (соответственно для сумм).

Следствие 3. *Если* $\beta = \beta(y_1,\dots,y_M)$ *линейно зависит от координат* (y), *то для фиксированного* ξ *имеем:* $I(P,\beta(y),\xi)$ *есть квазиполином вида* $\sum_{a\in A}\exp[\gamma_a(y)]Q_a(y_1,\dots,y_M)$, *где* $\gamma_a(y)$ — *линейные функции, а* $Q_a(y)$ *суть полиномы степени, не превосходящей* $\deg P + (n - \min\{\dim C_i^* | i\in I,\ \xi \in C_i^*\})$.

Аналогичный результат верен и для целочисленных сумм.

Следствие 4. *Пусть* $P(x)$ — *однородный многочлен степени* p, $\beta \in \mathcal{P}^*(V,\Sigma)$ — *виртуальный многогранник. В обозначениях п.2*

$$I(P,\beta,0) = \sum_{i\in I^*} \frac{(-1)^n}{(n+p)!} P(\frac{\partial}{\partial\eta}) \frac{\eta(b_i)^{n+p}}{\eta(v_{i1})\dots\eta(v_{in})}\Big|_{\eta=\xi},$$

где $\xi \in V_{\mathbb{C}}^*$ — *общий ковектор. В частности, если* β (*т.е. все* b_i, $i \in I^*$) *линейно зависит от координат* (y), *то интеграл полинома* P *по виртуальному многограннику* β *зависит от* (y) *полиномиально степени* $\leqslant n+p$.

Отметим, что мы заново доказали частный случай предложения 2.5 работы [1] для конечно-аддитивной меры — интеграла полинома по виртуальному многограннику.

§ 5. Доказательство теоремы Римана–Роха

1. Мы пользуемся обозначениями предшествующих разделов без специальных ссылок. Как было показано в п.3.4, цепь $\beta * \alpha(z_1, \ldots, z_N)$ имеет по модулю $\widetilde{ZC}(V)$ представление

$$\sum_{i \in I^*} (\beta_i * [w_i(z_1, \ldots, z_N)] * \mathbb{1}_{C_i},$$

где вектор $w_i(z_1, \ldots, z_N) \in V$ определяется соотношениями $l_{i_k}(w_i) = z_{i_k}$, $k = 1, \ldots, n$, l_{i_k} — направляющие вектора ребер конуса C_i^*. Как было показано в § 4, для ковекторов $\xi \in V_{\mathbb{C}}^*$, лежащих вне гиперплоскостей $(\xi \cdot v_{i_k}) = 2\pi\sqrt{-1}m$, $m \in \mathbb{Z}$, имеют место представления

$$I(P, \beta * \alpha(z), \xi) = (-1)^n P(\frac{\partial}{\partial \xi}) \sum_{i \in I^*} \frac{\exp \xi(\beta_i * [w_i])}{\xi(v_{i1}) \ldots \xi(v_{in})}$$

и

$$S(P, \beta * \alpha(z), \xi) = \sum_{i \in I^*} P(\frac{\partial}{\partial \xi}) \frac{\exp \xi(\beta_i * [w_i])}{\prod_{k=1}^{n} (1 - \exp \xi(v_{ik}))},$$

последнее — для β, $\alpha \in Z(\Lambda, \Sigma)$. Мы знаем, что i-е слагаемое в каждой из этих сумм зависит лишь от $z_{i_1}, \ldots, z_{i_n}$. С другой стороны, расписывая $\beta_i^v \sum_{a \in A_i} m_{ia}[b_{ia}]$ и применяя результаты § 2, получаем, что для малых ξ для каждого $i \in I^*$ i-е слагаемое выписанного представления $I(P, \beta * \alpha(z), \xi)$ допускает оператор Тодда $\mathrm{Td}(\frac{\partial}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_{i_n}})$, и его результат при $(z_{i_1}, \ldots, z_{i_n}) \in \mathbb{Z}^n$ есть i-е же слагаемое выписанного представления $S(P, \beta * \alpha(z), \xi)$. Используя свойства отображения Тодда (п.1.3), получаем теорему Римана–Роха для достаточно малых по модулю комплексных ковекторов ξ вне некоторого набора гиперплоскостей. Мы сформулируем доказанное так: существует малая окрестность нуля $U \subset V_{\mathbb{C}}^*$, не пересекающаяся с аффинными гиперплоскостями $(\xi \cdot v_{ik}) = 2\pi\sqrt{-1}m$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ такая, что если $X = U \cap \bigcup_{\substack{i \in I^* \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \{(\xi \cdot v_{ik}) = 0\}$, то для $\xi \in U \setminus X$ и произвольного полинома $P(x)$ для $f = P \exp \xi(x)$ функция $I_f(\beta * \alpha(z_1, \ldots, z_N)) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ допускает оператор Тодда $\mathrm{Td}(\frac{\partial}{\partial z})$ и его результат для целочисленных наборов (z) есть функция $S_f(\beta * \alpha(z_1, \ldots, z_N))$. Согласно лемме 1.1, ряд, реализующий действие оператора Тодда, сходится равномерно на компактах в $U \setminus X$. Далее, *его члены $\tau_I \frac{\partial^{|I|}}{\partial z_I} I_f(\beta * \alpha(z))$ голоморфные на U (и даже на всем $V_{\mathbb{C}}^*$) функции ξ.*

В самом деле, приводя сумму дробей

$$\sum_{i \in I^*} \frac{\exp \xi(\beta_i * [w_i(z_1, \ldots, z_N)])}{\xi(v_{i1}) \ldots \xi(v_{in})}$$

к общему знаменателю, получим функцию вида $Q(z,\xi)/L(\xi)$, где $L(\xi)$ — произведение линейных форм от ξ с постоянными коэффициентами, а числитель имеет разложение в ряд

$$Q(z,\xi)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{|I|=p}q_I(z_1,\dots,z_N)\xi^I=\sum_{p=0}^{\infty}Q_p(z,\xi),$$

где $\deg q_I \leqslant |I|+M$, M — некоторая константа, а коэффициенты ряда при $z^J\xi^I$ имеют порядок $\left(\frac{c}{|I|+|J|}\right)^{|I|+|J|}$ при $|I|+|J|\to\infty$. Поскольку $I(\beta*\alpha(z),\xi)$ глобально голоморфна по ξ для любых (z), имеем, очевидно, $L(\xi)|Q_p(z,\xi)$ для любого $p\in\mathbb{Z}_+$. Следовательно, $I(\beta*\alpha(z),\xi)$ разлагается в степенной ряд по (z,ξ) с бесконечным радиусом сходимости, значит, то же верно для $I(P,\beta*\alpha(z),\xi)$, и мы получаем то, что утверждали.

Голоморфна и сумма ряда Тодда — $S_f(\beta*\alpha(z))$ как функция ξ при фиксированных $(z_1,\dots,z_N)$. Отсюда (элементарными средствами комплексного анализа) легко выводится, что $I_f(\beta*\alpha(z))$ допускает $\mathrm{Td}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ всюду на $U\ni\xi$, причем соответствующий ряд сходится равномерно на компактах в U (по ξ), а его сумма при $(z_1,\dots,z_N)\in\mathbb{Z}^N$ есть $S_f(\beta*\alpha(z))$.

Мы полностью доказали теорему Римана–Роха.

2. Заключительные замечания. За рамками настоящей работы остались некоторые темы, естественно в нее вписывающиеся. Речь идет об алгеброгеометрическом сюжете, лишь намеченном в § 1, об описании соотношений в группе целочисленных многогранников (см. § 2 в [1]), о более детальном изучении интегралов и целочисленных сумм полиномов по виртуальным многогранникам. Кроме того, подобно тому как голоморфную функцию можно раскладывать в степенной ряд вокруг любой точки, в которой она определена, ряд $\mathrm{Td}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ можно писать в любой точке голоморфности отображения Тодда. Это позволяет „аналитически продолжить“ оператор Тодда таким образом, что теорема Римана–Роха будет верна не для малых $\xi\in V^*_{\mathbb{C}}$, а для $\xi\in V^*_{\mathbb{C}}\setminus X$, где X — объединение счетного множества комплексных гиперплоскостей, $0\notin X$. Эти вопросы будут рассмотрены в другом месте. Здесь мы коснемся еще одной темы, связывающей данную работу с предыдущей [1].

Основной мотив наших рассуждений в данной работе — это „разложение“ конкретных мер (интегралов и целочисленных сумм квазиполиномов) по конусам при вершинах цепей. Возникает вопрос: можно ли это сделать для произвольной конечно-аддитивной меры, φ, полиномиальной относительно сдвига? Ответ в некотором смысле утвердительный. Мы наметим основные идеи. Пусть $\Sigma=\{C_i^*|i\in I\}$ — разбиение пространства V^*. Тогда существует ковектор $\xi\in V^*\setminus\{0\}$ такой, что все цепи $\alpha\in Z(V,\Sigma)$ приведены относительно ξ. Поэтому чтобы мера цепи α раскладывалась в сумму мер цепей $\{\alpha\}_x$ по всем вершинам x цепи α, достаточно подходящим образом определить меру на приведенных относительно ξ конусах. Пусть $H_{\xi,0}$ — гиперплоскость, задаваемая уравнением $\xi(y)=0$. Тогда для конуса C, приведенного относительно ξ, вершина которого лежит выше $H_{\xi,0}$, положим $\varphi(C)=\varphi(C\cap\{x|\xi(x)\geqslant 0\})$. Нетрудно проверить, что φ будет полиномиальна относительно сдвигов C на вектора h такие, что $\xi(h) + \xi(vs(C)) \geqslant 0$. Значит, φ можно единственным образом продолжить с сохранением полиномиальности на все конуса вида $h + C$, $h \in V$. Эта мера на приведенных относительно ξ конусах однозначно продолжается на множество конических цепей, находящихся в общем положении с ξ, требованием обращения в нуль на развернутых цепях. Полученная мера полиномиальна относительно сдвигов и решает поставленную задачу для цепей, находящихся с ковектором ξ в общем положении. Подробно эта проблематика будет рассмотрена в другом месте.

Список литературы

[1] Пухликов А. В., Хованский А. Г., *Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников*, Алгебра и анализ **4**, вып. 2 (1992).
[2] Гельфонд А. О., *Исчисление конечных разностей*, М., 1967.
[3] Brion M., *Points entiers dans les polyèdres convexes*, Ann. sci. Ec. norm. super. **21**, no. 4 (1988), 653–663.
[4] Kempf G., Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B., *Toroidal embeddings.I*, Lecture Notes in Math., no. 339 (1972).
[5] Хованский А. Г., *Многогранники Ньютона и торические многообразия*, Функцион. анализ и его прил. **11**, вып. 4 (1977), 56–67.
[6] Фултон У., *Теория пересечений*, Мир, М., 1989.
[7] Хартсхорн Р., *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981.
[8] Варченко А. Н., Гельфанд И. М., *О функции Хевисайда и конфигурации гиперплоскостей*, Функцион. анализ и его прил. **21**, вып. 4 (1987), 1–18.

Поступило 10 июня 1991 г.