Функциональный анализ и его приложения,
1990, т. 24, вып. 4, 31—42

УДК 519.7

ГРУППЫ ГАЛУА, ОПЕРАТОРЫ СТОКСА И ТЕОРЕМА РАМИСА

Ю. С. Ильяшенко, А. Г. Хованский

Введение

Основной результат этой статьи составляет

Теорема 1. *Операторы Стокса и монодромии принадлежат группе Галуа линейного дифференциального уравнения с нефуксовой нерезонансной особой точкой.*

Эта формулировка нуждается в пояснениях. Определение группы Галуа приведено в § 1, операторов Стокса — в § 2. Теорема 1 сформулирована Рамисом, предложившим также эскиз доказательства [1, 2], которое будет опубликовано в готовящейся книге *). Здесь приводится независимое доказательство, основанное на так называемом «исчислении функциональных цепей», развитом первым из авторов. Функциональные коцепи естественным образом возникают в локальной теории резонансных аналитических векторных полей и отображений. Нормализующие ряды в резонансных случаях, как правило, расходятся. Однако они являются асимптотическими для «нормализующих коцепей» — кусочно-непрерывных функций или вектор-функций одного комплексного переменного, голоморфных вне линий разрыва, скачок которых на линии разрыва быстро убывает при стремлении аргумента к особой точке; подробное определение см. в § 3. Коцепи задаются своими асимптотическими рядами однозначно, и могут рассматриваться как суммы этих (расходящихся) рядов. Функциональные коцепи играют основную роль в доказательстве теоремы конечности для предельных циклов, первая часть которого опубликована в [3]. Настоящая статья представляет собой простейшее применение функциональных коцепей. Параллельная техника, развитая на Западе,— ресуммирование Рамиса. Эта же техника упоминается в эскизе доказательства теоремы конечности для предельных циклов, анонсированной Ж. Экалем, Ж. Мартине, Р. Муссю, Ж. П. Рамисом [4].

§ 1. Группа Галуа линейного дифференциального уравнения

Рассмотрим в окрестности нуля линейное неавтономное дифференциальное уравнение с голоморфной правой частью:

$$t^{s+1}\dot{z} = A(t)\,z, \quad z \in \mathbf{C}^n, \quad s \in \mathbf{N}, \quad A(0) \neq 0. \tag{1.1}$$

Заменой масштаба можно добиться того, что операторнозначная функция A голоморфна в круге $|t| \leqslant 1$. Если матрица A имеет различные собственные значения λ_j, то уравнение называется нерезонансным. В этом случае особая точка 0 уравнения (1.1) всегда иррегулярна; это значит, по определению, что существует решение уравнения, которое в некотором секторе с вершиной 0 стремится к бесконечности быстрее любой степени при $t \to 0$. Рассуждения § 1 не зависят от того, является уравнение (1.1) резонансным или нет.

---

*) Ему посвящен препринт Ж. П. Рамиса, бывший недоступным для авторов при написании статьи.

Пусть S — произвольный сектор единичного круга. Обозначим через M поле функций, мероморфных в единичном круге, с единственным полюсом в нуле. Пусть $\mathscr{K}_S$ — расширение поля M, полученное присоединением к M всех компонент решений уравнения (1.1), ограничений на S.

Определение 1. *Группа Галуа* уравнения (1.1) над M — это группа всех автоморфизмов дифференциального поля $\mathscr{K}_S$, сохраняющих неподвижными все мероморфные в единичном круге функции из M. Обозначение:

$$G = G[\mathscr{K}_S:\ M].$$

Всюду, кроме заключения, уточнение «над M» для краткости опускается.

Замечание 1. Выбор другого сектора S' вместо S заменяет группу Галуа на сопряженную; сопряжение осуществляется автоморфизмом аналитического продолжения $\mathscr{K}_S \to \mathscr{K}_{S'}$, определенным неоднозначно.

Замечание 2. По определению каждый автоморфизм группы G — линейный оператор в бесконечномерном пространстве K_S; однако группа Галуа допускает точное n-мерное представление, к описанию которого мы и переходим.

Предложение 1. *Автоморфизмы из группы Галуа индуцируют преобразование декартовой степени $\mathscr{K}_S^n \to \mathscr{K}_S^n$, переводящее решения уравнения* (1.1) *в решения.*

$\lhd$ Пусть L — автоморфизм, описанный в предложении, $z \in \mathscr{K}_S^n$ — решение уравнения (1.1). Тогда $(Lz)^\cdot = L\dot{z}$ и $L(Az) = ALz$ по определению группы Галуа. Следовательно, Lz — решение уравнения (1.1) вместе с z. $\rhd$

Следствие. *Группа Галуа уравнения* (1.1) *допускает точное линейное представление в пространстве $\mathscr{L}_S$ ограничений всех решений уравнения* (1.1) *на S.*

$\lhd$ Представление группы Галуа дается предложением 1. Чтобы доказать его точность, достаточно установить, что автоморфизм, сохраняющий все компоненты всех решений, тождествен на $\mathscr{K}_S$. Это немедленно следует из тождественности автоморфизма на M и определения поля $\mathscr{K}_S$. $\rhd$

Обозначим через Z какую-нибудь фундаментальную матрицу решений уравнения (1.1) и фиксируем ее. Пусть A — произвольная, B — целочисленная матрица: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Положим

$$A^B = \prod_{i,j} a_{ij}^{b_{ij}}$$

(аналог обычных мультииндексов). В этих обозначениях произвольный элемент поля $\mathscr{K}_S$ имеет вид

$$f = \sum a_K Z^K / \sum b_K Z^K, \tag{1.2}$$

целочисленная матрица K с неотрицательными элементами пробегает зависящее от f конечное множество. Дифференцирование заменяется арифметическими действиями в силу уравнения (1.1):

$$\dot{Z} = A(t)\, Z/t^S.$$

Столбцы матрицы Z образуют базис в пространстве $\mathscr{L}_S$ всех решений уравнения (1.1), ограниченных на сектор S. Автоморфизму H: $\mathscr{K}_S \to \mathscr{K}_S$ соответствует по предложению 1 оператор T_H: $\mathscr{L}_S \to \mathscr{L}_S$. В базисе Z он записывается матрицей, которая также обозначается T_H: $Z \to ZT_H$. При этом

$$Hf = \sum a_K (ZT_H)^K / \sum b_K (ZT_H)^K. \tag{1.3}$$

На первый взгляд эта формула вместе с уравнением (1.1) позволяет по любому линейному оператору T_H: $\mathscr{L}_S \to \mathscr{L}_S$ построить автоморфизм H: $\mathscr{K}_S \to \mathscr{K}_S$. Однако представление (1.2) может быть неоднозначным, и функция Hf, заданная формулой (1.3), будет зависеть от представления. Чтобы определение (1.3) было корректным, нужно, чтобы оператор T_H сохранял соотношения в поле $\mathcal{K}_S$, т. е. равенства

$$\sum a_K Z^K \equiv 0. \tag{1.4}$$

Оператор T_H лишь тогда продолжается до автоморфизма поля $\mathcal{K}_S$, когда из соотношения (1.3) следует

$$\sum a_K \, (ZT_H)^K \equiv 0.$$

В частности, автоморфизм $\mathcal{L}_S \to \mathcal{L}_S$ порождается автоморфизмом n^2-мерного пространства, натянутого над $\mathbf{C}$ на компоненты решений, только если он сохраняет все линейные соотношения на компоненты. Теорема 1 вытекает теперь из следующей теоремы.

Теорема 2. *Операторы Стокса и монодромии уравнения* (1.1) *сохраняют соотношения в поле* $\mathcal{K}_S$.

Для операторов монодромии теорема 2 тривиальна: аналитическое продолжение вдоль петли сохраняет соотношения. Отсюда следует теорема 1 для оператора монодромии. Ниже теорема 2 доказывается для операторов Стокса, к определению которых мы и переходим.

§ 2. Операторы Стокса

Начиная с этого места, считаем уравнение нерезонансным: $\lambda_i \neq \lambda_j$. В этом случае существует формальная замена переменной $z = \hat{H}w$, переводящая уравнение (1.1) в интегрируемое уравнение

$$t^{s+1}\dot{w} = B\,(t)\,w, \quad B\,(t) = \operatorname{diag} b\,(t), \ b = (b_1, \ldots, b_n), \tag{2.1}$$

b_j — полиномы степени не выше s. Простое доказательство этой теоремы можно найти в [5]. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A (0), то $b_j\,(0) = \lambda_j$. Уравнение (2.1) называется *формальной нормальной формой* уравнения (1.1) или *нормализованным уравнением*, а формальный ряд $\hat{H}$, сопрягающий эти уравнения,— *нормализующим рядом*. Нормализующий ряд, нормированный условием $\hat{H}\,(0) = E$, определен однозначно. Фундаментальная матрица решений нормализованного уравнения имеет вид

$$W\,(t) = \operatorname{diag} w\,(t), \qquad w = (w_1, \ldots, w_n), \quad w_j = \exp q_j, \tag{2.2}$$

$$q_j' = b_j/t^{s+1}, \quad q_j = -\,(\lambda_j/st^s) + \ldots + \mu_j \ln t.$$

Аналитическое продолжение вокруг нуля в положительном направлении умножает фундаментальную матрицу W на матрицу оператора монодромии

$$W \to WM_W, \quad M_W = \exp 2\pi i \operatorname{diag} \mu, \ \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Остановимся теперь на связи нормализованного и исходного уравнений. Вообще говоря, расходящийся нормализующий ряд является асимптотическим для голоморфной замены, сопрягающей в некотором секторе с вершиной 0 нормализованное и исходное уравнение. Чтобы сформулировать теорему существования и единственности таких замен, нам понадобятся некоторые определения.

Определение 1. *Луч раздела*, соответствующий паре комплексных чисел λ, μ и натуральному s,— это любой из лучей, задаваемых уравнением

$$\operatorname{Re}\,(\lambda - \mu)/t^s = 0.$$

Луч раздела уравнения (1.1) — это любой из лучей раздела, соответствующих тройкам s, λ_i, λ_j, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A (0).

О п р е д е л е н и е 2. Сектор с вершиной в нуле называется *хорошим* для уравнения (1.1), если он имеет раствор больше π/s и ни для какой пары λ_i, λ_j его замыкание не содержит двух лучей раздела, соответствующих этой паре и числу s.

Т е о р е м а 3 (о секториальной нормализации [5, 6]). *Пусть S — хороший сектор для уравнения* (1.1). *Тогда если радиус сектора достаточно мал, существует единственное голоморфное отображение H_S, обладающее следующими свойствами*:

1) *замена $z = H_S w$ сопрягает уравнения* (1.1) *и* (2.1) *в секторе S*;

2) *отображение H_S разлагается в асимптотический ряд Тейлора $\hat{H}$ при $t \to 0$, не зависящий от сектора S и сопрягающий формально уравнения* (1.1) *и* (2.1).

Описанная в теореме замена H_S называется *нормализующей* для уравнения (1.1) в секторе S.

Явление Стокса состоит в том, что нормализующие замены в пересекающихся хороших секторах, вообще говоря, не совпадают. Пусть S_1 и S_2 — два таких сектора, H_{S_1} и H_{S_2} — соответствующие нормализующие замены. Тогда $Z_{S_j} = H_{S_j}W$ ($j = 1, 2$) — фундаментальные матрицы решений в соответствующих секторах S_j. В пересечении секторов одна из этих матриц переводится в другую умножением справа на постоянную матрицу:

$$Z_{S_1}C = Z_{S_2} \text{ или } H_{S_1}WC = H_{S_2}W. \tag{2.2}$$

Соответствующий линейный оператор из пространства решений $\mathscr{L}_{S_1}$ уравнения (1.1) в секторе S_1 в себя называется *оператором Стокса*.

Теперь определены все понятия, участвующие в формулировке теоремы 1. Для дальнейшего нужно инвариантное определение операторов Стокса; оно шире предыдущего и позволяет определить оператор Стокса для любой пары хороших секторов, не обязательно пересекающихся. Пусть S_1 и S_2 — два хороших сектора, γ — кривая с началом в секторе S_1 и концом в S_2, лежащая в проколотом круге (здесь и ниже проколотый круг имеет вид $0 < |t| < 1$.) Пусть $\mathscr{L}_j$ и $\mathscr{N}_j$ — пространства решений исходного и нормализованного уравнений в секторе S_j соответственно. Теорема о секториальной нормализации задает однозначно определенный оператор $h_j\colon \mathscr{N}_j \to \mathscr{L}_j$. Обозначим через Δ_γ оператор аналитического продолжения над γ; он действует в пространствах решений и нормализованного, и исходного уравнения

$$\Delta_\gamma\colon \mathscr{N}_1 \to \mathscr{N}_2, \quad \Delta_\gamma\colon \mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_2.$$

Явление Стокса состоит в том, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{N}_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\Delta_\gamma"'] & \mathscr{L}_1 \arrow[d, dashed, "\Delta_\gamma"] \\ \mathscr{N}_2 \arrow[r, "h_2"] & \mathscr{L}_2 \end{tikzcd}$$

некоммутативна. Коммутативной является следующая диаграмма, которая и определяет оператор Стокса $C = C_{S_1, S_2, \gamma}\colon \mathscr{L}_{S_1} \to \mathscr{L}_{S_1}$ ($\mathscr{L}_{S_1} = \mathscr{L}_1$)

$$\begin{tikzcd} \mathscr{N}_1 \arrow[r, dashed, "h_1"] \arrow[d, "\Delta_\gamma"'] & \mathscr{L}_1 \arrow[r, "C"] & \mathscr{L}_1 \arrow[d, dashed, "\Delta_\gamma"] \\ \mathscr{N}_2 \arrow[rr, "h_2"] & & \mathscr{L}_2 \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

В пространстве решений нормализованного уравнения выделен специальный базис, определенный с точностью до порядка,— набор столбцов матрицы W. В пространстве решений исходного уравнения $\mathscr{L}_{S_1}$ выделяется базис, в который переходит предыдущий при однозначно определенной замене H_{S_1}. Это — набор столбцов матрицы $Z = H_{S_1}W$. В этом базисе оператор Стокса C задается матрицей, обозначаемой той же буквой. Определение (2.3) в матричном виде:

$$\Delta_\gamma H_{S_1} WC = H_{S_2} \Delta_\gamma W. \tag{2.4}$$

Когда секторы S_1 и S_2 пересекаются, а кривая γ состоит из одной точки, это определение превращается в предыдущее.

Следующее замечание не используется в доказательстве теоремы 1, но является, на наш взгляд, полезным комментарием к ней. Операторы Стокса обладают групповым свойством. А именно, пусть S_1, S_2, S_3 — три хороших сектора, γ_1 и γ_2 — две кривые, вторая из которых продолжает первую; γ_1 начинается в секторе S_1 и кончается в S_2, γ_2 начинается в S_2 и кончается в S_3. Пусть $\gamma_3 = \gamma_1\gamma_2$. Тогда

$$C_{S_1,\, S_3,\, \gamma_3} = \Delta_{\gamma_1}^{-1} \circ C_{S_2,\, S_3,\, \gamma_2} \circ \Delta_{\gamma_1} \circ C_{S_1,\, S_2,\, \gamma_1}.$$

Это немедленно следует из предыдущего определения и поясняется коммутативными диаграммами, в которых для кратности обозначено $C_1 = C_{S_1,\, S_2,\, \gamma_1}$, $C_2 = C_{S_2,\, S_3,\, \lambda_2}$, $C_3 = C_{S_1,\, S_3,\, \gamma_3}$, $\tilde{C}_2 = \Delta_{\gamma_1}^{-1} \circ C_2 \circ \Delta_{\gamma_1}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\Delta_{\gamma_1}"'] & \mathcal{L}_1 \arrow[r, "C_1"] & \mathcal{L}_1 \arrow[r, "C_2"] \arrow[d, "\Delta_{\gamma_1}"'] & \mathcal{L}_1 \arrow[d, "\Delta_{\gamma_1}"] \\
\mathcal{N}_2 \arrow[rr, "h_2"] \arrow[d, "\Delta_{\gamma_2}"'] & & \mathcal{L}_2 \arrow[r, "C_2"] & \mathcal{L}_2 \arrow[d, "\Delta_{\gamma_2}"] \\
\mathcal{N}_3 \arrow[rrr, "h_3"] & & & \mathcal{L}_3
\end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\Delta_{\gamma_3}"'] & \mathcal{L} \arrow[r, "C_3"] & \mathcal{L}_1 \arrow[d, "\Delta_{\gamma_3}"] \\
\mathcal{N}_3 \arrow[rr, "h_3"] & & \mathcal{L}_3
\end{tikzcd}.$$

Закончим этот параграф замечанием о связи операторов Стокса и монодромии для исходного и нормализованного уравнений.

Определение 3. Покрытие проколотого круга секторами, хорошими для уравнения (1.1), называется *хорошим* для этого уравнения, если объединение любых двух секторов покрытия не является хорошим сектором (хорошее покрытие не содержит лишних секторов).

Занумеруем секторы хорошего покрытия в естественном порядке против часовой стрелки. Пусть C_j — оператор Стокса, соответствующий пересекающимся секторам S_j и S_{j+1} этого покрытия, γ_0 — положительно ориентированная петля с началом и концом в секторе S_1, обходящая ноль один раз. Отождествим пространства решений в пересекающихся секторах с последовательными номерами, считая, что решения, служащие аналитическим продолжением друг друга, совпадают. Можно считать после этого, что все операторы C_j действуют в пространстве $\mathcal{L}_{S_1}$. Тогда $M_Z G_{S_1 S_1,\, \gamma_0} = M_Z C_N \ldots C_1 = M_W$, где M_W и M_Z — операторы монодромии нормализованного и исходного уравнений соответственно. Это следует из группового свойства операторов Стокса и диаграммы (2.3), в которой $\gamma = \gamma_0$, $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$; аналитические продолжения вдоль γ_0 дают операторы монодромии.

§ 3. Нормализующие и функциональные коцепи

Рассмотрим хорошее для уравнения (1.1) покрытие проколотого круга секторами $S_1, \ldots, S_N$. Пусть $H_1, \ldots, H_N$ — нормализующие отображения, даваемые теоремой о секториальной нормализации. Набор $H = (H_1, \ldots, H_N)$ называется *нормализующей коцепью*. В пересечении секторов $S_j \cap S_{j+1}$ положим

$$\Phi_j = H_j^{-1} \circ H_{j+1}, \quad (\delta H)_j = H_{j+1} - H_j.$$

Наборы

$$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_N), \quad \delta H = ((\delta H)_1, \ldots, (\delta H)_N)$$

называются *суперпозиционной* и *разностной кограницами коцепи H* соответственно.

Л е м м а 1. *Разностная кограница нормализующей коцепи удовлетворяет оценке сверху*

$$|\delta H| < \exp(-C / |t|^s)$$

для некоторого $C > 0$, зависящего от коцепи. Оценка набора означает одновременную оценку всех функций набора.

◁ Докажем сначала, что оценке леммы 1 удовлетворяет поправка суперпозиционной кограницы нормализующей коцепи. Отметим, что из теоремы о секториальной нормализации следует только, что $|\Phi - \mathrm{id}|$ убывает быстрее любой степени. По определению (2.2) оператора Стокса

$$\Phi_j = WC_jW^{-1}.$$

Пусть a_{kl} и c_{kl} — элементы, стоящие в k-й строке и l-м столбце матриц Φ_j и C_j соответственно. Тогда

$$a_{kl}(t) = c_{kl} \exp(q_k(t) - q_l(t)),$$

см. формулы (2.2). Убывание $|\Phi - \mathrm{id}|$ при $t \to 0$ налагает следующие ограничения на элементы c_{kl}: $c_{kk} = 1$; $c_{kl} \neq 0 \Rightarrow \exp(q_k - q_l) \to 0$ при $t \to 0$ в $S_j \cap S_{j+1}$ По условию, уравнение (1.1) нерезонансное, т. е. $\lambda_k \neq \lambda_l$ при $k \neq l$. Поэтому последнее требование равносильно тому, что в $S_j \cap S_{j+1}$

$$\mathrm{Re}(\lambda_k - \lambda_l)/t^s \to -\infty.$$

Именно здесь существенно, что уравнение (1.1) — нерезонансное. Тогда в в $S_j \cap S_{j+1}$

$$\mathrm{Re}(q_k - q_l) < -c|t|^{-s}$$

для некоторого $c > 0$. Отсюда

$$|\Phi - \mathrm{id}| < \exp(-c|t|^{-s}).$$

Требуемая оценка на суперпозиционную кограницу получена.

Отметим теперь, что поправка суперпозиционной кограницы того же порядка малости, что и разностная. Это следует из того, что для всех линейных операторов $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ из достаточно малой окрестности нуля справедлива оценка

$$\|A - B\| \leqslant 2\|(E + A)\circ(E + B)^{-1} - E\|.$$

Это доказывает лемму. ▷

З а м е ч а н и е. Операторнозначные функции набора, образующего нормализующую коцепь, служат своего рода аналитическим продолжением друг друга. Это продолжение хорошо тем, что все функции набора имеют одинаковую асимптотику. Аналогичное продолжение возможно для любых функций из поля $\mathcal{K}_S$. Чтобы его построить, дадим следующее определение, центральное в этой статье. Фиксируем покрытие U проколотого круга, хорошее для уравнения (1.1).

О п р е д е л е н и е 1. *Регулярной функциональной коцепью, соответствующей покрытию U*, называется набор голоморфных функций $F = \{F_1, \ldots, F_N\}$, биективно соответствующий секторам покрытия, причем:

1) каждая функция набора определена в соответствующем секторе и допускает аналитическое продолжение в некоторый более широкий сектор, содержащий замыкание исходного без нуля;

2) кограница коцепи — это набор разностей $(\delta F)_j = F_{j+1} - F_j$, $\delta F = ((\delta F)_1, \ldots, (\delta F)_N)$, рассматриваемых в секторах $S_j \cap S_{j+1}$ и

удовлетворяющих там оценке

$$| \delta F | < \exp(-C | t |^{-s}),$$

C зависит от F;

3) все функции набора F разлагаются в один и тот же асимптотический ряд Лорана в нуле с полюсом конечного порядка.

Предыдущая лемма показывает, что матричные элементы нормализующих коцепей представляют собой регулярные функциональные коцепи; нужно только заметить, что секторы хорошего покрытия допускают расширение, описанное в п. 1 определения 1, причем покрытие остается хорошим.

Множество всех регулярных функциональных коцепей, соответствующих покрытию U, обозначается $\mathcal{F}\mathcal{C}_U$ ($\mathcal{F}\mathcal{C}$ от functional cochains). Арифметические действия над коцепями из $\mathcal{F}\mathcal{C}_U$, как и дифференцирование, производятся «покомпонентно», как действия над функциями наборов, определенных в одном и том же секторе.

Лемма 2. *Регулярные функциональные коцепи, соответствующие одному покрытию, образуют алгебру.* $\triangleright$

$\triangleleft$ Доказательство немедленно следует из определения 1. $\triangleright$

Замечание. Можно доказать больше: в лемме 2 «алгебру» можно заменить на «дифференциальное поле». Однако это утверждение не понадобится в дальнейшем.

Отметим в заключение, что функции, мероморфные в единичном круге с единственным полюсом в нуле — это регулярные функциональные коцепи с тривиальной (нулевой) когранͅицей.

§ 4. Соотношения в поле, порожденном компонентами решений

В этом параграфе функции поля $\mathcal{K}_S$ выражены через регулярные функциональные коцепи и компоненты решений нормализованной системы. Это позволяет описать соотношения в поле $\mathcal{K}_S$ и завершить доказательство теоремы 2 с использованием теоремы Фрагмена — Линделефа для коцепей, доказанной в § 5.

Соотношения в поле $\mathcal{K}_S$ не зависят от сектора S; для разных секторов они получаются друг из друга аналитическим продолжением. Поэтому для дальнейших рассуждений сектор S можно выбрать и фиксировать. Пусть U — хорошее покрытие проколотого круга, описанное в § 2, S — произвольный сектор этого покрытия. Как уже отмечалось, теорема о секториальной нормализации позволяет выделить специальную фундаментальную матрицу решений уравнения (1.1) вида

$$Z_S = H_S W,$$

где W задается формулой (2.2), H_S — нормализующая замена.

Формула (1.4) примет вид

$$\sum a_K (H_S W)^K |_S \equiv 0. \tag{4.1}$$

Операторнозначная функция H_S продолжается в проколотый круг до нормализующей коцепи H. В силу леммы 2 левая часть соотношения (4.1) продолжается в проколотый круг до выражения вида

$$\sum a_K (HW)^K = \sum F_k w^k,\ F_k \in \mathcal{F}\mathcal{C}_U. \tag{4.2}$$

Здесь F_k — регулярные функциональные коцепи, $w = (w_1, \ldots, w_n)$ задается формулой (2.2), k — мультииндекс: $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}_+^n$, $w^k = w_1^{k_1} \ldots w_n^{k_n} = \exp(q, k)$, где $q = (q_1, \ldots, q_n)$, q_j задано формулой (2.2). Итак, соотношение (4.1) примет вид

$$\sum F_k w^k |_S \equiv 0,\ F_k \in \mathcal{F}\mathcal{C}_U.$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 2. Пусть S_j — j-й сектор покрытия U, $S = S_1$, γ_j, C_{S_1, S_j, γ_j} — те же, что в конце § 2. Доказать, что оператор Стокса $C = C_{S_1, S_j, \gamma_j}$ сохраняет соотношение (4.1), это значит доказать импликацию

$$(4.1) \Rightarrow \sum a_K (H_{S_1} WC)^K |_{S_1} \equiv 0. \tag{4.3}$$

По определению оператора Стокса (2.4)

$$\Delta_{\gamma_j} H_{S_1} WC = H_{S_j} \Delta_{\gamma_j} W.$$

Поэтому импликация (4.3) вытекает из импликации

$$(4.1) \Rightarrow \sum a_K (HW)^K \equiv 0 \tag{4.4}$$

на универсальной накрывающей над проколотым кругом, где $H = (H_{S_1}, \ldots, H_{S_N})$ — нормализующая коцепь.

Докажем импликацию (4.4). Без ограничения общности можно считать, что в соотношении (4.2) мономы w^k при разных k не отличаются множителем t^m при целом m; в противном случае коэффициент при одном из мономов нужно умножить на t^m и привести подобные члены.

Л е м м а 1. *Пусть $J \subseteq \mathbf{Z}_+^n$ — произвольное конечное подмножество и никакие два монома из множества $\{w^k \mid k \in J\}$ не отличаются множителем t^m при целом m. Тогда эти мономы независимы над кольцом $\mathcal{F}\mathcal{C}_U |_S$, где S — сектор покрытия U.*

◁ Предположим противное. Пусть

$$\sum_{k \in J} F_k w^k |_S \equiv 0, \quad F_k \in \mathcal{F}\mathcal{C}_U, F_k \not\equiv 0. \tag{4.5}$$

Пусть в формуле (2.2)

$$q_j(t) = p_j(1/t) + \mu_j \ln t, \ \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n),$$

p_j — многочлены без свободного члена. Положим $P(t) = (p_1(1/t), \ldots, p_n(1/t))$. Тогда

$$w^k = t^{(\mu, k)} \exp(P, k).$$

С л у ч а й 1. Все показатели (P, k), $k \in J$, одинаковы. Разделим обе части соотношения (4.5) на $\exp(P, k)$. Получим

$$\sum_{k \in J} F_k t^{(\mu, k)} |_S \equiv 0. \tag{4.6}$$

Это равенство возможно только при $F_k \equiv 0$ для каждого $k \in J$, как будет доказано при рассмотрении случая 2.

С л у ч а й 2. Пусть среди показателей (P, k), $k \in J$, есть различные. Возьмем такой радиус l сектора S, чтобы на нем разность вещественных частей любых двух из этих различных показателей по модулю стремилась к бесконечности; она тогда оценивается по модулю снизу функцией $\varepsilon / |t|$ при некотором $\varepsilon > 0$. Пусть (P, k_0) — показатель с самой быстро растущей на l при $t \to 0$ вещественной частью. Разделим обе части соотношения (4.5) на $\exp(P, k_0)$ и перенесем в правую часть все члены с показателями $(P, k) - (P, k_0)$, отличными от нуля. Получим

$$\sum_{J'} F_k t^{(\mu, k)} |_l = o(\exp(-\varepsilon / |t|)). \tag{4.7}$$

Здесь $J' = \{k \in J \mid (P, k) = (P, k_0)\}$. Равенство (4.6) — частный случай (4.7), докажем, что из равенства (4.7) следует, что $F_k \equiv 0$ при $k \in J'$. Это будет противоречить предположению (4.5).

Асимптотический ряд левой части равенства (4.7) на l равен линейной комбинации асимптотических рядов Тейлора $\hat{F}_k$ для коцепей F_k с коэффициентами $t^{(\mu, k)}$. Из (4.7) следует, что эта комбинация — нулевой ряд. По условию леммы, показатели (μ, k) не имеют целочисленных разностей. Следовательно, для всех $k \in J'$, $\hat{F}_k \equiv 0$. Отсюда и из доказанной в § 5 теореме Фрагмена — Линделёфа следует, что $F_k \equiv 0$ — противоречие. $\triangleright$

Из формулы (4.1) следует, что в равенстве (4.2) $\sum F_k w^k \mid_S \equiv 0$. Из леммы 1 следует, что $\sum F_k w^k \equiv 0$ на всей универсальной накрывающей над проколотым кругом. Отсюда следует, что

$$\sum a_k (HW)^K \equiv 0,$$

что и доказывает импликацию (4.4). Это заканчивает доказательство теоремы 2, а с ней и теоремы 1, по модулю теоремы Фрагмена — Линделёфа.

§ 5. Теорема Фрагмена — Линделёфа для регулярных функциональных коцепей

Теорема 4. *Регулярная функциональная коцепь, убывающая вдоль некоторого радиуса быстрее любой степени при $t \to 0$, тождественно равна нулю.*

Замечание. Эта теорема — частный случай теоремы Фрагмена — Линделёфа для так называемых простых функциональных коцепей, доказанной одним из авторов в приготовленной к печати статье «Теоремы конечности для предельных циклов 1». Сформулированная выше теорема — простейшая в серии, и здесь дано ее полное доказательство, по образцу которого доказываются остальные теоремы Фрагмена — Линделёфа для коцепей.

Пусть F — коцепь, удовлетворяющая условию теоремы. Запишем эту коцепь в карте $\zeta = 1/t$. Хорошее покрытие проколотого круга перейдет в покрытие окрестности бесконечности секторами раствора больше π/s; это единственная информация о покрытии, используемая в дальнейшем. Коцепь $\tilde{F} = F(1/\zeta)$ представляет собой набор функций, голоморфных в 1-окрестностях секторов покрытия, если коцепь рассматривается на внешности достаточно большого круга. Все функции набора разлагаются в общий асимптотический ряд Лорана с полюсом конечного порядка на ∞. Кограница коцепи оценивается сверху функцией $m_c = \exp(-c \mid \zeta \mid^s)$ для некоторого $c > 0$. Перейдем от покрытия к разбиению. А именно, для любого $j \in \{1, \ldots, N\}$ возьмем луч $l_j \subset S_j \cap S'_{j+1}$, направленный к бесконечности и такой, что лучи l_j встречаются при обходе бесконечности в порядке их номеров. Окрестность бесконечности считаем столь малой, что 2-окрестности лучей попарно не пересекаются. Обозначим через L объединение $L = \bigcup l_j$. Лучи l_j разбивают окрестность бесконечности на секторы; сектор $\tilde{S}_j$ между лучами l_j и l_{j+1} принадлежит хорошему сектору S_j.

Лемма 1 (о тривиализации коцикла). *Пусть F — регулярная функциональная коцепь в окрестности бесконечности, кограница которой оценена сверху функцией m, и пусть в области Ω_{a-1}: $\mid \zeta \mid \geqslant a - 1$ справедливы оценки*

$$\max_{\Omega_{a-1}} m \leqslant m_0, \quad \int\limits_{L \cap \Omega_{a-1}} m\, ds \leqslant I.$$

Тогда существует функциональная коцепь Φ с той же кограницей на L, определенная в Ω_a и удовлетворяющая оценке

$$\mid \Phi \mid \leqslant m_0 + I.$$

$\triangleleft$ Лемма о тривиализации доказывается с помощью явной формулы. На каждом луче l_j в качестве функции набора δF возьмем разность

$F_{j+1} - F_j$. Положим

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\delta F(\tau)}{\tau - \zeta}\, d\tau.$$

По теореме Племеля [7] $\delta\Phi = \delta F$ на $L \cap \Omega_{a-1}$. Оценим $|\Phi(\zeta)|$ в Ω_a. Каждая из функций набора δF продолжается аналитически в 1-окрестность соответствующего луча, и там оценивается сверху функцией m. Рассмотрим два случая.

1. $\operatorname{dist}(\zeta, L) \geqslant 1$. Тогда $|\Phi(\zeta)| \leqslant I/2\pi$.

2. $\operatorname{dist}(\zeta, L) \leqslant 1$. Пусть ζ принадлежит 1-окрестности луча l_j. Круг D с центром ζ и радиусом 1 принадлежит сектору $S_j \cap S_{j+1}$. Заменим в формуле для Φ интеграл по хорде $l_j \cap D$ интегралом по дуге окружности dD с теми же концами, которая отделяется в D хордой от точки ζ. Интегралы по таким дугам оцениваются сверху константой m_0, интеграл по остальной части контура — константой $I/2\pi$. Это доказывает лемму. $\triangleright$

Лемма 2 (принцип максимума для функциональных коцепей). *Пусть в условиях леммы* 1 *регулярная функциональная коцепь F' ограничена на некотором луче l*: $\arg\zeta =$ const. *Тогда она ограничена в окрестности бесконечности и*

$$\sup_{\Omega_a}|F| \leqslant \sup_{\partial\Omega_a}|F| + 2(m_0 + I),$$

где m_0 и I — те же, что в лемме 1.

$\triangleleft$ Пусть Φ — тривиализация коцикла δF, даваемая леммой 1. Тогда разность $F - \Phi$ — голоморфная функция в Ω_a. Поскольку она растет не быстрее некоторой степени, она мероморфно продолжается в бесконечность. Поскольку она ограничена на луче l, это продолжение на самом деле голоморфно. По принципу максимума для голоморфных функций

$$\sup_{\Omega_a}|F - \Phi| = \sup_{\partial\Omega_a}|F - \Phi|.$$

Отсюда и из оценки на $|\Phi|$, даваемой леммой 1, следует лемма 2. $\triangleright$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы Фрагмена — Линделёфа для коцепей. Коцепь F можно считать ограниченной: в противном случае ее можно домножить на подходящую степень ζ и сделать ограниченной, не нарушая условий теоремы. Рассмотрим в области Ω_a: $|\zeta| \geqslant a$ коцепь

$$F_{\lambda,a} = F(\zeta/a)^\lambda,\ \lambda > 0.$$

Проверим условия леммы 2 для коцепи $F_{\lambda,a}$ с тем, чтобы применить к ней принцип максимума. Коцепь $F_{\lambda,a}$ регулярна и ограничена на луче l по условию теоремы Фрагмена — Линделёфа. Ее кограница удовлетворяет оценке

$$|\delta F_{\lambda,a}| < m_{\lambda,a} \overset{\text{def}}{=} m_c(r/a)^\lambda = (r/a)^\lambda \exp(-cr^s),\ r = |\zeta|.$$

Оценим константы $m_0 = \max\limits_{\Omega_{a-1}} m_{\lambda,a}$ и I:

$$I = \int\limits_{L\cap\Omega_{a-1}} (r/a)^\lambda \exp(-cr^s) = N\int\limits_{a-1}^{\infty} m_{\lambda,a}\, dr.$$

Последний интеграл легко оценить, если обеспечить неравенство

$$m'_{\lambda,a}/m_{\lambda,a} \leqslant -1 \text{ при } r \geqslant a - 1. \tag{5.1}$$

Из неравенства (5.1) следует

$$m_{\lambda,a}(r) \leqslant (m_{\lambda,a}(a-1))\exp(-r + (a-1)),$$

$$m_0 \leqslant 1,\ I \leqslant N\, m_{\lambda,a}(a-1)$$

при $a > 1$, поскольку $\left(\frac{a-1}{a}\right)^{\lambda} < 1$ и $\exp(-c\ (a-1)^s) < 1$. Отметим, что

$$m'_{\lambda,\,a}/m_{\lambda,\,a} = (\lambda \ln r - cr^s)' = \frac{\lambda}{r} - csr^{s-1}.$$

Неравенство (5.1) выполнено, если

$$\lambda \leqslant cs\,(a-1)^s/2.$$

Тогда по лемме 2, учитывая неравенство $|F| \leqslant 1$, получаем

$$|F_{\lambda,\,a}| \leqslant 2\,(N+1)+1 = C_1$$

Следовательно, $|F(\zeta)| < c_1\,(r/a)^{-\lambda}$ при $\lambda \leqslant cs\,(a-1)^s/2$. Возьмем теперь произвольное ζ: $|\zeta| > e$ и положим $a = |\zeta|/e$, $\lambda = cs\,(a-1)^s/2$. Тогда

$$|F(\xi)| < C_1 \exp(-C_2 r^s)$$

для некоторого $C_2 > 0$. Но функции набора F определены в секторах раствора шире π/s. Следовательно, в силу классической теоремы Фрагмена — Линделёфа [8] $F \equiv 0$. $\triangleright$

Заключение

Рассмотрим линейную неавтономную систему на сфере Римана с конечным числом особых точек

$$\dot z = A\,(t)\,z, \tag{$*$}$$

A — рациональная операторнозначная функция. Точки, в которых полюса функции A просты, называются фуксовыми, остальные полюса функции A — нефуксовы особые точки; точка ∞ фуксова, если $\lim\limits_{t\to\infty} tA\,(t) = A_\infty \neq 0$. Система $(*)$ с одними фуксовыми особыми точками называется фуксовой. Для общей системы $(*)$ для каждой из нефуксовых особых точек фиксируем сектор с вершиной в этой точке и в пространстве решений на нем определим операторы Стокса. Затем фиксируем произвольную неособую точку t_0 и соединим ее кривыми с точками фиксированных секторов. Это позволяет определить операторы Стокса в пространстве решений уравнения $(*)$, рассматриваемых вблизи точки t_0. Группа Галуа уравнения $(*)$ определяется так же, как в § 1, только M — поле рациональных функций с полюсами только в полюсах A.

Теорема 6. *Операторы Стокса уравнения* $(*)$, *нефуксовы особые точки которого нерезонансны, принадлежат группе Галуа этого уравнения.*

Эта теорема доказывается точно так же, как и предыдущая; изменение поля M не играет роли. По-видимому, справедливо следующее усиление теоремы 1:

Теорема 1 bis. *Пусть* $\tilde M$ — *поле, полученное из поля мероморфных в единичном круге функций присоединением компонент всех решений нормализованной системы* (2.1). *Тогда группа Галуа уравнения* (1.1) (*формального эквивалентного уравнению* (2.1)) *над полем* M *является алгебраическим замыканием подгруппы группы* $GL\,(n,\mathbb{C})$, *порожденной операторами Стокса и монодромии уравнения* (1.1).

В заключение сформулируем две проблемы.

Проблема 1. *Как связана разрешимость в квадратурах уравнения* $(*)$ *с его операторами Стокса и монодромии?*

Для фуксовой системы $(*)$ разрешимость группы монодромии равносильна разрешимости уравнения в квадратурах [9].

Проблема 2. *Обобщить теорему* 1 *на резонансный случай.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ramis J. P.* Phénomène de Stokes et resommation // C. R.— 1985.— V. 301, sér. 1, № 4.— P. 99—102.
2. *Ramis J. P.* Phénomène de Stokes et filtration de Gevrey sur le group de Picar — Vesiot // C. R.— 1985.— V. 301, ser. 1, № 5.— P. 165—167.
3. *Ильяшенко Ю. С.* Теоремы конечности для предельных циклов. I // УМН.— 1990.— Т. 45, вып. 2.— С. 143—200.
4. *Ecalle J., Martinet J., Moussu R., Ramis J. P.* Non-accumulation de cycles limites // C. R.— 1987.— V. 307, sér. 1, № 14.— P. 375—378, 431—434.
5. *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы.— М.: ВИНИТИ, 1985.
6. *Jurkat M.* Meromorphe Differentialgleihungen // Lecture Notes in Math.— 1978.— № 637.
7. *Курант Р.* Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.— Л.: ОНТИ, 1934.
8. *Титчмарш Е.* Теория функций.— М.: ГИТТЛ, 1951.
9. *Хованский А. Г.* О представимости функций в квадратурах // УМН.— 1971.— Т. 26, вып. 4.— С. 251—252.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
11 апреля 1990 г.