Доклады Академии наук СССР
1985. Том 283, № 3

УДК 515.164.15+517.554 МАТЕМАТИКА

А.Н. ВАРЧЕНКО, А.Г. ХОВАНСКИЙ

АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛОВ ПО ИСЧЕЗАЮЩИМ ЦИКЛАМ И МНОГОГРАННИК НЬЮТОНА

(Представлено академиком Л.В. Канторовичем 18 VI 1984)

В статье обсуждается связь скорости стремления к нулю интегралов голоморфной дифференциальной формы по циклам, исчезающим в критической точке ростка голоморфной функции, и ньютоновым порядком формы, т.е. порядком, вычисленным по многограннику Ньютона ростка. Скорости стремления к нулю интегралов различных форм определяют [1, 2] спектр ростка – одну из самых полезных его характеристик, см. [2–4]. Недавно М. Саито доказал [5] гипотезу Стинбринка [4], вычисляющую спектр ростка по его многограннику Ньютона. Доказательство Саито весьма технично (оно использует язык D-модулей, гомологической алгебры, спектральных последовательностей). Эта статья – результат продумывания теоремы Саито. Предлагаемое здесь другое доказательство является элементарным следствием известных ранее результатов и, на наш взгляд, совершенно прозрачно. Это наша первая совместная работа. Мы с благодарностью посвящаем ее В.И. Арнольду.

1. Фильтрация. Пусть $f\colon \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}, 0$ – росток голоморфной функции в изолированной критической точке и Ω^p – пространство ростков в $0 \in \mathbf{C}^n$ голоморфных дифференциальных p-форм.

Ходжева фильтрация в Ω^p – это фильтрация по асимптотикам соответствующих интегралов. А именно: каждая форма $\omega \in \Omega^n$ имеет ходжев порядок $\alpha(\omega)$ – наибольшее число со свойством: для любого непрерывного семейства циклов $\delta(t)$, исчезающих в критической точке ростка f, в разложении интеграла

$$\int_{\delta(t)} \omega/df = \sum a_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k \tag{1}$$

все $\alpha \geqslant \alpha(\omega)$. Функция ходжева порядка определяет убывающую фильтрацию в Ω^n: подпространство с номером α состоит из форм, ходжев порядок которых не меньше, чем α, см. [2].

Ньютонова фильтрация. Предположим, что многогранник Ньютона ряда Тейлора ростка в выделенной системе координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удобен, т.е. пересекается со всеми осями координат. Тогда по многограннику строится ньютонова (убывающая) фильтрация в Ω^n. А именно, по многограннику стандартным образом определяется убывающая фильтрация в степенных ряда от $x_1, x_2, \ldots, x_n$: подпространство с номером α состоит из рядов, все мономы которых имеют ньютонову степень не меньше α. Фильтрация в рядах определяет фильтрацию в дифференциальных формах, если положить ньютонов порядок формы $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ равным ньютонову порядку ряда $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ (т.е. считать ньютонов порядок формы dx_i/x_i равным нулю).

Пространства Ω_f и $\overline{\Omega}_f$. В дальнейшем важную роль играют факторпространства: $\Omega_f = \Omega^n / df \wedge \Omega^{n-1}$ и $\overline{\Omega}_f = \Omega^n / df \wedge d\Omega^{n-2}$. (Интеграл (1) равен нулю, если форма ω представима в виде $df \wedge d\eta$, где $\eta \in \Omega^{n-2}$, в частности представители любого элемента из $\bar{\Omega}_f$ имеют единый ходжев порядок. Мотивировка введения пространства Ω_f более сложна [6, 2]. Отметим лишь, что это пространство конечномерно и его размерность равна числу Милнора ростка f.)

В фактор-пространствах Ω_f, $\bar{\Omega}_f$ определены ходжева и ньютонова фильтрации – проекции соответствующих фильтраций из Ω^n.

Спектр убывающей фильтрации. Каждая убывающая фильтрация имеет спектр – набор чисел, взятых с учетом кратности: кратность числа α равна размерности фактор-пространства с номером α по объединению подпространств с номерами большими чем α (если подпространства с номером α нет, то α не входит в спектр). Кратность числа α для ходжевой и ньютоновой фильтраций в Ω_f и в $\bar{\Omega}_f$ обозначим соответственно символами $h(\alpha), g(\alpha)$ и $\bar{h}(\alpha), \bar{g}(\alpha)$.

2. Формулировки. Пусть росток f не вырожден для своего многогранника Ньютона [2, 8, 9] и многогранник Ньютона удобен (т.е. пересекается со всеми координатными осями). Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 1 [4]. *Спектр ньютоновской фильтрации в Ω_f определяется по многограннику Ньютона формулами из* [4].

Новые формулы этого спектра приведены в лемме 5. Они легко выводятся из формул Стинбринка.

Теорема 2. *В пространстве Ω_f ньютонова фильтрация после сдвига номеров на -1 совпадает с ходжевой. Спектры этих фильтраций связаны соотношением $h(\alpha) = g(\alpha+1)$.*

Теорема 3 [5, 4]. *Спектр смешанной структуры Ходжа–Стинбринка совпадает со спектром из теоремы 1 после уменьшения всех чисел последнего спектра на* 1.

Определение спектра смешанной структуры Ходжа ростка см. в [2].

Доказательство. Теорема 3 – следствие теоремы о совпадении спектра смешенной структуры Ходжа–Стинбринка со спектром ходжевой фильтрации в Ω_f ([2], п. 14.3. Д) и теорем 1, 2.

Замечание. Стинбринку принадлежит теорема 1 и гипотетический ответ в теореме 3 (см. [4]). Его формулы основаны на принадлежащей А.Г. Кушниренко теории фильтраций Ньютона [9]. Теорема 3 доказана Саито [5]. Доказательство Саито в неявном виде содержит формулируемую ниже теорему 5.

Результаты, относящиеся к пространству $\bar{\Omega}_f$, сформулированы в п. 6.

3. Доказательство теоремы 2.

Лемма 1 (см. [2], п. 13.1. Ж; [7], п. 4.5). *Уменьшенный на 1 ньютонов порядок любой формы $\omega \in \Omega^n$ не больше ее ходжева порядка.*

Лемма доказывается несложной локальной оценкой интеграла, поднятого на торическое разрешение особенности ростка f (о торическом разрешении особенностей см. [2], § 8; [8]).

Следствие. *После сдвига номеров ньютоновой фильтрации на -1 ньютонова фильтрация в Ω_f содержит ходжеву.*

Лемма 2 (об энтропии [7]). *Если в конечномерном векторном пространстве заданы две убывающие фильтрации, одна из которых вложена в другую, и суммы чисел спектров для обеих фильтраций равны, то фильтрации совпадают.*

Лемма 2 – простое линейно-алгебраическое утверждение.

Лемма 3. *Сумма чисел спектра ньютоновой фильтрации в Ω_f равна сумме чисел спектра ходжевой фильтрации в Ω_f, увеличенной на размерность пространства Ω_f (т.е. на число Милнора μ роста f).*

Действительно, сумма чисел спектра ходжевой фильтрации в Ω_f равна $\mu(n/2-1)$ по теореме о детерминанте [2], п. 12.1 (и это один из центральных моментов доказательства теоремы 2). Сумма кратностей чисел спектра равна размерности пространства Ω_f. Поэтому для доказательства леммы 3 достаточна

Л е м м а 4. *Спектр ньютоновой фильтрации в Ω_f как подмножество точек (с кратностями) числовой оси симметричен относительно $n/2$.*

Лемма 4 — следствие явных формул для ньютонова спектра (см. теорему 1 и лемму 5) и геометрии целочисленных многогранников. Доказательство леммы 4 в п. 5. Теорема 2 доказана.

4. Ф о р м у л ы д л я н ь ю т о н о в а с п е к т р а в Ω_f позволяют вычислить спектр по определенным ниже функциям T^I и B^I неотрицательного переменного α, зависящим от многогранника Ньютона и непустого подмножества $I \subset \{1, \ldots, n\}$. С непустым подмножеством I связана координатная плоскость в пространстве показателей мономов n переменных, на которой координаты с номерами, не принадлежащими 1, равны нулю. Отметим все мономы, лежащие в этой координатной плоскости и имеющие ньютонову степень, равную α. Положим $T^I(\alpha)$ равным числу всех отмеченных мономов и положим $B^I(\alpha)$ равным числу тех из отмеченных мономов, которые не лежат в меньших координатных плоскостях. Определим функции $p[T]$ и $p[B]$ переменного t формулами:

$$p[T]\,(t) = \sum_I (-1)^{n-|I|}\,(1-t)^{|I|} \sum_{\alpha \geqslant 0} T^I(\alpha)\,t^\alpha + (-1)^n;$$

$$p[B]\,(t) = \sum_I (-t)^{n-|I|}\,(1-t)^{|I|} \sum_{\alpha > 0} B^I(\alpha)\,t^\alpha + (-t)^n,$$

где $|I|$ — число элементов в множестве I. Обозначим через $p[g]$ производящую функцию ньютонова спектра в Ω_f: $p[g]\,(t) = \Sigma g(\alpha)\,t^\alpha$

Л е м м а 5. *Справедливы равенства*: 1) $p[g]\,(t) = p[T]\,(t)$; 2) $p[g]\,(t) = p[B]\,(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Другая формула для ньютонова спектра была найдена Стинбринком [4]. Первое равенство леммы вытекает из формулы Стинбринка с помощью формулы включения–исключения. Второе равенство вытекает из первого с помощью формулы включения–исключения и бинома Ньютона.

5. С и м м е т р и я н ь ю т о н о в а с п е к т р а в Ω_f. В лемме 5 приводятся две формулы для ньютонова спектра. Ниже мы показываем, что спектр, определенный первой формулой, симметричен относительно точки $n/2$ спектру, определенному второй формулой. В терминах производящих функцией симметрия спектра заключается в равенстве $t^n p[g]\,(t^{-1}) = p[g]\,(t)$. Оно эквивалентно доказываемому ниже равенству $t^n p[T]\,(t^{-1}) = p[B]\,(t)$.

Г е о м е т р и я ц е л о ч и с л е н н ы х м н о г о г р а н н и к о в. Функции B^I и T^I на единичном отрезке ведут себя достаточно прихотливо. Если же аргумент менять лишь на целые числа, то эти функции меняются полиномиально. Именно, справедлива

Л е м м а 6. *Для $\alpha \geqslant 0$ существует полином T^I_α и для $\alpha > 0$ существует полином B^I_α такие, что для любых целых неотрицательных m выполнены равенства*

$$T^I_\alpha\,(m) = T^I(\alpha + m); \quad B^I_\alpha\,(m) = B^I(\alpha + m).$$

Л е м м а 7. *При $1 > \alpha \geqslant 0$ полиномы T^I_α и $B^I_{1-\alpha}$ связаны соотношением* $T^I_\alpha(-u) = (-1)^{|I|-1}\,B^I_{1-\alpha}$.

Леммы 6, 7 легко вытекают из результатов статьи [10]. Лемма 7 — одно из проявлений двойственности между внутренними целыми точками и целыми точками в многограннике (ср. [11, 12]).

П р о и з в о д я щ и е ф у н к ц и и п о л и н о м о в. Для доказательства симметрии ньютонова спектра в Ω_f воспользуемся следующей леммой о производящих функциях от полиномов, проверяемой непосредственным суммированием.

Лемма 8. *Пусть P – полином одной переменной; тогда ряды* $\sum_{m\geqslant 0} P(m)\, t^{-m}$ и $\sum_{m>0} -P(-m)\, t^m$, *сходящиеся соответственно при* $|t|>1$ *и* $|t|<1$, *определяют одну и ту же рациональную функцию.*

Лемма 9. *Ряды* $\sum_{\alpha\geqslant 0} T^I(\alpha)\, t^{-\alpha}$ *и* $(-1)^I \sum_{\alpha>0} B^I(\alpha)\, t^{\alpha}$ *определяют одну и ту же функцию.*

Доказательство.

$$\sum_{\alpha\geqslant 0} T^I(\alpha)\, t^{-\alpha} = \sum_{1>\alpha\geqslant 0} t^{-\alpha} \sum_{m\geqslant 0} T^I(\alpha+m)\, t^{-m}$$

Согласно леммам 6, 8, 7 имеем

$$\sum_{m\geqslant 0} T^I(\alpha+m)\, t^{-m} = \sum_{m>0} -T^I_{\alpha}(-m)\, t^m =$$

$$= -(-1)^{|I|-1} \sum_{m>0} B^I_{1-\alpha}(m-1)\, t^m = (-1)^{|I|} t \sum_{m\geqslant 0} B^I_{1-\alpha}(m)\, t^m.$$

Далее,

$$(-1)^{|I|} \sum_{\alpha>0} B^I(\alpha)\, t^{\alpha} = (-1)^{|I|} \sum_{1>\alpha\geqslant 0} t^{1-\alpha} \sum_{m\geqslant 0} B^I_{1-\alpha}(m)\, t^m.$$

Из леммы 9 моментально вытекает равенство $t^n p[T](t^{-1}) = p[B](t)$, которое и доказывает симметрию ньютонова спектра относительно точки $n/2$. Лемма 4 доказана.

6. Формулировка утверждений о пространстве $\overline{\Omega}_f$.

Теорема 4. *Производящая функция* $p[\overline{h}](t) = \Sigma \overline{h}(\alpha)\, t^{\alpha}$ *спектра ходжевой фильтрации в* $\overline{\Omega}_f$ *дается формулами*

1) $p[\overline{h}](t) = (1-t)^{-1} t^{-1} p[T](t)$,

2) $p[\overline{h}](t) = (1-t)^{-1} t^{-1} p[B](t)$,

где $p[T]$, $p[B]$ – *функции из леммы* 5.

Отметим, что при $\alpha\geqslant n-2$ число $\overline{h}(\alpha)$ равно кратности числа $\exp(2\pi i\alpha)$ в спектре оператора монодромии ростка f, в частности $\overline{h}(\alpha) = \overline{h}(\alpha+1)$.

Теорема 5. *В пространстве* $\overline{\Omega}_f$ *ньютонова фильтрация после сдвига номеров на* -1 *совпадает с ходжевой.*

Теорема 5 означает следующее: если форма $\omega\in\Omega^n$ имеет ньютонов порядок α и этот порядок нельзя увеличить, прибавляя к ω формы вида $df\wedge d\eta$, где $\eta\in\Omega^{n-2}$, то ходжев порядок ω равен $\alpha-1$.

Сформулируем следствие теорем 4, 5. Обозначим через H_{α} фактор-пространство голоморфных форм ньютонова порядка $\geqslant\alpha+1$ по следующему соотношению эквивалентности: две формы эквивалентны, если их интегралы по любому непрерывному семейству $\delta(t)$ исчезающих циклов различаются на $o(t^{\alpha+\epsilon})$, где ϵ – подходящее достаточно малое положительное число.

Следствие. *Размерность пространства* H_{α} *равна кратности числа* α *в ходжевом спектре пространства* $\overline{\Omega}_f$ *и может быть вычислена по формулам теоремы 4. В частности, при* $\alpha\geqslant n-2$ $\dim H_{\alpha} = \dim H_{\alpha+1}$.

7. Доказательство теоремы 4. Оператор интегрирования ∂^{-1}. В $\overline{\Omega}_f$ корректно определен оператор ∂^{-1}, относящий классу $[\omega]\in\overline{\Omega}_f$ класс формы $[df\wedge\eta]$, где $d\eta=\omega$. По формуле дифференцирования интеграла

$$\frac{d}{dt}\int_{\delta(t)} \eta = \int_{\delta(t)} \omega/df$$

для любого семейства $\delta(t)$ исчезающих циклов. Таким образом, ∂^{-1} увеличивает ходжев порядок на 1. Согласно теореме Брискорна [6] имеем $\cap \partial^{k} \overline{\Omega}_f = 0$. Пространство Ω_f совпадает с кообразом оператора ∂^{-1} Из перечисленных свойств оператора ∂^{-1} и простых соображений линейной алгебры вытекает, что ходжевы спектры в $\overline{\Omega}_f$ и в Ω_f связаны соотношением $\overline{h}(\alpha) = \sum_{k \geqslant 0} h(\alpha - k)$. Для производящих функций это равенство означает, что $\Sigma \overline{h}(\alpha)\, t^{\alpha} = (1-t)^{-1} \Sigma h(\alpha)\, t^{\alpha}$ Теперь теорема 4 вытекает из теорем 1, 2.

8. Доказательство теоремы 5.

Лемма 10. *∂^{-1} увеличивает ньютонов порядок не менее чем на* 1.

Действительно, если $\omega = h\,dx$, то $g\,dx$, где $g = f'_{x_1} \int_0^{x_1} h(s, x_2, \ldots, x_n)\, ds$ — представитель класса $\partial^{-1}[\omega]$.

Линейная алгебра. Пусть L: $V \to V$ — оператор в линейном (бесконечномерном) пространстве, имеющий нулевое ядро, конечномерный кообраз и свойство $\cap L^j(V) = 0$. Пусть $d_1, d_2: V \to R$ — функции со свойствами: $d_i(x+y) \geqslant \min(d_i(x), d_i(y))$; $d_i(x+y) = d_i(x)$, если $d_i(x) < d_i(y)$; $d_i(ax) = d_i(x)$, где $x, y \in V$, a — число, не равное нулю. Функция d_i определяет убывающую фильтрацию $\{V^i_\alpha = \{v \in V \mid d_i(v) \geqslant \alpha\}\}$. Предположим, что: 1) пространства V^i_α имеют конечную коразмерность в V, 2) проекции фильтраций $\{V^1_\alpha\}$, $\{V^2_\alpha\}$ в $V/L(V)$ совпадают, 3) $d_1 \geqslant d_2$, 4) $d_1 \circ L = d_1 + \delta$, $d_2 \circ L \geqslant d_2 + \delta$, где δ — некоторое (фиксированное) число.

Лемма 11. *В этих предложениях* $d_1 = d_2$.

Лемма 11 — утверждение из линейной алгебры и мы опускаем ее доказательство. Теорема 5 вытекает из леммы 11 и теоремы 2, если в качестве V, L, d_1, d_2, δ взять соответственно $\overline{\Omega}_f, \partial^{-1}$, ходжев порядок, ньютонов порядок, уменьшенный на 1, число 1.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Всесоюзный научно-исследовательский институт системных исследований, Москва

Поступило 29 VI 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Варченко А.Н.* — ДАН, 1980, т. 255, № 5, с. 1035. 2. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. II. М.: Наука, 1984. 3. *Арнольд В.И.* — Функц. анализ и его прилож., 1978, т. 12, вып. 1, с. 1. 4. *Steenbring J.* — Nordic summer school, symp. in math., Oslo, 1976, p. 525. 5. *Saito M.* Exponents and Newton polyhedra of isolated hypersurface singularities. Inst. Fourier en Grenoble, 1983, p. 1–10. 6. *Брискорн Э.* — Математика, 1971, т. 15, вып. 4, с. 130. 7. *Варченко А.Н.* — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1981, т. 45, вып. 3, с. 540. 8. *Хованский А.Г.* — Современные проблемы математики, 1983, т. 22, с. 207. 9. *Koushnirenko A.G.* — Invent. math., 1976, vol. 32, p. 1. 10. *McMullen P.* — Arch. Math., 1978, Bd. 31, S. 509–516. 11. *E. Ehrhart* — C.R. Ser. A, 1967, vol. 265, p. 5–7. 12. *Хованский А.Г.* — Функц. анализ и его прилож., 1977, т. 11, вып. 4, с. 56–64.