Алгебра и анализ
Том 4 (1992), вып. 2

КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫЕ МЕРЫ ВИРТУАЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

А. В. Пухликов, А. Г. Хованский

Работа посвящена обобщению классической теории конечно-аддитивных мер выпуклых многогранников. С помощью техники интегрирования по эйлеровой характеристике получены простые доказательства гораздо более сильных фактов, чем известны к настоящему времени. Построено обобщение понятия опорной функции и дана геометрическая конструкция „вычитания многогранников по Минковскому".

Введение

Конечно-аддитивные меры выпуклых многогранников — старая и авторитетная тема. К ней относятся такие задачи, как проблема равносоставленности многогранников [1], и такие результаты, как полиномиальность числа целых точек в целочисленных многогранниках относительно сложения их по Минковскому [2–4]. Интерес к этим классическим вопросам, восходящим к элементарной геометрии, недавно возрос в связи с алгебро-геометрической теорией торических многообразий, в которой они естественно возникли (на другом языке) [5]. Рассмотренный в [5] параллелизм между объектами выпуклой геометрии и алгебро-геометрическими объектами позволил дать новые простые доказательства некоторых старых теорем. Например, многограннику с целочисленными вершинами можно поставить в соответствие обратимый пучок на некотором гладком торическом многообразии, при этом число целых точек этого многогранника совпадет с эйлеровой характеристикой многообразия относительно когомологий с коэффициентами в данном пучке. Отсюда при помощи теоремы Римана–Роха сразу получается классическая теорема о полиномиальности числа целых точек [5].

„Алгебро-геометрический" подход к теории выпуклых многогранников мотивирует постановку новых вопросов в рамках классической теории. Вот один из них. При упомянутом выше сопоставлении многогранникам обратимых пучков сумма по Минковскому превращается в тензорное произведение. Но обратимые пучки на алгебраическом многообразии образуют группу (группу Пикара), а выпуклые многогранники — всего лишь полугруппу с однозначным вычитанием (если оно выполнимо). Это порождает естественную задачу — расширить полугруппу выпуклых многогранников до группы.

Ключевые слова: выпуклый многогранник, эйлерова характеристика, опорная функция, полиномиальная мера.

Настоящая работа посвящена построению теории, в рамках которой эта и другие задачи получают простое и геометрически прозрачное решение. Мы обобщаем и усиливаем результаты теории конечно-аддитивных мер выпуклых многогранников [3] и одновременно существенно упрощаем их доказательства. Очень полезной оказывается техника интегрирования по эйлеровой характеристике. Отметим, что, хотя вся работа может быть проделана чисто элементарными методами, без ссылки на этот аппарат, сама концепция такого „неклассического" интегрирования в большой степени проясняет суть дела.

Определения, предложения, леммы, теоремы и следствия нумеруются в каждом параграфе независимо, а ссылка на определение (предложение, ...) а.б означает, что имеется в виду определение (...) б из § а. Аналогичный смысл имеет п. а.б. При ссылке на утверждение или пункт того же параграфа номер параграфа не указывается.

Авторы благодарят международную лабораторию „Математические методы информатики и управления" и ее директора С.К.Коровина за финансовую поддержку настоящей работы.

§ 1. Конечно-аддитивные меры выпуклых многогранников

В данном разделе мы даем исходные определения, напоминаем некоторые классические понятия и конструкции и перечисляем ряд известных теорем о конечно-аддитивных мерах.

1. Определение 1. Пару (V, Λ), где V — конечномерное вещественное пространство, Λ — его аддитивная подгруппа, назовем допустимой, если существует такой изоморфизм $\varphi : V \underset{\sim}{\to} \mathbb{R}^n$, что $\varphi(\Lambda) = F^n$, где либо $F \subset \mathbb{R}$ — подполе, либо $F = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Если определить морфизм допустимых пар $\Phi : (V, \Lambda) \to (W, \sum)$ как линейное отображение $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ такое, что $\Phi(\Lambda) \subset \sum$, то множество допустимых пар становится категорией. Парой, двойственной к (V, Λ), назовем пару (V^*, Λ^*), где $\Lambda^* \subset V^*$ есть множество линейных функционалов, принимающих на Λ значения в F. Очевидно, эта пара допустима.

Обозначим через $\mathcal{P}(\Lambda)$ множество ограниченных замкнутых выпуклых многогранников с вершинами в Λ. Элементы $\mathcal{P}(\Lambda)$ будем называть Λ-многогранниками. Если $\Lambda \cong \mathbb{Z}^n$, то будем говорить о целочисленных многогранниках.

2. Напомним, что для A, $B \in \mathcal{P}(V)$ их суммой по Минковскому называется многогранник $A \oplus B = \{x + y | x \in A, y \in B\}$.

Определение 2. Пусть (V, Λ) — допустимая пара. *Конечно-аддитивной мерой* на $\mathcal{P}(\Lambda)$ назовем отображение

$$\varphi : \mathcal{P}(\Lambda) \to M,$$

где M — абелева группа, удовлетворяющая следующему свойству аддитивности: если $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{P}(\Lambda)$ таковы, что

$$\cup_{i=1}^N A_i \in \mathcal{P}(\Lambda) \text{ и для любых } i_1 < \cdots < i_k \quad A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \in \mathcal{P}(\Lambda),$$

то выполняется соотношение „включения–исключения":

$$\varphi(\cup_{i=1}^{N} A_i) = \sum_i \varphi(A_i) - \sum_{i<j} \varphi(A_i \cap A_j) + \dots$$

Конечно–аддитивную меру на $\mathcal{P}(\Lambda)$ назовем Λ-инвариантной, если она не меняется при сдвигах многогранника на $\lambda \in \Lambda$.

В дальнейшем мы будем говорить просто о мерах, опуская слова „конечно-аддитивная".

Пример 1. (i) $\Lambda = V$, мера-объем относительно какой-либо евклидовой структуры (очевидно, инвариантная относительно сдвигов).

(ii) $V = \mathbb{R}^n$, $\Lambda = \mathbb{Z}^n$, мера целочисленного многогранника A есть $\sharp\{A \cap \mathbb{Z}^n\}$ — число целых точек. Очевидна $\mathbb{Z}^n$-инвариантность.

Классические результаты о Λ-инвариантных мерах подытожены в следующих двух теоремах П.Макмуллена [3].

Теорема 1. *Пусть* $\varphi : \mathcal{P}(\Lambda) \to M$ — Λ*-инвариантная мера,* $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{P}(\Lambda)$. *Тогда* M*-значная функция*

$$\varphi(n_1 A_1 \oplus n_2 A_2 \oplus \dots \oplus n_N A_N)$$

на $(\mathbb{Z}_+)^N$ *есть полином по* n_i *общей степени* $\leqslant \dim V$ *(см. определение 2.1 ниже).*

Теорема 2. *Пусть* φ *как выше,* $A \in \mathcal{P}(\Lambda)$, $\Gamma(A)$ — *множество всех граней* A *(включая* A*). Пусть* $f(t)$ — *полином, такой, что* $f(n) = \varphi(nA)$ *для* $n \geqslant 0$ *(существующий по теореме* 1*). Тогда*

$$f(-1) = \sum_{\Delta \in \Gamma(A)} (-1)^{\dim \Delta} \varphi(\Delta).$$

Если теорему 2 применить к мере из примера 1, (ii), то получается, как нетрудно проверить, следующее утверждение („теорема двойственности Эрхарта" [3]): $f(-1) = (-1)^{\dim A} \times$ (число внутренних целых точек в A). Здесь и далее под внутренностью многогранника понимается его внутренность в его аффинной оболочке.

3. Напомним три хорошо известные конструкции выпуклой геометрии, которые нам понадобятся в дальнейшем.

(1) Опорная функция многогранника $A \in \mathcal{P}(V)$ — это кусочно-линейная функция $\sigma_A : V^* \to \mathbb{R}$,

$$\sigma_A : V^* \ni l \mapsto \sup\{l(x) | x \in A\}.$$

Хорошо известно, что выпуклый многогранник $A \in \mathcal{P}(V)$ порождает разбиение двойственного пространства V^* на конусы, двойственные к конусам при вершинах и гранях A. На этих конусах σ_A линейна, и, более того, конуса, двойственные к конусам при вершинах A, максимальны среди конусов с таким свойством. Заметим, что если $A \subset W$, где $W \subset V$ — аффинное подпространство, то σ_A линейна на $\operatorname{Ann} \tilde{W} \subset V^*$, $\tilde{W} \subset V$ — „несущее" линейное подпространство для W.

Если $A \in \mathcal{P}(\Lambda)$, то „линейные куски" σ_A представлены вершинами многогранника A — элементами Λ как функциями на $V^* \supset \Lambda^*$, а конуса разбиения V^*, порожденного A, натянуты на элементы Λ^*.

(2) След многогранника $A \in \mathcal{P}(V)$ относительно ковектора $0 \neq l \in V^*$ — это многогранник

$$\mathrm{Tr}_l\, A = \{x \in A | l(x) = \sigma_A(l)\}.$$

Отметим, что если $A \in \mathcal{P}(\Lambda)$, то и $\mathrm{Tr}_l\, A \in \mathcal{P}(\Lambda)$ для любого l, и очевидно, что $\mathrm{Tr}_{l_1} A = \mathrm{Tr}_{l_2} A$, если $l_1 = \alpha l_2$, где $\alpha > 0$.

(3) Операция $*$. Для меры φ на $\mathcal{P}(\Lambda)$ положим

$$\varphi^*(A) = \sum_{\Delta \in \Gamma(A)} (-1)^{\dim \Delta} \varphi(\Delta).$$

Классический и без труда проверяемый факт про операцию $*$ заключается в том, что φ^* — снова мера, а $\varphi^{**} = \varphi$. Теорема 2, сформулированная выше, показывает значение этой операции.

§ 2. Алгебра выпуклых цепей

В этом разделе дается неинвариантное определение алгебры выпуклых цепей и обсуждаются ее основные свойства. Инвариантные конструкции и доказательства ключевых фактов содержатся в § 3, 4, 5.

1. Обобщать классические теоремы 1 и 2 из § 1 можно в различных направлениях: допускать более широкий класс мер и рассматривать не только суммирование многогранников по Минковскому, но и „движение стенок".

Определение 1. А) Отображение $h : N \to L$ абелевых групп есть полином степени $\leqslant m$, если выполнено одно из двух условий:

(i) $m = 0$ и h — постоянное отображение, $h(N) = l \in L$;

(ii) $m \geqslant 1$ и для любого $a \in N$ отображение $h_a : N \to L$, $h_a : x \mapsto h(x+a) - h(x)$ есть полином степени $\leqslant m-1$.

Б) Мера $\varphi : \mathcal{P}(\Lambda) \to M$ — полиномиальна степени $\leqslant m$, если для любого $A \in \mathcal{P}(\Lambda)$ функция $\varphi(A+\lambda) : \Lambda \to M$ есть полином степени $\leqslant m$.

Замечания. (i) Часть А) определения 1 может быть переформулирована таким образом: для любых $a_1, \ldots, a_{m+1} \in N$

$$\sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant m+1 \\ 1 \leqslant k_1 < \cdots < k_i \leqslant m+1}} (-1)^i h(x + a_{k_1} + \cdots + a_{k_i}) \equiv 0$$

(ii) Если $h : N \to L$ есть полином степени $\leqslant m$, то для любых $a_1, \ldots, a_k \in N$ существуют $b_1, \ldots, b_r \in L$ и целочисленные полиномы (т.е. полиномы, реализующие отображение $\mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}$) $p_i(n_1, \ldots, n_k)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, степени $\leqslant m$ такие, что

$$h\Big(\sum_{j=1}^{k} n_j a_j\Big) = \sum_{i=1}^{r} b_i p_i(n_1, \ldots, n_k).$$

(iii) Полиномиальные меры степени 0 — это просто инвариантные меры.

Пример 1. (i) $\Lambda = V$, мера φ — есть интеграл полинома $f : V \to \mathbb{R}$ по многограннику. Очевидно, φ полиномиальна степени $\leqslant \deg f$.

(ii) Λ — дискретная решетка, $f : V \to \mathbb{R}$ — полином,

$$\varphi(A) = \sum_{x \in A \cap \Lambda} f(x).$$

Снова φ полиномиальна степени $\leqslant \deg f$ (как мера на $\mathcal{P}(\Lambda)$).

Пусть $A \in \mathcal{P}(V)$, $\langle A \rangle = W$, $\tilde{W}$ — „несущее" линейное пространство для W, $\{R_1, \dots, R_m\}$ — набор лучей в V^*, задающих коориентированные линейные гиперплоскости граней максимальной размерности многогранника A. Иными словами, пусть $0 \neq l_i \in R_i$, тогда

$$A = \{x \in W | l_i(x) \leqslant c_i\}$$

и ни одно из этих неравенств не является лишним.

Определение 2. Многогранник $A' \in \mathcal{P}(V)$ получен из A *движением стенок*, если его опорная функция линейна на конусах разбиения пространства V^*, порожденного многогранником A (см. п. 1.3).

Очевидно, многогранник A', полученный из A движением стенок, однозначно определяется набором чисел $\xi_i = \sigma_{A'}(l_i)$ и линейной функцией $\sigma_{A'}|_{\operatorname{Ann} \tilde{W}}$. Если $A \in \mathcal{P}(\Lambda)$, то $\operatorname{Ann} \tilde{W}$ натянут на ковектора из Λ^*; можно выбрать $l_i \in \Lambda^*$, и тогда $\xi_i \in F$ (напомним, $F \subset \mathbb{R}$ — подполе или $\mathbb{Z}$).

Теперь теорема 1.1 может быть обобщена так.

Теорема 1. *Для любого многогранника $A \in \mathcal{P}(\Lambda)$ и любой меры $\varphi : \mathcal{P}(\Lambda) \to M$, полиномиальной степени $\leqslant k$ существует такой полином (в принятых обозначениях) степени $\leqslant k + \dim V$*

$$h : \bigoplus_{i=1}^{m} F_{\xi_i} \oplus \Lambda/(\Lambda \cap \tilde{W}) \to M,$$

что для любого $A' \in \mathcal{P}(\Lambda)$, полученного из A движением стенок, имеем

$$h((\xi_i = \sigma_{A'}(l_i), 1 \leqslant i \leqslant m), \sigma_{A'}|_{\operatorname{Ann} \tilde{W}}) = \varphi(A').$$

Нетрудно понять, что теорема 1.1 следует из теоремы 1, потому что многогранник $n_1 A_1 \oplus \dots \oplus n_k A_k$ при $n_i \geqslant 0$ получается из $A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ движением стенок, причем параметры ξ_i и $\sigma_{\sum n_j A_j}|_{\operatorname{Ann} \tilde{W}}$ линейно зависят от n_j.

Однако мы будем доказывать другой, более общий факт, из которого теорема 1 вытекает автоматически. А именно, мы покажем, в частности, что мера φ может быть распространена естественным образом на объекты из более широкого класса, чем выпуклые многогранники, и будет полиномиальна относительно аддитивной структуры на множестве этих объектов. Кроме того, утверждения типа теоремы 1.2 получат прозрачную геометрическую интерпретацию, в частности, мы придадим геометрический смысл формальным суммам вида

$$n_1 A_1 \oplus \dots \oplus n_k A_k,$$

где n_i — произвольные целые (в том числе и отрицательные). Такие объекты мы называем виртуальными многогранниками. В рамках нашей теории теоремы 1.1 и 1.2 обобщаются одним утверждением о полиномиальности (степени $\leqslant \dim V+m$) полиномиальной (степени $\leqslant m$) меры относительно сложения виртуальных многогранников по Минковскому.

2. Определение алгебры выпуклых цепей. Пусть (V, Λ) — допустимая пара.

Определение 4. *Выпуклой Λ-цепью* назовем функцию

$$\alpha : V \to \mathbb{Z}$$

вида $\alpha = \sum_{i=1}^{k} n_i \mathbb{I}_{A_i}$, где $A_i \in \mathcal{P}(\Lambda)$, $\mathbb{I}_Y$ — индикатор множества Y, $n_i \in \mathbb{Z}$. Аддитивную группу выпуклых Λ-цепей обозначим через $Z(\Lambda)$, в частности, если $\Lambda = V$, то $Z(\Lambda) = Z(V)$, и в этом случае будем говорить просто о выпуклых цепях.

Чтобы не загромождать текста обозначениями, мы будем вести изложение для случая $\Lambda = V$. Естественность теории позволяет получать и утверждения, и доказательства в общем случае из данного заменой всюду V на (V, Λ) или Λ, линейного отображения $f : V \to W$ на морфизм пар $(V, \Lambda) \to (W, \Sigma)$, V^* на (V^*, Λ^*) или Λ^* и т.д. Эти замены каждый раз очевидны; иногда мы все же сделаем поясняющие замечания. Наконец, для краткости речи мы опускаем слово „выпуклый“ и говорим просто о цепях.

Предложение–определение 1. *Для любой цепи $\alpha = \sum n_i \mathbb{I}_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{P}(V)$, число $\sum n_i$ зависит только от α и называется степенью цепи α. Обозначение:* $\deg \alpha$.

Доказательство дано в § 3.

Очевидно, $\deg : Z(V) \to \mathbb{Z}$ — гомоморфизм аддитивных групп.

Пусть $f : V \to W$ — линейное отображение векторных пространств.

Предложение–определение 2. *Для любой цепи $\alpha = \sum n_i \mathbb{I}_{A_i} \in Z(V)$ цепь $\sum n_i \mathbb{I}_{f(A_i)} \in Z(W)$ зависит только от α. Построенный гомоморфизм аддитивных групп называется гомоморфизмом прямого образа и обозначается через f_*. Кроме того,* $\deg f_* \alpha = \deg \alpha$.

Доказательство дано в § 4.

Предложение–определение 3. *Сложение многогранников по Минковскому единственным образом продолжается до билинейной операции на группе выпуклых цепей*

$$* : Z(V) \times Z(V) \to Z(V),$$
$$\mathbb{I}_A * \mathbb{I}_B = \mathbb{I}_{A \oplus B} \quad \textit{для} \quad A, B \in \mathcal{P}(V),$$

которую мы назовем умножением цепей (по Минковскому). Группу $Z(V)$ с этим умножением (коммутативным и ассоциативным) назовем алгеброй выпуклых цепей. Отображения прямого образа f_* и степени $\deg$ *являются кольцевыми гомоморфизмами.*

Доказательство: см § 4.

Очевидно, единицей алгебры $Z(V)$ служит $\mathbb{1}_{\{0\}}$. Умножение по Минковскому допускает и такое описание: пусть $\mu : V \times V \to V$ — отображение сложения, $\alpha, \beta \in Z(V)$ и $\alpha \times \beta(x,y) = \alpha(x)\beta(y)$ — прямое произведение цепей α и β. Тогда $\alpha * \beta = \mu_*(\alpha \times \beta)$.

3. Нульмерные и одномерные цепи. Как обычно, носителем цепи $\operatorname{Supp}\alpha$ мы называем замыкание множества $\{x \in V | \alpha(x) \neq 0\}$, а размерностью цепи — размерность ее носителя. Очевидно, нульмерные цепи вместе с 0 образуют подалгебру $Z(V)$, изоморфную групповой алгебре $\mathbb{Z}[V]$ (если $\Lambda \neq V$, то $\mathbb{Z}[\Lambda]$). Элементы $\mathbb{Z}[V]$ будем записывать как $\sum n_i[x_i]$, $x_i \in V$.

Рассмотрим более подробно цепи на прямой: пусть $\dim V = 1$. Цепи на V имеют вид $\sum n_i \mathbb{1}_{A_i}$, где A_i — замкнутые отрезки или точки. Выберем на V ориентацию, т.е. зафиксируем одну из двух связных компонент $V \backslash \{0\}$. Теперь у каждого отрезка выделен его правый (левый) конец.

Предложение 4. *Сопоставление каждому отрезку его правого (левого) конца* $\mathbb{1}_{[a,b]} \mapsto [b]$ $(\mathbb{1}_{[a,b]} \mapsto [a])$ *однозначно продолжается до гомоморфизма алгебр*

$$\sup(\inf) : Z(V) \to \mathbb{Z}[\mathbb{R}],$$

коммутирующего с $\deg$. *Имеет место соотношение*

$$\inf = (-1)_* \circ \sup \circ (-1)_*.$$

Кроме того, точна последовательность

$$0 \to Z(V) \stackrel{(\sup,\inf)}{\to} \mathbb{Z}[\mathbb{R}] \oplus \mathbb{Z}[\mathbb{R}] \stackrel{(\deg,-\deg)}{\to} \mathbb{Z} \to 0.$$

Доказательство очевидно.

Отметим простой способ восстановления цепи α по ее верхней и нижней граням: пусть $\sup\alpha = \sum n_i[x_i]$, $\inf\alpha = \sum m_j[y_j]$. Теперь $\alpha = \sum n_i \mathbb{1}_{(-\infty,x_i]} + \sum m_j \mathbb{1}_{[y_j,\infty)} - \deg\alpha \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$.

4. Опорные функции выпуклых цепей. Конструкция опорной функции (п.1.3) может быть распространена по линейности на выпуклые цепи.

Определение 4. Функция $f : W \to \mathbb{Z}[\mathbb{R}]$, где W — линейное пространство, есть *кусочно-линейная* положительно–однородная функция, если существует набор кусочно–линейных положительно–однородных в обычном смысле функций $f_i : W \to \mathbb{R}$ и чисел $n_i \in \mathbb{Z}$ таких что $f(x) = \sum n_i[f_i(x)]$ для любого $x \in W$.

Определение 5. *Опорной функцией* выпуклой цепи $\alpha \in Z(V)$ назовем функцию

$$\Phi_\alpha : V^* \to \mathbb{Z}[\mathbb{R}],$$
$$\Phi_\alpha : l \mapsto \sup \circ l_*\alpha \in \mathbb{Z}[\mathbb{R}],$$

где $l \in V^*$ рассматривается как отображение линейных пространств $l : V \to \mathbb{R}$.

В явном виде, если $\alpha = \sum n_i \mathbb{1}_{A_i}$, то

$$\Phi_\alpha(l) = \sum n_i[\sigma_{A_i}(l)].$$

(Если $\Lambda \neq V$, то в определении кусочной линейности следует рассматривать $\mathbb{Z}[F]$-значные на Λ^* функции). Очевидно, Φ_α кусочно-линейна.

Предложение 5. *Сопоставление цепи ее опорной функции*

$$Z(V) \ni \alpha \mapsto \Phi_\alpha$$

есть коммутирующий с $\deg$ *изоморфизм алгебр* $Z(V)$ *и алгебры всех кусочно-линейных функций из* V^* *в* $\mathbb{Z}[\mathbb{R}]$.

Доказательство. Гомоморфность и коммутирование с $\deg$ очевидны. Сюръективность следует из того хорошо известного факта, что кусочно-линейная функция есть разность двух кусочно-линейных выпуклых функций, т.е. опорных функций выпуклых многогранников, предложения–определения 6 и теоремы 2 ниже. Инъективность будет установлена в § 4.

Следствие 1. *Пусть* $A_1, \dots, A_n$ *и* $B_1, \dots, B_m$ *— выпуклые многогранники, тогда* $\sum_{i=1}^{n}, \mathbb{I}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{I}_{B_j}$ *тогда и только тогда, когда для любого ковектора* $l \in V^*$ *наборы чисел* $(\sigma_{A_1}(l), \dots, \sigma_{A_n}(l))$ *и* $(\sigma_{B_1}(l), \dots, \sigma_{B_m}(l))$ *отличаются лишь перестановкой.*

5. Операции над выпуклыми цепями. Классические конструкции п.1.3 переносятся на произвольные цепи. Мы рассмотрим три операции: „звездочку“, „след“ и „тень“.

Операция „звездочка“ в п.1.3 была определена для конечно-аддитивных мер, однако она может быть реализована на уровне цепей. Как обычно, для $A \in \mathcal{P}(V)$ положим $\Gamma(A) = \{$множество всех граней A, включая $A\}$.

Предложение–определение 6. *Сопоставление*

$$\mathbb{I}_A \mapsto (-1)^{\dim A} \mathbb{I}_{\operatorname{Int} A} = \sum_{\Delta \in \Gamma(A)} (-1)^{\dim \Delta} \mathbb{I}_\Delta$$

продолжается до инволютивного автоморфизма аддитивной группы выпуклых цепей, обозначаемого $* : \alpha \mapsto *\alpha$.

Доказательство : см. § 4. Отметим, что равенство

$$(-1)^{\dim A} \mathbb{I}_{\operatorname{Int} A} = \sum_{\Delta \in \Gamma(A)} (-1)^{\dim \Delta} \mathbb{I}_\Delta$$

проверяется непосредственно.

Предложение–определение 7. *Операция взятия следа относительно ковектора* $\xi \in V^* \setminus \{0\}$, $\operatorname{Tr}_\xi : A \mapsto \operatorname{Tr}_\xi A$ *продолжается по линейности до кольцевого гомоморфизма*

$$\operatorname{Tr}_\xi : Z(V) \to Z(V).$$

Доказательство: см. § 4. Отметим, что соотношение

$$\operatorname{Tr}_\xi(A \oplus B) = \operatorname{Tr}_\xi A \oplus \operatorname{Tr}_\xi B$$

— мультипликативная гомоморфность — очевидно.

Нетрудно проверить, что след и звездочка коммутируют со взятием степени: $\deg = \deg \circ \operatorname{Tr}_\xi$, $\deg = \deg \circ *$.

Предложение–определение 8. *Тенью многогранника $A \in \mathcal{P}(V)$ в направлении вектора $v \neq 0$ называется множество*

$$T_v(A) = \{x \in A | x + tv \notin A \quad \text{при} \quad t > 0\}.$$

Очевидно, $T_v(A) \in Z(V)$. Операция взятия тени продолжается до линейного эндоморфизма $Z(V)$, сохраняющего степень.

Доказательство: см. § 4.

Отметим, что все три рассмотренные операции — звездочка, след и тень — переводят подгруппы Λ-цепей в себя.

6. Группа виртуальных многогранников. Операция „звездочка" имеет интересное приложение, проясняющее теорему 1.2 („теорему двойственности" для конечно-аддитивных мер). Оказывается, она осуществляет „обращение по Минковскому" выпуклых многогранников.

Теорема 2 (об обращении по Минковскому). *Для $A \in \mathcal{P}(V)$*

$$(-1)^{\dim A} \mathbb{I}_{\operatorname{Int}(-A)} * \mathbb{I}_A = \mathbb{I},$$

где $\mathbb{I} = \mathbb{I}_{\{0\}}$ — единица кольца $Z(V)$.

Доказательство будет дано в § 4.

Определение 7. Обратимый элемент $\alpha \in Z(V)$ степени 1 назовем *виртуальным многогранником*. Мультипликативную группу (относительно умножения по Минковскому) виртуальных многогранников обозначим через $\mathcal{P}^*(V)$ (соответственно $\mathcal{P}^*(\Lambda)$).

Следствие 2(*из теоремы 2*). *$\mathcal{P}^*(V)$ порождается индикаторами многогранников $\mathbb{I}_A$, $A \in \mathcal{P}(V)$. На самом деле вложение $\mathcal{P}(V) \subset \mathcal{P}^*(V)$ есть каноническое расширение коммутативной полугруппы с единицей и однозначным делением до группы.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathcal{P}^*(V)$. Рассмотрим соответствующую опорную функцию Φ_α. Очевидно, для любого $l \in V^*$ $\Phi_\alpha(l) \in \mathbb{Z}[\mathbb{R}]^*$ и $\deg \Phi_\alpha(l) = 1$. Но $\gamma \in \mathbb{Z}[\mathbb{R}]$ обратим тогда и только тогда, когда $\gamma = \pm[r]$ для $r \in \mathbb{R}$. Значит, $\Phi_\alpha = [f]$, где $f : V^* \to \mathbb{R}$ — кусочно-линейная функция. Как отмечалось выше, f есть разность опорных функций многогранников, $f = \sigma_A - \sigma_B$, $A, B \in \mathcal{P}(V)$. Но тогда получаем $\alpha = \mathbb{I}_A * (\mathbb{I}_B)^{-1}$, что и требовалось доказать.

8. Конечно-аддитивные меры выпуклых цепей.

Определение 8. *Конечно-аддитивной мерой* на $Z(V)$ назовем произвольный гомоморфизм аддитивных групп $\varphi : Z(V) \to M$. (Аналогично для $Z(\Lambda)$). Мера *инвариантна*, соответственно *полиномиальна степени* $\leqslant m$ (относительно сдвигов), если для любого $\alpha \in Z(V)$ имеем $\varphi(\tau_\lambda \alpha)$, $\lambda \in \Lambda$, не зависит, соответственно полиномиально степени $\leqslant m$ зависит от $\lambda \in \Lambda$, где $\tau_h : Z(V) \to Z(V)$ — оператор сдвига на вектор $h \in V$, $\tau_h \alpha(x) = \alpha(x - h)$.

В последнем случае можно считать, например, что M есть F-модуль и $\varphi(\tau_\lambda \alpha) : \Lambda \cong F^{\dim V} \to M_F$ есть полином в обычном смысле.

Итак, мы имеем два определения конечно-аддитивных мер — определения 1.2 и 2.7. Понятно, что любая мера на $Z(V)$ (или на $Z(\Lambda)$), ограниченная на $\mathcal{P}(V)$(соответственно $\mathcal{P}(\Lambda)$), дает меру в смысле первого определения — характеристические функции множеств удовлетворяют соотношению включения- исключения. Далее, мера на $Z(\Lambda)$ однозначно определяется ограничением на $\mathcal{P}(\Lambda)$. Естественно, возникает вопрос — любая ли мера продолжается с $\mathcal{P}(\Lambda)$ на $Z(\Lambda)$? Ответ утвердительный, и определения 1.2 и 2.7, таким образом, в сущности эквивалентны. Для случая, когда $F \subset \mathbb{R}$ — подполе, это — несложная проверка. Для случая, когда $\Lambda \subset V$ — дискретная решетка, это — нетривиальный факт, который может быть интерпретирован следующим образом. Пусть $\mathbb{Z}\langle\mathcal{P}(\Lambda)\rangle$ — свободная абелева группа, порожденная множеством всех многогранников с вершинами в Λ. Тогда ядро естественного гомоморфизма $\pi : \mathbb{Z}\langle\mathcal{P}(\Lambda)\rangle \to Z(\Lambda)$

$$\pi : \mathcal{P}(\Lambda) \ni A \mapsto \mathbb{I}_A$$

порождено соотношениями включения–исключения (п.1.2). Авторы умеют доказывать этот факт; соответствующее рассуждение будет опубликовано в другом месте. Оно опирается на технику конических представлений выпуклых цепей.

Алгебра выпуклых цепей была введена авторами как „универсальная мера" $\varphi : \mathcal{P}(V) \to Z(V)$, $\varphi : A \mapsto \mathbb{I}_A$. Что можно предложить в качестве „универсальной полиномиальной меры"? Пусть $J_k \subset Z(V)$ — подгруппа, порожденная цепями вида

$$(\tau_{h_1} - 1) \circ \cdots \circ (\tau_{h_k} - 1)(\alpha)$$

для всевозможных $(h_1, \ldots, h_k) \in V^{\times k}$ и $\alpha \in Z(V)$. Положим также $\mathcal{L} \subset Z(V)$ — идеал цепей степени 0, $\mathcal{L} = \operatorname{Ker} \deg$, $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}[V]$ — идеал (в $\mathbb{Z}[V]$) нульмерных цепей степени 0.

Предложение 9. *$J_k = \mathcal{M}^k Z(V)$. В частности, $\mathcal{L} \supset J_k$ — идеал.*

Доказательство. $(\tau_h - 1)\alpha = ([h] - [0]) * \alpha$, ч.т.д.

Очевидно, меры, полиномиальные степени $\leqslant k$, обращаются в нуль на J_{k+1} и обратно. Значит, гомоморфизм колец

$$\pi_k : Z(V) \to Z(V)/J_{k+1}$$

можно рассматривать как универсальную полиномиальную меру степени $\leqslant k$. Ее мы и будем изучать.

Центральным фактом нашей теории является

Теорема 3 (об идеалах в алгебре выпуклых цепей). *Для $k \geqslant 1$*

$$\mathcal{L}^{\dim V + k} \subset J_k.$$

(*Аналогично для любой допустимой пары* (V, Λ)).

Доказательству теоремы посвящен § 5.

Замечание. $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} J_k = \{0\}$, т.е. всякая ненулевая цепь $\alpha \notin J_k$ для достаточно большого k. Эти почти очевидно — достаточно для цепи $\alpha \neq 0$ построить такую полиномиальную меру φ, чтобы $\varphi(\alpha) \neq 0$. Умножением α на обратимый элемент можно добиться того, чтобы $\dim \operatorname{Supp} \alpha = \dim V$. Пусть гладкая функция $\tilde{f}$ подобрана так, чтобы $\int\limits_V \alpha(x)\tilde{f}(x)dx \neq 0$. Теперь если полином f приближает $\tilde{f}$ достаточно хорошо в ограниченной области, содержащей $\operatorname{Supp} \alpha$, то полиномиальная мера $\varphi(\beta) = \int\limits_V \beta(x) f(x)\, dx$ обладает нужным свойством.

Следствие 3 (из теоремы 3). *В фактор-кольце $Z(V)/J_k$ идеал элементов нулевой степени нильпотентен степени* $(\dim V + k)$.

Следствие 4. *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in Z(V)/J_k$ — классы степени* 1. *Положим $\tilde{\alpha}_j = \alpha_j - 1$, $\deg \tilde{\alpha}_j = 0$. Тогда для любых целых $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство в* $Z(V)/J_k$

$$\alpha_1^{*m_1} * \cdots * \alpha_r^{*m_r} = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r \in \mathbb{Z}_+ \\ \sum_{j=1}^{r} n_j \leqslant \dim V + k - 1}} \prod_{j=1}^{r} \frac{m_j(m_j-1)\ldots(m_j-n_j+1)}{n_j!} \tilde{\alpha}_1^{*n_1} * \cdots * \tilde{\alpha}_r^{*n_r}.$$

Доказательство следствия 4: это очевидно в силу предыдущего следствия. Учитывая, что виртуальные многогранники имеют степень 1, получаем

Следствие 5. *Конечно-аддитивная мера $\varphi : Z(V) \to M$, полиномиальная степени $\leqslant k$ относительно сдвигов, ограниченная на группу виртуальных многогранников $\varphi : \mathcal{P}^*(V) \to M$, есть полином степени* $\leqslant \dim V + k$.

В последнем утверждении содержится теорема 1 о полиномиальности меры при движении стенок и, в частности, вся классическая теория конечно-аддитивных мер.

Все изложение без изменений переносится на случай произвольных допустимых пар (V, Λ). В качестве приложения получаем

Следствие 6. *Пусть $\varphi : Z(\Lambda) \to M$ — полиномиальная степени $\leqslant k$ конечно-аддитивная мера, где $\Lambda \subset V$ — полная дискретная решетка, а M имеет структуру векторного пространства над $\mathbb{Q}$. Тогда φ однозначно продолжается до полиномиальной степени $\leqslant k$ конечно-аадитивной меры $\bar{\varphi} : Z(\bar{\Lambda}) \to M$, где $\bar{\Lambda} = \Lambda\mathbb{Q} \supset \Lambda$,* $\bar{\varphi}|_{Z(\Lambda)} = \varphi$.

Доказательство. Реализуем Λ как целочисленную решетку $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ — многогранник с рациональными вершинами (т.е. $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}^n)$). Тогда для некоторого $0 \neq N \in \mathbb{Z}_+$ $NA \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$. Но $\varphi(nNA) = p(n)$ для $n \in \mathbb{Z}_+$, где $p(t)$ — полином. Положим $\bar{\varphi}(A) = p(\frac{1}{N})$. Легко видеть, что $\bar{\varphi}$ определена корректно и является полиномиальной степени $\leqslant k$ конечно-аддитивной мерой на $Z(\mathbb{Q}^n)$, продолжающей φ. Следствие доказано.

Следующие три параграфа работы носят технический характер и содержат пропущенные нами доказательства ключевых утверждений теории выпуклых цепей.

§ 3. Интеграл по эйлеровой характеристике

Концепция интегрирования по эйлеровой характеристике имеет очень древние корни и неявно присутствует в доказательствах многих классических теорем (например, см. доказательство теоремы Римана–Гурвица в [6], с. 239). В современной форме эта теория была развита О.Я.Виро [7]. Здесь мы приведем в нужной нам (упрощенной) форме необходимые определения, факты и конструкции. Новых результатов данный параграф не содержит и включен в работу только для удобства читателя.

1. Определение 1. Пусть X — топологическое пространство.

А) Если X компактно, то *регулярной клеточной структурой* на X назовем структуру конечного клеточного комплекса

$$X = \bigcup_{q\in\mathbb{Z}_+} \bigcup_{i\in I_q} e_i^q$$

с дополнительными свойствами:

(i) характеристическое отображение любой клетки есть гомеоморфизм замкнутого шара на ее замыкание;

(ii) граница любой клетки распадается в объединение клеток меньшей размерности.

Множества, представимые объединением клеток, назовем *клеточными*.

Б) Если X произвольно, то *регулярной клеточной структурой* на X назовем следующий набор данных:

(i) плотное вложение $X \subset \tilde{X}$, где $\tilde{X}$ компактно;

(ii) регулярная клеточная структура на $\tilde{X}$, относительно которой X — открытое (плотное) клеточное подмножество.

Клеточные подмножества X определяются очевидным образом.

В) На алгебре клеточных подмножеств пространства X с регулярной клеточной структурой определим конечно-аддитивную меру χ, положив для открытой клетки $e \subset X$ $\chi(e) = (-1)^{\dim e}$. Эту меру назовем *эйлеровой характеристикой*.

Так определенная эйлерова характеристика зависит от произвола в выборе регулярной клеточной структуры. Этот произвол, однако, формальный.

Предложение 1. *Пусть $Z \subset X$ — подмножество, замыкание $\bar{Z}$ которого компактно и на X существует хотя бы одна регулярная клеточная структура, относительно которой Z — клеточное. Тогда эйлерова характеристика $\chi(Z)$ определена и не зависит от выбора этой структуры.*

Набросок доказательства. Пусть сначала Z компактно. Если Z клеточное, то нетрудно понять, что $\chi(Z)$ в смысле определения 1 есть $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \dim H^i(Z,\mathbb{R})$

и потому не зависит от выбора регулярной клеточной структуры. Если Z не обязательно компактно, то построим серию клеточных (относительно какой-либо фиксированной регулярной структуры) множеств $Z^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+ : Z^{(0)} = Z$, $Z^{(i+1)} = \overline{Z^{(i)}} \setminus Z^{(i)}$. Очевидно, что $\overline{Z^{(i)}}$ компактны и $Z^{(i)} = \varnothing$ для $i \gg 0$ (потому что $Z^{(i+1)}$ состоит из клеток меньшей размерности, чем максимум размерностей клеток, составляющих $Z^{(i)}$). Отсюда получаем $\chi(Z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(-1)^i\chi(\bar{Z}^{(i)})$, а для $\bar{Z}^{(i)}$ инвариантность χ уже доказана.

Определение 2. Пусть X — топологическое пространство с регулярной клеточной структурой, A — абелева группа. Функция $F : X \to A$ *клеточная*, если $F^{-1}(a)$ — клеточное множество для любого $a \in A$ (в частности, f конечнозначна), а ее *интеграл по эйлеровой характеристике* есть

$$\int\limits_X f d\chi := \sum_{a\in A} \chi(f^{-1}(a))a \in A.$$

Определение 3. Функцию $f : X \to A$, где X — топологическое пространство, A — абелева группа, назовем *допустимой*, если она клеточная относительно некоторой регулярной клеточной структуры на X.

Следствие 1(из предложения 1). 1. *Для допустимой функции $f : X \to A$ с компактным носителем ее интеграл по эйлеровой характеристике $\int\limits_X f\,d\chi$ не зависит от выбора регулярной клеточной структуры на X.*

2. Пусть $F : X \to A$ — допустимая функция, $\Phi : X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Если на каждом слое $X_y = \Phi^{-1}(y)$, $y \in Y$, задана регулярная клеточная структура, относительно которой $f_y = f|_{X_y}$ — клеточная, то определен „прямой образ“ f: $\Phi_*f : Y \to A$, $\Phi_*f(y) = \int\limits_{X_y} f\,d\chi$. Эта операция будет осмысленной, если Φ_*f — результат „послойного интегрирования“ — снова будет допустима. Мы приведем достаточные условия для этого.

Определение 4. А) Непрерывное отображение $\Phi : X \to Y$ пространств с регулярной клеточной структурой *клеточное*, если Φ эпиморфно отображает каждую клетку $e \subset X$ на некоторую клетку $h \subset Y$.

Б) *Прямое произведение* пространств с регулярной клеточной структурой определяется перемножением клеток.

В) Пусть $\Phi : X \to Y$ — непрерывное отображение пространств с регулярной клеточной структурой. Следующий набор данных назовем *структурой расслоения* для Φ: для каждой клетки $e \subset Y$ пространство F_e с регулярной клеточной структурой и гомеоморфизм $\Phi_e : \Phi^{-1}(e) \to F_e \times e$ такие, что Φ_e и Φ_e^{-1} клеточные.

Г) Клеточная функция $f : X \to A$ согласована со структурой расслоения для Φ, если для любой клетки $e \subset Y$ существует клеточная функция $f_e : F_e \to A$ такая, что $f|_{\Phi^{-1}(e)} = f_e \circ \mathrm{pr}_1 \circ \Phi_e$.

Предложение 2 („Теорема Фубини“). *В ситуации, описанной в частях* В) *и* Г) *последнего определения, имеем: функция* $\Phi_* f : Y \to A$,

$$\Phi_* f(y) = \int\limits_{\Phi^{-1}(y)} f\, d\chi = \int\limits_{F_e} f_e\, d\chi, \quad y \in e \subset Y,$$

клеточная и выполняется соотношение

$$\int\limits_{Y} \Phi_* f\, d\chi = \int\limits_{X} f\, d\chi.$$

Иначе говоря, функцию можно проинтегрировать сначала по слоям отображения, а затем результат этой операции — функцию на базе — проинтегрировать по базе.

Доказательство предложения 2 очевидно.

Понятно, что операция „прямого образа“ связана с конкретной структурой расслоения лишь своей осуществимостью, но результат ее от такой структуры не зависит (предложение 1).

Определение 5. Скажем, что допустимая функция $f : X \to A$ согласована с расслоением $\Phi : X \to Y$, если для Φ существует такая структура расслоения, что f с ней согласована.

3. Преобразование Радона для интеграла по эйлеровой характеристике. Пусть $X = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $X^* = \mathbb{R}\mathrm{P}^{n^*}$ — двойственное проективное пространство (т.е. точки X^* — гиперплоскости в X), $Z \subset X \times X^*$ — график отношения инцидентности: $\{(x,h) | x \in h\}$. Скажем, чо допустимая функция $f : X \to A$ *допускает преобразование Радона*, если функция $\operatorname{res}_Z \circ \operatorname{pr}_1^*(f) : Z \to A$ согласована с расслоением $\operatorname{pr}_2 : Z \to X^*$. Если это так, ее *преобразованием Радона* называется функция $f^* : X^* \to A$,

$$f^* = (\operatorname{pr}_2)_* \circ \operatorname{res}_Z \circ \operatorname{pr}_1^*(f),$$

т.е. $f^*(h) = \int_h f d\chi$ для гиперплоскости $h \subset X$.

Теорема 1. *Если f допускает преобразование Радона и f^* обладает этим свойством, то имеет место тождество*

$$f^{**} + f = \int\limits_X f d\chi = \int\limits_{X^*} f^* d\chi \text{ при четных } n = \dim X,$$
$$f^{**} = f \text{ при нечетных } n = \dim X.$$

В частности, функция восстанавливается по своему преобразованию Радона.

Набросок доказательства. Для $x \in X$ положим

$$W_x = \{(y,h) \in X \times X^* | y \in h \ni x\}.$$

Очевидно,

$$f^{**}(x) = \int\limits_{\{h\in X^*|x\in h\}} f^*(h)d\chi(h) =$$

$$= \int\limits_{\{h\in X^*|x\in h\}} \int\limits_{\{y\in X|y\in h\}} f(y)d\chi(y)d\chi(h).$$

По теореме Фубини $f^{**}(x) = \int\limits_{W_x} \mathrm{pr}_1^*(f)d\chi$. С другой стороны, проекция на первый сомножитель $\mathrm{pr}_1 : W_x \to X$ расслаивает $W_x \setminus \mathrm{pr}_1^{-1}(x)$ над $X \setminus \{x\}$ со слоем $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-2}$, причем, очевидно, $\mathrm{pr}_1^*(f)$ постоянна на слоях pr_1. Наконец, $\mathrm{pr}_1^{-1}(x) \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$. Снова применяя теорему Фубини (теперь для отображения $\mathrm{pr}_1 : W_x \to X$), получаем

$$f^{**}(x) = \int\limits_{W_x\setminus \mathrm{pr}_1^{-1}(x)} \mathrm{pr}_1^* f\, d\chi + \int\limits_{\mathrm{pr}_1^{-1}(x)} \mathrm{pr}_1^* f\, d\chi =$$

$$= \chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-2}) \int\limits_{X\setminus\{x\}} f(y)d\chi(y) + \chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1})f(x) =$$

$$= \chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-2}) \int\limits_X f\, d\chi + (\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) - \chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-2}))f(x).$$

При m четном $\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^m) = 1$, а при m нечетном $\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^m) = 0$. Теорема доказана.

4. Описанное „интегрирование“ весьма специфично. Нетрудно заметить, что все громоздкие наборы данных, определяющих клеточность или допустимость и т.д., необходимы лишь для обоснования возможности интегрирования, а его результат от этих данных совершенно не зависит. Само употребление термина „интеграл“ связано с тем, что данная операция хорошо согласуется с привычной концепцией интегрирования, ею можно пользоваться в соответствии с обычной интуицией. Например, нетрудно проверить, что интеграл по эйлеровой характеристике — линейная операция:

$$\int\limits_X (\alpha f_1 + \beta f_2)d\chi = \alpha \int\limits_X f_1 d\chi + \beta \int\limits_X f_2 d\chi,$$

но необходимо помнить, что написанная формула имеет смысл только тогда, когда на X существует такая регулярная клеточная структура, что относительно нее f_1 и f_2 (и $(\alpha f_1 + \beta f_2)$ тем самым) допустимы. Подобные обстоятельства заставляют сделать выбор: либо ограничиться (неизбежно достаточно узким) классом рассматриваемых множеств и функций, так чтобы любой конечный набор функций был бы автоматически допустим, либо в формулировке каждой теоремы оговаривать условия, при которых ее утверждение и доказательство имеют смысл. Мы пошли по первому пути, рассматривая в качестве функций только имеющие вид $f = \sum n_i \mathbb{I}_{A_i}$, где $A_i \in \mathcal{P}(V)$. Понятно, что для этих функций обоснование возможности интегрирования по эйлеровой характеристике (включая надлежащую компактификацию V) тривиально, и

$$\int_V f\,d\chi = \sum n_i = \deg f$$

в смысле предложения–определения 2.1, которое тем самым доказано.

Отметим, что предложение–определение 2.1 нетрудно доказать и непосредственно: с каждым набором гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_n \subset V$ связано естественное разбиение V на открытые клетки различной размерности, и для функции, постоянной на каждой клетке, можно определить интеграл, полагая меру каждой клетки Δ равной $(-1)^{\dim \Delta}$. Теперь индукция по числу разбивающих гиперплоскостей дает требуемое утверждение. „Теорема Фубини" для линейных отображений линейных пространств становится совсем тривиальной, когда в качестве функций берутся выпуклые цепи. Мы могли бы, таким образом, вообще не обращаться к интегралу по эйлеровой характеристике, а провести все доказательства на элементарном уровне. Однако мы привлекли эту технику по двум причинам: во-первых, доказательства (см. следующий параграф) становятся особенно прозрачными, если использовать интуицию „интегрирования", а во-вторых, конструкции и утверждения данной работы имеют силу в гораздо более общей ситуации, чем та, которую мы рассматриваем, а именно, всегда, когда применима техника интегрирования по эйлеровой характеристике. Например, „опорную функцию", пользуясь рецептом определения 2.5, можно сопоставить геометрической фигуре из очень широкого класса, причем исходная фигура может быть восстановлена по своей опорной функции. Доказательства, которые мы даем, автоматически переносятся на общий случай, но с многочисленными оговорками, необходимыми всякий раз, когда используется интеграл по эйлеровой характеристике.

Таким образом, стремление авторов данной работы к упрощению изложения привело к тому, что мы ведем речь практически только о выпуклых цепях, подразумевая, однако, обобщения: на случай Λ-цепей и на случай функций гораздо более общего вида.

§ 4. Инвариантные конструкции

Данный раздел носит технический характер. С помощью описанного в § 3 аппарата интегрирования по эйлеровой характеристике мы доказываем основные факты теории выпуклых цепей (за исключением теоремы 2.3).

1. Как отмечалось в предыдущем разделе, для доказательства предложения–определения 2.1 достаточно заметить, что степень цепи есть ее интеграл по эйлеровой характеристике. Аналогичным образом, для доказательства предложения–определения 2.2 достаточно усмотреть, что (в принятых в п.2.2 обозначениях)

$$f_*\alpha(y) = \int_{f^{-1}(y)} \alpha\,d\chi$$

для любого $y \in W$, так что равенство $\deg f_*\alpha = \deg \alpha$ есть следствие теоремы Фубини.

Доказательство предложения–определения 2.3. Зададим на $Z(V)$ операцию свертки относительно интегрирования по эйлеровой характеристике

$$\alpha * \beta(x) = \int_V \alpha(z)\beta(x-z)d\chi(z)$$

и покажем, что такое инвариантное определение совпадает с неинвариантным из п. 2.2, и проверим выполнение свойств этого умножения. Пусть $\mu : V \times V \to V$ — отображение сложения, как и в § 2, для $\alpha, \beta \in Z(V)$ положим $\alpha \times \beta(x,y) = \alpha(x)\beta(y)$, $\alpha \times \beta \in Z(V \times V)$. Очевидно, $\alpha * \beta = \mu_*(\alpha \times \beta)$. Если $A, B \in \mathcal{P}(V)$, то $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\times B}$. Имеем

$$\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad A \times B \cap \mu^{-1}(x) \neq \varnothing, \quad \text{т.е.} \quad x \in A \oplus B, \\ 0 & \text{в противном случае,} \quad \text{т.е.} \quad x \notin A \oplus B. \end{cases}$$

Гомоморфность f_* и deg следуют из теоремы Фубини. Проверим это для прямого образа. Пусть $f : V \to W$ линейно, тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{(f,f)} & W \times W \\ {\scriptstyle \mu_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_W} \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

Пусть $\alpha, \beta \in Z(V)$; $\alpha * \beta$ получается интегрированием $\alpha \times \beta$ на слоях μ_V, а $f_*(\alpha * \beta)$ интегрированием $\alpha * \beta$ на слоях f, так что в итоге

$$f_*(\alpha * \beta)(x) = \int_{(f\circ\mu_V)^{-1}(x)} \alpha \times \beta d\chi, x \in W$$

(теорема Фубини). Аналогично

$$(f_*\alpha) * (f_*\beta)(x) = \int_{\mu_W^{-1}(x)} f_*\alpha \times f_*\beta d\chi =$$

$$= \int_{\mu_W^{-1}(x)} (f,f)_*(\alpha \times \beta) d\chi = \int_{(\mu_W\circ(f,f))^{-1}(x)} \alpha \times \beta d\chi,$$

что и требовалось. Предложение–определение 2.3 доказано.

2. В п.2.4 была определена опорная функция выпуклой цепи. Недоказанной осталась инъективность гомоморфизма

$$Z(V) \ni \alpha \mapsto \Phi_\alpha : V^* \to \mathbb{Z}[\mathbb{R}],$$

сопоставляющего цепи опорную функцию. Мы приведем несколько рассуждений, чтобы прояснить связь между этими двумя объектами.

Первый способ доказательства дает преобразование Радона. Каждую цепь $\alpha \in Z(V)$ можно рассматривать как функцию $\alpha : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{Z}$, $V \subset \mathbb{R}P^n$, $n = \dim V$, доопределяя нулем на бесконечно удаленной гиперплоскости $\mathbb{R}P^n \backslash V$. Преобразование Радона для α всегда допустимо и его результат есть функция $\alpha^* : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{Z}$, также допускающая преобразование Радона, причем α восстанавливается по α^*. Выясним связь между α^* и Φ_α. Рассмотрим прямую $\langle l \rangle \subset V^*$, $l \in V^* \backslash \{0\}$. Отображение $l : V \to \mathbb{R}$ расслаивает V на гиперплоскости $\{l = \text{const}\}$. Понятно, что $l_*\alpha(t) = \alpha^*(l^{-1}(t))$ для $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, α^* определяет опорную функцию. С другой стороны, согласно предложению 2.4, примененному к $\Phi_\alpha(l)$ и $\Phi_\alpha(-l)$, верно и обратное — по опорной функции восстанавливается преобразование Радона, а тем самым и исходная цепь.

Второй способ доказать инъективность сопоставления $\alpha \mapsto \Phi_\alpha$ — явно построить обратное отображение. Пусть

$$I_\geqslant : \mathbb{Z}[\mathbb{R}] \times \mathbb{Z}[\mathbb{R}] \to \mathbb{Z}$$

— билинейное отображение такое, что

$$I_\geqslant([a],[b]) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a \geqslant b, \\ 0, & \text{если} \quad a < b. \end{cases}$$

Тогда имеет место равенство

$$\alpha(x) = (-1)^{\dim V} \int\limits_{V^*} I_\geqslant(\Phi_\alpha(l), [x(l)])d\chi$$

для $x \in V$, $x(l) = l(x)$. Несложная проверка оставляется читателю.

В качестве третьего способа доказательства взаимной однозначности соответствия между цепями и их опорными функциями мы приведем явную геометрическую конструкцию, восстанавливающую цепь по опорной функции. Рассмотрим сначала один пример.

Пусть $A \in \mathcal{P}(V)$ — выпуклый многогранник, $\langle A \rangle = V$, $F \subset A$ — его любая грань. С ней связан замкнутый выпуклый конус $C(F)$, содержащий аффинное подпространство $\langle F \rangle$, определяемый условием, что в малой окрестности любой точки $x \in \operatorname{Int} F$, скажем $U \ni x$, имеем $C(F) \cap U = A \cap U$. Из „тождества Эйлера" легко вывести, что для $x \in A$

$$\sum_{F \in \Gamma(A)} (-1)^{\dim F} \mathbb{I}_{C(F)}(x) = 1.$$

На самом деле верно утверждение

$$\sum_{F \in \Gamma(A)} (-1)^{\dim F} \mathbb{I}_{C(F)} = \mathbb{I}_A.$$

Мы докажем существенно более общее утверждение. Для этого допустим в качестве рассматриваемых функций характеристические функции (неограниченных) замкнутых выпуклых конусов в V и их линейные комбинации. Пусть $C \subset V$ — конус. Условимся о некоторых понятиях и обозначениях: $vs(C) \subset C$ — вершинное подпространство конуса; $\hat{vs}(C)$ — сдвиг $vs(C)$ на любой вектор из $(-vs(C))$, так что C инвариантен относительно сдвигов на вектора из $\hat{vs}(C)$, $L^{\perp} \subset V^*$ — аннулятор линейного подпространства $L \subset V$, $\hat{C} \subset V$ — сдвиг конуса C на любой вектор из $-vs(C)$, $\hat{C}^* = \{l \in V^* | (l \cdot v) \leqslant 0$ для всех $v \in \hat{C}\}$ — двойственный к $\hat{C}$ конус, очевидно, $\hat{C}^* \subset \hat{vs}(C)^{\perp}$; $\operatorname{Int} C$ — относительная (в $\langle C \rangle$) внутренность C.

Заметим, что вся техника интегрирования по эйлеровой характеристике применима без изменения к данному, более широкому, классу функций, включающему характеристические функции конусов. Вычислим прежде всего преобразование Радона функции $1\!\!1_C$.

Предложение 1. *Пусть $H \subset V$ — аффинная гиперплоскость. Тогда*

$$\int_H 1\!\!1_C d\chi = \chi(C \cap H) = (-1)^{\dim vs(C)},$$

если H может быть задана уравнением $h = \mathrm{const}$, $h \in \operatorname{Int} \tilde{C}^*$ и $H \cap C \neq \varnothing$. В противном случае $\chi(C \cap H) = 0$.

Доказательство очевидно.

Для $l \in \tilde{C}^*$ определено число $\max\limits_{v \in C} l(v)$, равное, очевидно, значению l на любом векторе из вершинного пространства $vs(C)$. Сопоставим конусу $C \subset V$ пару $(\tilde{C}^*, f_C)$, где $f_C : \tilde{C}^* \ni l \mapsto l(vs(C))$. Эта пара играет роль опорной функции конуса C. В силу сказанного выше преобразование Радона характеристической функции исходного конуса есть $1\!\!1_C^* = (-1)^{\dim vs(C)}$, если гиперплоскость задается уравнением $h = \gamma$, $h \in \operatorname{Int} \tilde{C}^*$, $\gamma \leqslant f_C(h)$, и равно 0 в противном случае.

Итак, мы установили взаимно-однозначное соответствие между конусами в V и линейными функциями на конусах в V^*. Восстанавливающая C по паре $(\tilde{C}^*, f_C)$. процедура выглядит так: необходимо взять конус $(\tilde{C}^*)^* \subset V$ и сдвинуть его на вектор $x \in V$ такой, что $x|_{\tilde{C}^*} = f_C$ при отождествлении V с V^{**}. Другими словами, вершинное пространство $vs(C)$ есть решение системы уравнений $\{l(x) = f_C(l) | l \in \tilde{C}^*\}$.

Пусть теперь $f : V^* \to \mathbb{Z}[\mathbb{R}]$ — непрерывная кусочно-линейная (определение 2.5) функция. Существует такой набор замкнутых выпуклых конусов F_i, $i = 1, \ldots, N$, что

(i) внутренности различных конусов $\operatorname{Int} F_i$ не пересекаются;

(ii) $V^* = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \operatorname{Int} F_i$ и $0 \in vs(F_i)$, $1 \leqslant i \leqslant N$ (такие наборы конусов называются *разбиениями* двойственного пространства V^*);

(iii) $f|_{F_i}$ линейна для каждого i, т.е. существует такая нульмерная цепь $x_i \in \mathbb{Z}[V]$, что $f|_{F_i} = x_i|_{F_i}$, т.е. если $x_i = \sum t_{ik}[x_{ik}]$, $x_{ik} \in V = V^{**}$, то для ковектора $l \in F_i$

имеем $f(l) = \sum t_{ik}[l(x_{ik})] \in \mathbb{Z}[\mathbb{R}]$. (Если выполняются условия (i)–(iii), то скажем, что функция f линейна в разбиении $\{F_i | i = 1, \ldots, N\}$ пространства V^*).

Пусть $C_i \subset V$ — замкнутый конус, двойственный к F_i.

Согласно предложению 2.5, уже доказанному, f есть опорная функция некоторой выпуклой цепи $\alpha \in Z(V)$.

Предложение 2. *Имеет место равенство*

$$(-1)^{\dim V}\alpha = \sum_{i=1}^{N} x_i * \mathbb{1}_{C_i} \cdot (-1)^{\dim F_i}.$$

Доказательство почти тривиально: восстановим по опорной функции f преобразование Радона цепи α и вычислим преобразование Радона цепи, выписанной справа, согласно предложению 1. Их совпадение и будет означать справедливость нашего утверждения. А это совпадение в свою очередь достаточно проверить на каждой прямой вида $\{l = t | t \in \mathbb{R}\}$, $l \in V^* \backslash \{0\}$. Заметим, что каждая такая прямая пересекается ровно с тремя из открытых конусов $\operatorname{Int} F_i$: с $\{0\}$ и двумя положительной размерности (открытость подразумевается в аффинной оболочке). Далее, предложение достаточно доказать для однозначной кусочно-линейной функции $f : V^* \to \mathbb{R}$. Детальное проведение рассуждений до конца оставляем читателю: мы уже фактически свели его к одномерному случаю, а здесь оно очевидно (см. п.2.3).

На этом мы закончим обсуждение опорных функций. Сделаем в заключение одно замечание, технически примыкающее к последним построениям. Характеристические функции конусов удобны для описания мультипликативной (по Минковскому) структуры алгебры выпуклых цепей. Они дают нечто вроде „разложения единицы“. Пусть C_1, $C_2 \subset V$ — замкнутые выпуклые конусы. В обозначениях, принятых выше, имеем

Предложение 3. (i) $\mathbb{1}_{C_1} * \mathbb{1}_{C_2} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{C}_1 \cap (-\tilde{C}_2) \neq \hat{vs}(C_1) \cap \hat{vs}(C_2)$ *(т.е. левая часть строго содержит правую). Последнее эквивалентно тому, что* $\operatorname{Int} \tilde{C}_1^* \cap \operatorname{Int} \tilde{C}_2^* = \varnothing$.

(ii) *Если* $\tilde{C}_1 \cap (-\tilde{C}_2) = \hat{vs}(C_1) \cap \hat{vs}(C_2)$, *то*

$$\mathbb{1}_{C_1} * \mathbb{1}_{C_2} = (-1)^{\dim \hat{vs}(C_1) \cap \hat{vs}(C_2)} \mathbb{1}_{C_1 \oplus C_2},$$

где $\oplus$ *— как обычно, сумма по Минковскому.*

Доказательство. Это простые, геометрически почти очевидные факты. Конус C_i есть прямое произведение $\hat{vs}(C_i)$ на конус, вершина которого — точка; это сводит все к конусам последнего типа. Если $\tilde{C}_1 \cap (-\tilde{C}_2) \neq \{0\}$ (мы считаем, что вершины C_i — точки), то $C_1 \cap (x - C_2)$ для любого $x \in V$ есть либо $\varnothing$, либо замкнутое выпуклое неограниченное множество; его эйлерова характеристика равна нулю. Если же $\tilde{C}_1 \cap (-\tilde{C}_2) = \{0\}$, то $C_1 \cap (x - C_2)$ для любого $x \in V$ либо пусто ($x \notin C_1 \oplus C_2$), либо есть замкнутый выпуклый ограниченный многогранник. Остальное очевидно.

Следствие 1. *Пусть* $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{N}(-1)^{\dim L_i} n_i \mathbb{I}_{C_i}$, $\beta = \sum\limits_{i=1}^{N}(-1)^{\dim L_i} m_i \mathbb{I}_{D_i}$ *— функции, причем* $L_i = \hat{vs}(C_i) = \hat{vs}(D_i)$, $\tilde{C}_i = \tilde{D}_i$ *для* $i = 1, \ldots, N$, *и конуса* $\tilde{C}_i^*$, $1 \leqslant i \leqslant N$, *дают разбиение пространства* V^*. *Тогда*

$$\alpha * \beta = \sum_{i=1}^{N}(-1)^{\dim L_i} n_i m_i \mathbb{I}_{C_i \oplus D_i}.$$

3. Дадим инвариантное определение трем операциям над выпуклыми цепями — „звездочке“, „следу“ и „тени“.

„Звездочка“. Положим $B_\varepsilon(x)$ — открытый шар радиуса ε с центром в точке x относительно какой-либо евклидовой метрики на V. Тогда

$$*\alpha(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int\limits_{B_\varepsilon(x)} \alpha d\chi.$$

Проверка равенства $*\mathbb{I}_A = (-1)^{\dim A}\mathbb{I}_{\mathrm{Int}\, A}$ для $A \in \mathcal{P}(V)$ тривиальна. Этим предложение–определение 2.6 доказано.

„След“. Положим для $\xi \in V^* \backslash \{0\}$

$$U_{\xi,\varepsilon} = B_\varepsilon(x) \cap \{y | \xi(y) \geqslant \xi(x)\}$$

— полушар. Тогда

$$*\operatorname{Tr}_\xi \alpha(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int\limits_{U_{\xi,\varepsilon}(x)} \alpha d\chi.$$

Этим доказано предложение–определение 2.7.

„Тень“. Для вектора $v \in V \backslash \{0\}$ положим

$$L_{v,\varepsilon}(x) = \{tv + x | 0 \leqslant t < \varepsilon\}$$

— полуотрезок. Тогда

$$T_v \alpha(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int\limits_{L_{v,\varepsilon}(x)} \alpha d\chi.$$

Нетрудно проверить, что тень многогранника гомеоморфна замкнутому шару (настоящая тень, если „освещение“ — параллельные лучи), и поэтому ее эйлерова характеристика равна 1. Этим полностью доказано предложение–определение 2.8.

Рассмотрим некоторые приложения этих конструкций. Докажем теорему 2.2 об обращении по Минковскому: для $A \in \mathcal{P}(V)$

$$*\mathbb{I}_{(-A)} * \mathbb{I}_A = 1.$$

В самом деле,

$$\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_{\mathrm{Int}\,(-A)}(x) = \int\limits_{v+w=x} \mathbb{1}_A(v)\mathbb{1}_{\mathrm{Int}\,(-A)}(w)d\chi =$$

$$= \int\limits_V \mathbb{1}_{(-A+x)}\mathbb{1}_{\mathrm{Int}\,(-A)}d\chi = \chi((-A+x)\cap \mathrm{Int}\,(-A)).$$

Если $x=0$, то получаем $(-1)^{\dim A}$. Если $x\neq 0$, то получаем 0: если $(-A+x)\cap \mathrm{Int}\,(-A)\neq\varnothing$, то

$$(-A+x)\cap \mathrm{Int}\,(-A) = [\mathrm{Int}\,(-A+x)\cap \mathrm{Int}\,(-A)]\cup[\partial(-A+x)\cap \mathrm{Int}\,(-A)].$$

Легко видеть, что эйлерова характеристика множества в первых квадратных скобках есть $(-1)^{\dim A}$, во-вторых, — $(-1)^{\dim A+1}$, что и требовалось.

Обратимся к операции взятия следа. Заметим, что след связан с опорной функцией: для цепи $\alpha\in Z(V)$ и общего ковектора $\xi\in V^*\{0\}$ имеем $\Phi_\alpha(\xi)=\xi_*\,\mathrm{Tr}_\xi\,\alpha$. Интересное приложение операции Tr возникает в следующей задаче.

Определение 1. Назовем многогранники $A,B\in\mathcal{P}(V)$ эквивалентными, если $\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B\in J_1$ (см. п.2.7).

Неформально говоря, это означает, что A и B можно так разбить на части, что части одного многогранника будут сдвигами частей другого. При этом учитываются части любой размерности.

Оказывается, данное понятие эквивалентности имеет тривиальное содержание.

Предложение 4. *Условие $\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B\in J_1$ для $A,B\in\mathcal{P}(V)$ выполняется тогда и только тогда, когда A и B отличаются сдвигом: $A=v+B$, $v\in V$.*

Доказательство. Очевидно, для любого ковектора $l\in V^*\backslash\{0\}$ $\mathrm{Tr}_l(J_1)\subset J_1$, что позволяет применить индукцию по размерности с учетом того, что след многогранника есть многогранник (меньшей размерности). Подробные рассуждения оставляем читателю.

Понятие тени также имеет важные приложения: с его помощью доказывается основная теорема настоящей работы (теорема 2.3 об идеалах в алгебре выпуклых цепей): см. следующий параграф. Кроме упомянутой теоремы, мы доказали все утверждения, заявленные в § 2.

Подчеркнем, что все конструкции и рассуждения данного раздела без какихлибо изменений переносятся на случай Λ-цепей для произвольной допустимой пары (V,Λ).

§ 5. Доказательство теоремы об идеалах

1. Мы пользуемся всеми обозначениями п.2.7 и § 4.

Определение 1. Векторы $v_i\in V$, $i\in I$, *положительно зависимы*, если существуют такие $\lambda_i\geqslant 0$, $i\in I$, не все равные нулю, что

$$\sum_{i\in I}\lambda_i v_i = 0.$$

Теорема об идеалах в алгебре выпуклых цепей выводится из следующего важного утверждения.

Теорема 1 (теорема о тенях). *Пусть $v_i \neq 0$, $i \in I$, положительно зависимы. Тогда имеем*

$$\underset{i\in I}{*}(T_{v_i} - \mathrm{id})\alpha_i = 0$$

для любого набора цепей $\alpha_i \in Z(V)$, $i \in I$.

Доказательство теоремы о тенях. Положим, как обычно, V^I — линейное пространство V-значных функций на I. Распишем

$$\underset{i\in I}{*}(T_{v_i}\alpha_i - \alpha_i)(x) = \int\limits_{V_x^I} \prod_{i\in I}(T_{v_i}\alpha_i - \alpha_i)d\chi,$$

где $V_x^I \subset V^I$ есть $\{(w_i|i \in I)| \sum_{i\in I} w_i = x\}$. Пусть $L_i = \langle v_i \rangle \subset V$, $H_i \subset V$ — произвольно выбранное дополнительное подпространство, $V = L_i \oplus H_i$ и $\pi_i : V \to H_i$ — проекция вдоль L_i, $\nu_i : V \to L_i$ — проекция вдоль H_i, $\pi_i + \nu_i = \mathrm{id}_V$. Положим также

$$\gamma = \prod_{i\in I}(T_{v_i}\alpha_i - \alpha_i) \in Z(V^I)$$

— цепь, которую нужно проинтегрировать по V_x^I.

Рассмотрим отображение

$$\pi = \prod_{i\in I}\pi_i : V_x^I \to \prod_{i\in I} H_i.$$

По теореме Фубини мы можем сначала проинтегрировать γ по слоям π, а затем получившуюся функцию — по $\prod\limits_{i\in I} H_i$. Значит, достаточно доказать, что $\int\limits_{\pi^{-1}(h)} \gamma d\chi = 0$, где $h = (h_i|i \in I) \in \prod\limits_{i\in I} H_i$.

Теперь отображение

$$\nu = \prod_{i\in I}\nu_i : V^I \to \prod_{i\in I} L_i$$

вкладывает $\pi^{-1}(h)$ в качестве подпространства, задаваемого уравнением $\sum\limits_{i\in I} u_i = x - \sum\limits_{i\in I} h_i$. При этом ν есть на самом деле сдвиг на h, так что $\int\limits_{\pi^{-1}(h)} \gamma d\chi = \int\limits_{\prod_{i\in I} L_i} \tau_h \gamma d\chi$, а поскольку сдвиг и тень, очевидно, коммутируют, получаем, что достаточно доказать, что $\int\limits_{\prod_{i\in I} L_i} \prod_{i\in I}(T_{v_i} - \mathrm{id})\alpha_i d\chi = 0$, где $\alpha_i \in Z(L_i)$ — цепи на прямых L_i. Ввиду полилинейности по α_i достаточно считать α_i отрезками; тогда $(T_{v_i} - \mathrm{id})\alpha_i$ — это просто отрезок без того конца, куда направлен вектор v_i.

Лемма 1 (о положительной зависимости). *Пусть $w_i \in V$, $i \in I$, ненулевые положительно зависимые векторы. Тогда*

$$\underset{i\in I}{*}\mathbb{1}_{[0,w_i)} = 0.$$

Очевидно, лемма завершает доказательство теоремы о тенях.

Доказательство леммы. Имеем

$$\underset{i\in I}{*}\mathbb{1}_{[0,w_i)}(x) = \chi(\{t_i | i \in I) | 0 \leqslant t_i < 1, \sum_{i\in I} t_i w_i = x\}).$$

Заменим набор $(w_i | i \in I)$ его подмножеством, все еще положительно зависимым, и таким, что любое его подмножество (собственное) линейно независимо. Тогда

$$T_x = \{(t_i | i \in I) | 0 \leqslant t_i < 1, \sum_{i\in I} t_i w_i = x\}$$

не более чем одномерно. Покажем, что если оно не пусто, то оно есть полуотрезок. Пусть $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i w_i = 0$, $\lambda_i \geqslant 0$, $(\lambda) \neq 0$, тогда

$$T_x = \{(\bar{t}_i + \varepsilon\lambda_i | i \in I) | 0 \leqslant \bar{t}_i + \varepsilon\lambda_i < 1\},$$

где $(\bar{t}_i) \in T_x$ — любая точка. Значит, T_x есть пересечение конечного числа полуотрезков, направленных в одну сторону, и потому само полуотрезок. Лемма доказана.

Установим, наконец, основную теорему.

Лемма 2. *Пусть $\tilde{A}_i \in \mathcal{P}(V)$, $i \in I$, причем линейные „несущие" подпространства $\langle \tilde{A}_i \rangle$ их аффинных оболочек $\langle A_i \rangle$ не образуют прямой суммы. Тогда цепь $\underset{i\in I}{*}(\mathbb{1}_{A_i} - \mathbb{1})$ может быть разложена в целочисленную линейную комбинацию цепей вида $\underset{i\in I}{*}(\mathbb{1}_{B_i} - \mathbb{1})$, где $B_i \in \mathcal{P}(V)$, причем*

$$\sum_{i\in I} \dim\langle \tilde{B}_i \rangle < \sum_{i\in I} \dim\langle \tilde{A}_i \rangle.$$

Теорема 2.3 выводится из леммы очевидным образом. Установим лемму. Для этого заметим, что если $\langle \tilde{A}_i \rangle$ не образуют прямой суммы, то всегда можно найти набор $v_i \in \langle \tilde{A}_i \rangle \setminus \{0\}$ положительно зависимых векторов. Теперь по теореме о тенях

$$\underset{i\in I}{*}(\mathbb{1}_{A_i} - T_{v_i}(\mathbb{1}_{A_i})) = 0$$

или

$$\underset{i\in I}{*}[(\mathbb{1}_{A_i} - \mathbb{1}) - (T_{v_i}(\mathbb{1}_{A_i}) - \mathbb{1})] = 0.$$

Раскрывая квадратные скобки и учитывая, что тень многогранника относительно вектора из его линейного „несущего" подпространства есть линейная комбинация многогранников меньшей размерности, получаем лемму.

Основная теорема 2.3 полностью доказана. Рассуждения без изменений переносятся на случай Λ-цепей.

Список литературы

[1] Картье П., *Разбиение многогранников: к вопросу о третьей проблеме Гильберта, Математический анализ и геометрия*, Мир, М., 1990, с. 26–55.

[2] McMullen P., *Metrical and combinatorial properties of convex polytopes*, Proc. Int. Congr. Math., Vancouver **1** (1974), 491–495.

[3] Mullen P., *Valuations and Euler-type relations on certain classes of convex polytopes*, Proc. London Math. Soc., ser.3 **35** no. 1 (1977), 113–135.

[4] McMullen P., *Lattice invariant valuations on rational polytopes*, Arch. Math. **311** (1978), 509–516.

[5] Хованский А.Г., *Многогранники Ньютона и торические многообразия*, Функцион. анализ и его прил. **11**, вып. 4 (1977), 56–67.

[6] Гриффис Ф., Харрис Дж., *Принципы алгебраической геометрии*, т. 1, Мир, М., 1982.

[7] Viro O.Ya., *Some integral calculus based on Euler characteristic*, Lect. Notes in Math. no. 1346 (1989), 127–138.

Институт системных исследований (ВНИИСИ) РАН
117312, Москва, пр. 60-летия Октября, 9

Поступило 10 июня 1991 г.