*Функциональный анализ и его приложения,*
т. 13, вып. 1, 1979, 49—58.

УДК 513.60 + 517.9

# ИНДЕКС ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

А. Г. Хованский

В статье приводится ряд оценок на индекс полиномиального векторного поля с компонентами фиксированных степеней. Приводятся примеры, показывающие, что эти оценки точны.

Доказательство оценок в невырожденном случае тесно связано с доказательством из статьи И. Г. Петровского и О. А. Олейник [1], в которой оцениваются эйлеровы характеристики некоторых алгебраических множеств. Кроме того, оно тесно связано с доказательством из недавней статьи В. И. Арнольда [2] и объясняет связь между этими двумя рассуждениями. Как и в статье [2], индекс связывается с сигнатурой некоторой квадратичной формы (см. также [3] и [4]). Как и в статье [1], ключевой момент доказательства — применение формулы Эйлера — Якоби.

Я признателен В. И. Арнольду, который до опубликования статьи [2] рассказал мне о своих результатах и заинтересовал этой тематикой. В. И. Арнольдом был поставлен (см. [2]) вопрос о точности неравенств Петровского — Олейник, положительный ответ на который дается в этой статье.

## § 1. Обозначения и формулировки результатов

**1.1.** Обозначения. Пусть $V = P_1, \ldots, P_n$ — векторное поле в $\mathbf{R}^n$ с полиномиальными компонентами $P_i$ и $P_0$ — полином. Обозначим через ind сумму индексов всех особых точек поля $V$ в $\mathbf{R}^n$ и через $\mathrm{ind}^+$, $\mathrm{ind}^-$ — сумму индексов особых точек поля $V$ в областях $P_0 > 0$ и $P_0 < 0$. Будем говорить, что пара $V$, $P_0$ имеет степень, не превосходящую (равную) $m$, $m_0$, где $m = m_1, \ldots, m_n$, если степени всех полиномов $P_i$, $i = 0, \ldots, n$, не превосходят (равны) $m_i$. Будем говорить, что *пара* $V$, $P_0$ *невырождена*, если, во-первых, вещественная гиперповерхность $P_0 = 0$ не проходит через особые точки поля $V$, и, если, во-вторых, вещественные особые точки поля $V$ некратны и «лежат в конечной части пространства $\mathbf{R}^n$». (Напишем подробнее последнее условие. Пусть $\bar{P}_i$ такие однородные полиномы степеней $m_i$ от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$, что $\bar{P}_i(1, x_1, \ldots, x_n) \equiv P_i(x_1, \ldots, x_n)$. Последнее условие означает, что система $\bar{P}_1 = \ldots = \bar{P}_n = x_0 = 0$ имеет только тривиальное решение $x_0 = x_1 = \ldots = x_n = 0$.)

Введем несколько обозначений.

$\Delta(m)$ — параллелипипед в $\mathbf{R}^n$, определенный неравенствами $0 \leqslant y_1 \leqslant m_1 - 1, \ldots, 0 \leqslant y_n \leqslant m_n - 1$.

$\mu = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$ — число целых точек в параллелепипеде $\Delta(m)$.

$\Pi(m)$ — число целых точек в центральном сечении $y_1 + \ldots + y_n = {}^1/_2 (m_1 + \ldots + m_n - n)$ параллелепипеда $\Delta(m)$.

$\Pi(m, m_0)$ — число целых точек параллелепипеда $\Delta(m)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{1}{2}(m_1+\ldots+m_n-n-m_0)\leqslant y_1+\ldots+y_n\leqslant\frac{1}{2}(m_1+\ldots+m_n-n+m_0).$$

$O(m, m_0)$ — число целых точек параллелепипеда $\Delta(m)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{1}{2}(m_1+\ldots+m_n-n-m_0)\leqslant y_1+\ldots+y_n\leqslant\frac{1}{2}(m_1+\ldots+m_n-n).$$

Отметим, что $O(m, m_0)={}^1/_2(\Pi(m,m_0)+\Pi(m))$ и что $\Pi(m)\equiv\equiv\Pi(m, m_0)\equiv\mu \bmod 2$.

**1.2.** Формулировки результатов.

Теорема 1. *Для невырожденной пары $V$, $P_0$ степени $m$, $m_0$ числа $a=\operatorname{ind}$, $b=\operatorname{ind}^+-\operatorname{ind}^-$ и $c=\operatorname{ind}^+$ удовлетворяют неравенствам $|a|\leqslant\Pi(m)$, $|b|\leqslant\Pi(m, m_0)$ и $|c|\leqslant O(m, m_0)$ и сравнениям $a\equiv\equiv b\equiv\mu \bmod 2$. Обратно, для любого числа $a$ (числа $b$, числа $c$), удовлетворяющего этим ограничениям, существует невырожденная пара $V$, $P_0$ степени $m$, $m_0$, для которой $\operatorname{ind}=a$ ($\operatorname{ind}^+-\operatorname{ind}^-=b$, $\operatorname{ind}^+=c$).*

Следствие 1. *Индекс $\operatorname{ind}$ изолированной особой точки поля $V=P_1,\ldots,P_n$ с однородными компонентами степени $m=m_1,\ldots,m_n$ удовлетворят неравенству $|\operatorname{ind}|\leqslant\Pi(m)$ и сравнению $\operatorname{ind}\equiv\mu \bmod 2$. Никаких других ограничений на число $\operatorname{ind}$ не существует.*

Неравенство $|\operatorname{ind}|\leqslant\Pi(m)$, фигурирующее в следствии 1, было доказано В. И. Арнольдом [2] и было названо им неравенством Петровского — Олейник. В следствии 1 утверждается также точность этого неравенства.

Можно оценить индекс и для векторных полей $V$ с «бесконечно удаленными особыми точками». Число $\operatorname{ind}^+$ определено, если область $P_0>0$ содержит только изолированные особые точки поля $V$. Число $\operatorname{ind}$ определено, если все особые точки поля $V$ изолированы.

Теорема 2. *Пусть для пары $V$, $P_0$ степени, не превосходящей $m$, $m_0$, определено число $\operatorname{ind}^+$. Тогда, если $m_0+\ldots+m_n\equiv n \bmod 2$, то модуль числа $\operatorname{ind}^+$ не превосходит $O(m, m_0)$. В этом случае никаких других ограничений на число $\operatorname{ind}^+$ не существует. Если $m_0+\ldots+m_n\not\equiv n \bmod 2$ и $m_0$ четно, то модуль числа $\operatorname{ind}^+$ не превосходит $O(m, m_0+1)$. В этом случае существуют пары $V$, $P_0$, для которых $\operatorname{ind}^+=\pm O(m, m_0+1)$.*

Следствие 2. *Пусть $V$ — векторное поле степени, не превосходящей $m=m_1,\ldots,m_n$, с изолированными особыми точками. Тогда при $m_0+\ldots+m_n\equiv n \bmod 2$ справедлива оценка $|\operatorname{ind}|\leqslant\Pi(m)$ и при $m_0+\ldots+m_n\not\equiv n \bmod 2$ справедлива оценка $|\operatorname{ind}|\leqslant O(m, 1)$. Обе эти оценки точные.*

Несколько слов о расположении материала. В § 3 приводятся примеры пар $V$, $P_0$. Эти примеры доказывают в одну сторону теоремы 1 и 2, а также их следствия. Для построения примеров полезны проективные преобразования, которые обсуждаются в § 2. В § 4 говорится о связи индекса с сигнатурой некоторой квадратичной формы на алгебре функций $L_\tau$. Алгебра $L_\tau$ описывается в § 5. В § 6 завершается доказательство теоремы 1 и в § 7 завершается доказательство теоремы 2.

## § 2. Проективные преобразования

Пусть $\Gamma$ — гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$, определенная линейным неоднородным уравнением $l(x)=l_1(x)+l_0=0$. Сделаем проективное преобразование $g\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, переводящее гиперплоскость $\Gamma$ в бесконечно удаленную; $g(x)=[1/l(x)]A(x)$, где $A(x)$ — аффинное преобразование.

Проективным преобразованием пары $V$, $P_0$, где $V$ — векторное поле с компонентами $P_1, \ldots, P_n$ степеней $m_1, \ldots, m_n$ и $P_0$ — полином степени $m_0$, назовем пару $\tilde{V}, \tilde{P}_0$, где $\tilde{V} = \tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n$ и $\tilde{P}_i(x) = l^{m_i}(x) P_i(g(x))$ при $i = 0, \ldots, n$. Если $a$ — особая точка для поля $V$, то точка $\tilde{a} = g^{-1}(a)$ будет особой для поля $\tilde{V}$. Якобиан $\det \partial g/\partial x$ определен вне гиперплоскости $\Gamma$ и нигде не обращается в нуль. Скажем, что преобразование $x \to g(x) = [1/l(x)]A(x)$ *положительно*, если его якобиан положителен в области $l(x) > 0$. При нечетных $n$ пространство $\mathbf{RP}^n$ ориентируемо и положительные преобразования совпадают с преобразованиями, сохраняющими ориентацию. В общем случае положительные преобразования в точности соответствуют линейным преобразованиям $\mathbf{R}^{n+1}$ с положительным определителем.

Нас будет интересовать, как меняются глобальные характеристики ind, $\mathrm{ind}^+$ и $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ пары $V$, $P_0$ при проективных преобразованиях. Каждая из этих глобальных характеристик получается суммированием соответствующих локальных характеристик по множеству $X$ особых точек поля $V$. Символически это можно записать в виде равенства $F(V, P_0) = \sum_{a \in X} F(V, P_0)_a$, где $F$ или ind, или $\mathrm{ind}^+$, или $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$.

Для поля $V$ и проективного преобразования $x \to g(x)$ обозначим через $X(g)$ множество особых точек $a$ поля $V$, для которых определено $\tilde{a} = g^{-1}(a)$. Характеристика $F$ пары $V$, $P_0$ называется проективно *инвариантной*, если для любого положительного $g = [1/l(x)]A(x)$ и $a \in X(g)$ справедливо равенство $F(V, P_0)_a = F(\tilde{V}, \tilde{P}_0)_{\tilde{a}}$. Характеристика $F$ называется *антиинвариантной*, если $F(V, P_0)_a = \operatorname{sign} l(\tilde{a}) F(\tilde{V}, \tilde{P}_0)_{\tilde{a}}$.

Несложная проверка доказывает следующее

Утверждение. 1. *Проективно инвариантны характеристики*: ind, *если* $m_1 + \ldots + m_n \neq n \mod 2$; $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$, *если* $m_0 + \ldots + m_n \neq n \mod 2$, *и* $\mathrm{ind}^+$, *если* $m_0 + \ldots + m_n \not\equiv n \mod 2$ *и* $m_0$ *четно*.

2. *Проективно антиинвариантны характеристики*: ind, *если* $m_1 + \ldots + m_n = n \mod 2$; $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$, *если* $m_0 + \ldots + m_n = n \mod 2$, *и* $\mathrm{ind}^+$, *если* $m_0 + \ldots + m_n = n \mod 2$ *и* $m_0$ *четно*.

Отметим, что характеристика $\mathrm{ind}^+$ при нечетном $m_0$, вообще говоря, не инвариантна и не антиинвариантна.

Обозначим через $\Gamma_\infty$ образ бесконечно удаленной плоскости при проективном преобразовании. Для $g(x) = [1/l(x)]A(x)$, где $A(x)$ — линейное преобразование и $l(x) = l_1(x) + l_0$, уравнение гиперплоскости $\Gamma_\infty$ имеет вид $l_1(A^{-1}(x)) = 1$. С гиперплоскостью $l_1(x) = p$, где $p > 0$, свяжем преобразование $x \to (p \cdot x)/(l_1(x) + 1)$, для которого эта плоскость есть $\Gamma_\infty$. Инвариантные характеристики особых точек поля сохраняются при проективном преобразовании. Антиинвариантные характеристики сохраняются для особых точек, лежащих в одном из полупространств с границей $\Gamma_\infty$, и изменяют знак для особых точек, лежащих в другом полупространстве.

## § 3. Примеры

**3.1.** При построении примеров для нас основную роль будет играть простейшее поле $V(m)$ степени $m = m_1, \ldots, m_n$ с компонентами $P_i = \prod_{0 \leqslant k \leqslant m_i - 1} (x_i - k)$, $i = 1, \ldots, n$. Отметим, что все особые точки поля $V(m)$ совпадают с целыми точками многогранника $\Delta(m)$, определенного неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant m_i - 1$, $i = 1, \ldots, n$. Знаки якобиана в особых точках чередуются в «шахматном порядке». При этом в особых точках, лежащих на одном сечении $\Sigma x_i = k$, знак якобиана одинаковый. При переходе к следующему сечению $\Sigma x_i = k + 1$ этот знак меняется на противоположный. В этом параграфе часто встречается число ${}^1/_2\ \Sigma\ (m_i - 1)$, которое мы обозначим через $\rho$.

**3.2.** Остановимся подробно на характеристике ind. Рассмотрим случай $m_0 + \ldots + m_n \not\equiv n \bmod 2$. В этом случае $\Pi\ (m) = 0$, и, по теореме 1, любое невырожденное поле $V$ имеет нулевой индекс. Так, поле $V\ (m)$ содержит по одинаковому числу особых точек на сечениях $\Sigma x_i = \rho + {}^1/_2 + k$ и $\Sigma x_i = \rho - {}^1/_2 - k$, а знаки якобианов в особых точках на этих сечениях противоположны. Характеристика ind в рассматриваемом случае инвариантна. Сделаем проективное преобразование, для которого плоскость $\Gamma_\infty$ имеет уравнение $\Sigma x_i = \rho - {}^1/_2$. Для получившегося вырожденного поля $V$ модуль индекса равняется $O\ (m, 1)$: действительно, прообразы особых точек сечения $\Sigma x_i = \rho - {}^1/_2$ «лежат в бесконечности», и прообразы особых точек сечения $\Sigma x_i = \rho + {}^1/_2$ ничем не компенсируются, а их число равно $O\ (m, 1)$. Для построения примера поля $V$ с индексом противоположного знака достаточно сменить знак у одной из компонент поля $V$.

Рассмотрим случай $m_1 + \ldots + m_n \equiv n \bmod 2$. В этом случае характеристика ind антиинвариантна. На центральном сечении $\Sigma x_i = \rho$ прямоугольника $\Delta\ (m)$ лежит ровно $\Pi\ (m)$ особых точек поля $V\ (m)$. На сечениях $\Sigma x_i = \rho - k$ и $\Sigma x_i = \rho + k$ лежит по одинаковому числу особых точек с якобианами одного знака. Сделаем проективное преобразование $x \to g\ (x)$, для которого плоскость $\Gamma_\infty$ имеет уравнение $\Sigma x_i = \rho - {}^1/_2$, например, преобразование $x \to (\rho - {}^1/_2)\ x/(\Sigma x_i + 1)$. Сечения $\Sigma x_i = \rho + k$ и $\Sigma x_i = \rho - k$ при $k > 0$ лежат в разных полупространствах с границей $\Gamma_\infty$. Индексы прообразов особых точек поля $V\ (m)$, лежащих на этих сечениях, будут компенсировать друг друга. Поэтому модуль индекса поля $\tilde V$ будет равен числу особых точек поля $V\ (m)$, лежащих на сечении $\Sigma x_i = \rho$, т. е. будет равен $\Pi\ (m)$. Вот явная формула компоненты $\tilde P_i$ поля $\tilde V : \tilde P_i\ (x) = \prod\limits_{0 \leqslant k < m_i} \left[\left(\rho - \frac{1}{2}\right) x_i - k \left(\sum x_i + 1\right)\right]$.

При небольшом шевелении плоскости $\Gamma_\infty$ индекс поля $\tilde V$ не меняется. Зададим $\Gamma_\infty$ уравнением $\Sigma a_i x_i = t$, где $a_i$ — числа, близкие к единице, независимые над полем рациональных чисел, и $t$ близко к $\rho - {}^1/_2$. Начнем теперь увеличивать число $t$. При этом индекс поля $\tilde V$ не будет меняться до тех пор, пока $\Gamma_\infty$ не пройдет через особую точку поля $V\ (m)$ с центрального сечения $\Sigma x_i = \rho$. В этот момент поле $\tilde V$ станет вырожденным и его индекс изменится на единицу. Если число $t$ еще немного увеличить, то поле $\tilde V$ снова станет невырожденным и его индекс изменится еще на 1. Продолжая движение плоскости $\Gamma_\infty$, мы получим примеры невырожденных полей $\tilde V$ степени $m$ с любым индексом, удовлетворяющим условиям $|\operatorname{ind}| \leqslant \Pi\ (m)$, $\operatorname{ind} \equiv \mu \bmod 2$. Старшие однородные составляющие компонент поля $\tilde V$ образуют поле с изолированной особой точкой нуль и тем же индексом. При этом движении мы также получим примеры вырожденных векторных полей с любым индексом, не превосходящим по модулю $\Pi\ (m)$.

**3.3.** Перейдем теперь к характеристикам $\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^-$ и $\operatorname{ind}^+$. Остановимся сначала на случае $m_0 + \ldots + m_n \equiv n \bmod 2$. Характеристика $\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^-$ в этом случае антиинвариантна. Пусть дополнительно $m_0$ нечетно, $m_0 = 2q + 1$. Рассмотрим пару $V\ (m)$, $P_0$, где $P_0 = \prod\limits_{k \in I} \left(\sum x_i - \rho + k\right)$ и $I = \{\pm 1, \ldots, \pm q, q + 1\}$. Сделаем проективное преобразование, для которого $\Gamma_\infty$ имеет уравнение $\Sigma x_i = \rho$. Полученная после преобразования невырожденная пара $\tilde V$, $\tilde P_0$ будет иметь экстремальные характеристики

$|\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^-| = \Pi(m, m_0)$ и $|\operatorname{ind}^+| = O(m, m_0)$. Передвигая плоскость $\Gamma_\infty$, как и выше, мы получим примеры невырожденных и вырожденных пар $\tilde V$, $\tilde P_0$, для которых характеристики $\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^-$ и $\operatorname{ind}^+$ принимают все значения, не противоречащие теоремам 1 и 2.

Аналогично обстоит дело в случае четного $m_0$, $m_0 = 2q$, и $m_0 + \ldots + m_n \equiv n \bmod 2$. Здесь надо начинать с пары $V(m)$, $P_0$, где $P_0 = (-1)^q \prod\limits_{k\in I}\left(\sum x_i - \rho + \frac{1}{2} - k\right)$ и $I = \{\pm 1, \ldots, \pm q\}$, и плоскости $\Gamma_\infty$ с уравнением $\Sigma x_i = \rho - {}^1/_2$.

Перейдем теперь к случаю $m_0 + \ldots + m_n \not\equiv n \bmod 2$. Случай $m_0 = 0$ уже разобран, и можно считать, что $m_0 > 0$. В этом случае справедливы равенства $\Pi(m, m_0) = \Pi(m, m_0 - 1)$ и $O(m, m_0) = O(m, m_0 - 1)$. Поэтому для построения невырожденных пар $V$, $P_0$ с любыми характеристиками $\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^-$ и $\operatorname{ind}^+$, не противоречащими теореме 1, достаточно воспользоваться уже построенными примерами невырожденных пар $V$, $Q$, где степень $Q$ равна $m_0 - 1$. Достаточно рассмотреть пары $V$, $P_0$, где $P_0 = Q(\Sigma x_i + a)$. При достаточно большом $a$ пары $V$, $P_0$ и $V$, $Q$ имеют одинаковые характеристики $\operatorname{ind}^+$ и $\operatorname{ind}^-$.

Приведем пример вырожденной пары $V$, $P_0$ с экстремальной характеристикой $\operatorname{ind}^+$ при четном $m_0 = 2q$ и $m_0 + \ldots + m_n \not\equiv n \bmod 2$. Возьмем поле $V(m)$ и полином $P_0 = (-1)^q \prod\limits_{k\in I}\left(\sum x_i - \rho - k\right)$, где $I = \{\pm 1, \ldots, \pm q\}$. Сделаем проективное преобразование, для которого плоскость $\Gamma_\infty$ имеет уравнение $\Sigma x_i = \rho - {}^1/_2$. Для полученной пары $\tilde V$, $\tilde P_0$ характеристика $\operatorname{ind}^+$ будет равна по модулю числу $O(m, m_0 + 1)$.

## § 4. Сигнатура и индекс

**4.1.** Конечное множество с инволюцией. Пусть $A$ — конечное множество, содержащее $\mu$ элементов, $\tau\colon A \to A$ — инволюция этого множества и $X$ — множество неподвижных точек инволюции. Рассмотрим алгебру $L_\tau$ над полем $\mathbf{R}$ всех комплекснозначных функций на $A$, для которых $f\cdot\tau = \bar f$. Пусть $\varphi$ — фиксированная функция из $L_\tau$, нигде не обращающаяся в нуль. Число точек множества $X$, на которых функция $\varphi$ положительна, обозначим через $\varphi^+$, а на которых отрицательна — через $\varphi^-$. Рассмотрим билинейную форму $\omega_\varphi$ на $L_\tau$, определенную равенством $\omega_\varphi(f, g) = \sum\limits_{a\in A} \varphi(a) f(a) g(a)$. Сигнатуру квадратичной формы $K$ будем обозначать через $\sigma K$.

Лемма. *Размерность алгебры $L_\tau$ равна $\mu$. Квадратичная форма $K_\varphi(f) = \omega_\varphi(f, f)$ принимает вещественные значения и невырождена. Сигнатура $\sigma K_\varphi$ равна $\varphi^+ - \varphi^-$. В частности, $\sigma K_\varphi$ при $\varphi = 1$ равняется числу неподвижных точек инволюции.*

Доказательство. Под действием инволюции $\tau$ множество $A$ распадается на инвариантные множества $A^k$, состоящие из одной или двух точек. Обозначим через $L_\tau^k$ подалгебру алгебры $L_\tau$, состоящую из функций с носителем $A^k$, $L_\tau = \Sigma L_\tau^k$. Подпространства $L_\tau^k$ ортогональны относительно формы $\omega_\varphi$. Если $A^k$ состоит из одной точки $a$, $a \in X$, то $\dim L_\tau^k = 1$ и сигнатура ограничения формы $K_\varphi$ на $L_\tau^k$ равна $\operatorname{sign}\varphi(a)$. Для двухточечных множеств $A^k = \{a, \tau a\}$ $\dim L_\tau^k = 2$. В этом случае ограничение формы $K_\varphi$ на $L_\tau^k$ равняется $\varphi(a) f^2(a) + \varphi(\tau a) f^2(\tau a) = 2\operatorname{Re}\varphi(a) f^2(a)$. Сигнатура такой формы, как легко видеть, равна нулю. Лемма доказана.

Следствие. 1. *Справедливо сравнение* $\varphi^+ - \varphi^- \equiv \mu \bmod 2$. 2. *Пусть* $L_0$ — *любое линейное подпространство алгебры* $L_\tau$, *на котором форма* $K_\varphi$ *тождественно равна нулю. Тогда справедлива оценка* $|\varphi^+ - \varphi^-| \leqslant \mu - 2 \dim L_0$. *Если нулевое подпространство максимально, то эта оценка точна.*

Действительно, сигнатура невырожденной формы всегда имеет ту же четность, что и размерность пространства. Далее, для любой невырожденной формы $K$ на $\mathbf{R}^\mu$ с нулевым подпространством $L_0$ справедлива оценка $|\sigma K| \leqslant \mu - 2 \dim L_0$. Для максимального подпространства $L_0$ эта оценка точна.

Мы будем применять лемму и следствие в том случае, когда $A$ — множество комплексных особых точек вещественного векторного поля и $\tau$: $A \to A$ — инволюция комплексного сопряжения.

**4.2.** Рассмотрим вещественное векторное поле $V$ в $\mathbf{R}^n$ с полиномиальными компонентами $V = P_1, \ldots, P_n$. Пусть $A \subset \mathbf{C}^n$ — множество комплексных решений системы

$$P_1 = \ldots = P_n = 0 \tag{1}$$

и $\tau$: $A \to A$ — инволюция комплексного сопряжения. Множество $X$ неподвижных точек при инволюции $\tau$ совпадает с множеством вещественных решений системы (1). Допустим, что все комплексные решения $a \in A$ системы (1) некратны. Это означает, что якобиан $j(x) = \det \partial P/\partial x$ системы (1) не обращается в нуль в точках множества $A$. Пусть $P_0$ — любой полином с вещественными коэффициентами, не обращающийся в нуль в точках множества $A$.

Применяя предыдущую лемму, получим следующее утверждение.

Утверждение. *Сигнатура* $\sigma K_\varphi$ *квадратичной формы* $K_\varphi(f) = \sum_{a \in A} \varphi(a) f^2(a)$ *равняется при* $\varphi = 1$ *числу вещественных особых точек поля* $V$. *При* $\varphi = 1/j$, *где* $j$ — *якобиан системы* (1), $\sigma K_\varphi = \operatorname{ind}$, *и при* $\varphi = P_0/j$ $\sigma K_\rho = \operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^-$.

Теперь для оценки чисел ind и $\operatorname{ind}^+ - \operatorname{ind}^-$ нужно описать алгебру $L_\tau$ и предъявить возможно большее нулевое подпространство для формы $K_\varphi$ при $\varphi = 1/j$ и при $\varphi = P_0/j$. Нулевое подпространство предъявляется при помощи формулы Эйлера — Якоби. Напомним эту формулу.

Рассмотрим систему $n$ полиномиальных уравнений степеней $m_1, \ldots, m_n$ от $n$ комплексных неизвестных

$$P_1 = \ldots = P_n = 0.$$

Допустим, что множество корней системы имеет ровно $\mu = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$ элементов. В этом случае якобиан системы $j = \det \partial P/\partial x$ не обращается в нуль на множестве $A$. Тогда для *любого полинома $Q$ степени, меньшей чем* $\Sigma m_i - n$, *справедлива следующая формула Эйлера — Якоби:* $\sum_{a \in A} \frac{Q(a)}{j(a)} = 0$.

Чисто алгебраическое доказательство этой формулы можно найти в [5]. Аналитическое доказательство и обобщение для невырожденных систем уравнений с фиксированными многогранниками Ньютона — в [6].

## § 5. Удобные системы уравнений

Систему уравнений $P_1 = \ldots = P_n = 0$ степеней $m_1, \ldots, m_n$ будем называть *невырожденной*, если она имеет ровно $\mu = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$ различных корней.

Рассмотрим параллелепипед $\Delta(m)$ в $\mathbf{R}^n$, определенный неравенствами $0 \leqslant y_1 \leqslant m_1 - 1, \ldots, 0 \leqslant y_n \leqslant m_n - 1$. Пусть $M(m)$ — пространство полиномов с многогранником Ньютона $\Delta(m)$. Полином $Q \in M(m)$, если и только если степень полинома $Q$ по переменным $x_i$ меньше, чем $m_i$. Размерность пространства $M(m)$ над полем $\mathbf{C}$ равна $m_1 \cdot \ldots \cdot m_n = \mu$.

Назовем невырожденную систему *удобной*, если любая комплекснозначная функция $f$ на множестве $A$ ее корней является ограничением некоторого полинома из пространства $M(m)$.

Лемма 1. *Система уравнений* $\prod\limits_{0 \leqslant k < m_1} (x_1 - k) = \ldots = \prod\limits_{0 \leqslant k < m_n} (x_n - k) = 0$ *удобна.*

Действительно, множество $A$ корней этой системы содержит ровно $\mu = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$ элементов. Далее, уравнения системы можно переписать в виде равенств $x_1^{m_1} = Q_1(x_1), \ldots, x_n^{m_n} = Q_n(x_n)$, в которых $Q_1, \ldots, Q_n$ — многочлены степеней $m_1 - 1, \ldots, m_n - 1$. Пользуясь этими равенствами, несложно показать, что любой полином $Q(x)$ на множестве $A$ совпадает с некоторым полиномом из пространства $M(m)$. Отсюда вытекает лемма 1, так как любая функция $f$ на конечном множестве $A$ является ограничением некоторого полинома.

Лемма 2. *Неудобные системы образуют гиперповерхность в пространстве всех систем степени $m$.*

Действительно, вырожденные системы, как известно, образуют гиперповерхность в пространстве всех систем степени $m$. Возьмем любую невырожденную систему и произвольным образом занумеруем ее корни $a_1, \ldots, a_\mu$. Затем произвольным образом занумеруем целые точки в многограннике Ньютона $\Delta(m)$. Эти нумерации задают базисы в $\mu$-мерном пространстве $\mathbf{C}(A)$ всех комплекснозначных функций на $A$ и в $\mu$-мерном пространстве $M(m)$. Обозначим через det определитель матрицы отображения ограничения $i\colon M(m) \to \mathbf{C}(A)$ в этих базисах. Число $\det^2$ не зависит от выбора нумераций. Число $\det^2$ зависит лишь от коэффициентов системы, причем эта зависимость аналитическая. Невырожденная система удобна, если и только если число $\det^2$ для нее отлично от нуля. Функция $\det^2$ не равна тождественно нулю. Действительно, по лемме 1 существуют удобные системы степени $m$. Лемма 2 доказана.

Обозначим через $M(m, \mathbf{R})$ пространство полиномов с вещественными коэффициентами с многогранником Ньютона $\Delta(m)$, $M(m, \mathbf{R}) = M(m) \cap \mathbf{R}[x]$.

Лемма 3. *Для удобной системы уравнений степени $m$ с вещественными коэффициентами ограничение полиномов из пространства $M(m, \mathbf{R})$ на множество $A$ задает изоморфизм этого пространства с алгеброй $L_\tau$ на $A$, где $\tau\colon A \to A$ — инволюция комплексного сопряжения.*

Ограничения полиномов из $M(m, \mathbf{R})$, очевидно, лежат в алгебре $L_\tau$. Далее, для удобных систем ненулевому полиному из $M(m)$ соответствует ненулевая функция на $A$. Лемма 3 вытекает из включения $M(m, \mathbf{R}) \subset M(m)$ и из того, что $\dim M(m, \mathbf{R}) = \mu$ и $\dim L_\tau = \mu$.

## § 6. Неравенства для невырожденных полей

Закончим доказательство теоремы 1 (см. § 1). Пусть $V$, $P_0$ — невырожденная пара степени $m$, $m_0$. При малом изменении коэффициентов компонент $P_1, \ldots, P_n$ поля $V$ и полинома $P_0$ числа ind, $\text{ind}^+$ и $\text{ind}^-$ не будут меняться. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $P_1 = \ldots = P_n = 0$ — удобная система степени $m$ (см. лемму 2 § 5) и что поверхность $P_0 = 0$ в $\mathbf{C}^n$ не пересекается с множеством $A$ ее корней. Согласно лемме 3 из § 5 любая функция на $A$ из $L_\tau$, где $\tau\colon A \to A$ — инволюция комплексного сопряжения, является ограничением единственного полинома из $M(m, \mathbf{R})$. Рассмотрим квадратичную форму $K_\varphi(f)$ на $L_\tau$ при $\varphi = P_0/j$ (здесь $j = \det \partial P/\partial x$). Согласно утверждению из § 4 $\sigma K_\varphi = \mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$. Из формулы Эйлера — Якоби следует, что для всех полиномов $f$ степени, меньшей чем $\frac{1}{2}\left[\sum\limits_{i>0}(m_i - 1) - m_0\right]$, справедливо тождество $K_\varphi(f) = 0$. В нашем случае неравенство $|\sigma K_\varphi| \leqslant \mu - 2 \dim L_0$ принимает вид $|\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-| \leqslant \Pi(m, m_0)$. Действительно, $\mu$ равняется числу целых точек в многограннике $\Delta(m)$ и $\dim L_0$ равняется числу целых точек в этом многограннике, удовлетворяющих неравенству $\sum y_i < {}^1/_2\left[\sum\limits_{i>0}(m_i - 1) - m_0\right]$. Неравенство $|\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-| \leqslant \Pi(m, m_0)$ доказано. Неравенство $|\mathrm{ind}| \leqslant \Pi(m)$ есть частный случай этого неравенства при $m_0 = 0$. Сопоставляя неравенства $|\mathrm{ind}| = |\mathrm{ind}^+ + \mathrm{ind}^-| \leqslant \Pi(m)$ и $|\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-| \leqslant \Pi(m, m_0)$, получим $|\mathrm{ind}^+| \leqslant {}^1/_2\,[\Pi(m, m_0) + \Pi(m)] = O(m, m_0)$. Сравнения $\mathrm{ind} \equiv \mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^- \equiv \mu \bmod 2$ почти очевидны (см. следствие в § 4). Теорема 1 доказана (нужные примеры пар $V$, $P_0$ даны в § 3).

## § 7. Неравенства для вырожденных векторных полей

Закончим доказательство теоремы 2 (см. § 1).

Лемма 1. *Пусть для пары $V$, $P_0$ степени $m$, $m_0$ определена характеристика* $\mathrm{ind}^+$. *Тогда*: 1) *если область $P_0 > 0$ компактна, то* $|\mathrm{ind}^+| \leqslant O(m, m_0)$; 2) *если $2k > m_0$, то* $|\mathrm{ind}^+| \leqslant O(m, 2k)$.

Действительно, первое утверждение леммы легко сводится к теореме 1. Докажем второе. Область $U_\varepsilon$, определенная неравенством $P_0 - \varepsilon r^{2k} > 0$, где $r^2 = \Sigma x_i^2$ при малом $\varepsilon$, содержит те же особые точки поля $V$, что и область $P_0 > 0$. Область $U_\varepsilon$ уже компактна, поэтому и второе утверждение леммы сводится к теореме 1.

Следствие 1. 1. *Пусть, в предположении* 2) *леммы* 1, *$m_0$ нечетно и* $\sum\limits_{i>0} m_i \not\equiv n \bmod 2$. *Тогда* $|\mathrm{ind}^+| \leqslant O(m, m_0)$.

2. *Пусть, в предположении* 2) *леммы* 1, *$m_0$ четно и* $\sum\limits_{i\geqslant 0} m_i \not\equiv n \bmod 2$. *Тогда* $|\mathrm{ind}^+| \leqslant O(m, m_0 + 1)$.

Действительно, в случае 1 $O(m, m_0 + 1) = O(m, m_0)$ и в случае 2 $O(m, m_0 + 2) = O(m, m_0 + 1)$, и следствие 1 поэтому вытекает из леммы 1. Примеры из § 2 показывают, что неравенства следствия 1 точные. Нам осталось рассмотреть случай четного $m_0$ при $\Sigma m_i \equiv n \bmod 2$.

Рассмотрим полосу $U_0$ в $\mathbf{R}^n$, заключенную между двумя параллельными гиперплоскостями $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$.

Лемма 2. *Пусть для любой невырожденной пары степени $m$, $m_0$ справедливо неравенство $|F(V, P_0)| \leqslant Q(m, m_0)$ и характеристика $F$ антиинвариантна. Тогда для всякой полосы $U_0$ справедливо неравенство* $\left|\sum\limits_{a\in U_0} F(V, P_0)_a\right| \leqslant Q(m, m_0)$.

Доказательство. Плоскости $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ делят $\mathbf{R}^n$ на 3 области $U_0$, $U_1$ и $U_2$. Положим $c_i = \sum\limits_{a\in U_i} F(V, P_0)_a$ для $i=0, 1, 2$. Можно считать, что плоскости $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ не проходят через особые точки поля $V$ (в противном случае можно чуть уменьшить полосу $U_0$). Рассмотрим два проективных преобразования $g^1$ и $g^2$, для которых плоскости $\Gamma_\infty$ — это $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$. Мы получим две невырожденные пары $\tilde V^1$, $\tilde P_0^1$ и $\tilde V^2$, $\tilde P_0^2$ степени $m$, $m_0$, для которых модули характеристики $F$ равны $|c_0 + c_1 - c_2|$ и

$c_0 - c_1 + c_2$ |. По условию $|c_0 + c_1 - c_2| \leqslant Q(m, m_0)$, $|c_0 - c_1 + c_2| \leqslant Q(m, m_0)$, откуда $|c_0| \leqslant Q(m, m_0)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *В условиях леммы 2 для любой пары $V$, $P_0$ степени $m$, $m_0$, для которой определена характеристика $F$ и для которой поверхность $P_0 = 0$ не проходит через особые точки поля $V$, справедливо неравенство $|F(V, P_0)| \leqslant Q(m, m_0)$.*

Доказательство. Рассмотрим алгебраически зависящее от параметра $t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, семейство пар $V^t$, $P_0^t$ такое, что пары $V^t$, $P_0^t$ невырождены при $t < 1$ и при $t = 1$ пара $V^1$, $P_0^1$ совпадает с парой $V$, $P_0$. Особые точки $a^t$ поля $V^t$, при изменении $t$ будут двигаться по алгебраическим кривым, при $t = 1$ некоторые кривые $a^t$ будут стремиться к особым точкам поля $V$. Остальные кривые будут уходить на бесконечность. Для почти всякой линейной функции $l$ число $l(a^t)$ для таких кривых тоже будет стремиться к бесконечности. Пусть $l$ — такая линейная функция, и пусть число $p$ столь велико, что полоса $U_0$, определенная неравенством $|l(x)| < p$, содержит все особые точки поля $V$. Тогда при $t$, близких к единице, $\sum\limits_{a^t \in U_0} F(V^t, P_0^t) = F(V, P_0)$. Действительно, особые точки, уходящие в бесконечность, не дают вклада ни в левую, ни в правую часть равенства. Далее, в силу аддитивности индекса векторного поля $F(V, P_0)_a = \Sigma F(V^t, P_0)_{a^t}$, где суммирование берется по точкам $a^t$, стремящимся к $a$. Для завершения доказательства осталось применить лемму 2.

Следствие 2. *Пусть, в предположении леммы 1, $m_0$ четно и $\Sigma m_i \equiv n \bmod 2$. Тогда $|\mathrm{ind}^+| \leqslant O(m, m_0)$. В частности, для $m_0 = 0$ справедливо неравенство $|\mathrm{ind}| \leqslant \Pi(m)$.*

Действительно, в случае четного $m_0$ и $\Sigma m_i \equiv n \bmod 2$ характеристика $\mathrm{ind}^+$ антиинвариантна. От дополнительного предположения о том, что поверхность $P_0 = 0$ не содержит особых точек поля $V$, легко избавиться: достаточно рассмотреть меньшую область $P_0 - \varepsilon > 0$ при малом $\varepsilon$.

Следствия 1 и 2 в сочетании с примерами § 3 полностью доказывают теорему 2.

## § 8. Замечания

**8.1.** Каким может быть индекс полиномиального векторного поля в шаре $R^2 - \Sigma x_i^2 \geqslant 0$? Для половины степеней ответ на этот вопрос дает следующее

Утверждение. *Пусть $V = P_1, \ldots, P_n$ — полиномиальное поле степени $m = m_1, \ldots, m_n$, которое в шаре $R^2 - \Sigma x_i^2 \geqslant 0$ имеет только изолированные особые точки. Если $m_1 + \ldots + m_n \not\equiv n \bmod 2$, то суммарный индекс этих особых точек может равняться любому числу от $-O(m, 1)$ до $+O(m, 1)$.*

Действительно, шар $R^2 - \Sigma x_i^2 \geqslant 0$ определяется неравенством второй степени, поэтому по лемме 1 из § 7 $|\mathrm{ind}^+| \leqslant O(m, 2)$. При $\sum\limits_{i>0} m_i \not\equiv n \bmod 2$ $O(m, 1) = O(m, 2)$. Перейдем к примерам. Поле $V(m)$ (см. §3) при $\sum\limits_{i>0} m_i \not\equiv n \bmod 2$ содержит на плоскости $\Sigma x_i = \rho - 1/2$ ровно $O(m, 1)$ особых точек, причем индексы этих точек одного знака. Эти точки можно заключить в эллипсоид, не содержащий других особых точек. Уменьшая эллипсоид, можно оставить внутри него любое число особых точек с этой плоскости. Эллипсоид аффинным преобразованием переводится в шар. Утверждение полностью доказано.

Мне неизвестна точная оценка индекса полиномиального поля в шаре при $m_1 + \ldots + m_n \equiv n \bmod 2$.

**8.2.** Пусть $V$, $P_0$ — пара степени $m$, $m_0$ и $V = P_1, \ldots, P_n$. Рассмотрим поле $\bar{V} = \bar{P}_0, \ldots, \bar{P}_n$ от $n+1$ переменной $x_0, \ldots, x_n$, в котором $\bar{P}_i$ — однородные полиномы степени $m_i$ такие, что $\bar{P}_i(1, x_1, \ldots, x_n) = P_i(x_1, \ldots, x_n)$.

У т в е р ж д е н и е. *Поле $\bar{V}$ имеет изолированную особую точку в нуле пространства $\mathbf{R}^{n+1}$, если пара $V$, $P_0$ невырождена. Если дополнительно $m_0 + \ldots + m_n \not\equiv n \bmod 2$, то индекс этой точки равняется характеристике* $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ *пары $V$, $P_0$.*

Не будем задерживаться на доказательстве, оно не сложно. Отметим, что приведенное утверждение объясняет проективную инвариантность характеристики $\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-$ в случае $m_0 + \ldots + m_n \equiv n \bmod 2$. В этом случае оно также сводит теорему 1 к неравенству Петровского — Олейник для индекса особой точки однородного поля. Мне неизвестно, существует ли подобное сведе́ние при $m_0 + \ldots + m_n \not\equiv n \bmod 2$ и $m_0 > 0$.

**8.3.** В основополагающей работе Петровского — Олейник [1] оцениваются эйлеровы характеристики алгебраических множеств. Вот пример оценки такого рода.

У т в е р ж д е н и е. *Пусть $P: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ полином степени $k$, для которого поверхность $P = 0$ не особая, и области $P < c$ компактны при любом $c$, $c \in \mathbf{R}$. Тогда эйлерова характеристика $\chi$ области $P < 0$ удовлетворяет неравенству $|1 - 2\chi| \leqslant \Pi(m, k-1)$, где $m = \underbrace{k-1, \ldots, k-1}_{n\ \text{раз}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим пару, состоящую из поля $V = \operatorname{grad} P$ степени $m$ и полинома $-P$ степени $k$. Согласно теории Морса $\chi = \mathrm{ind}^+$ и $1 = \chi(\mathbf{R}^n) = \mathrm{ind}^+ + \mathrm{ind}^-$. Далее, в особых точках поля $V$ полиномы $-P$ и $Q = -P + (1/k)\sum x_i P'_{x_i}$ совпадают, и поэтому пары $V$, $-P$ и $V$, $Q$ имеют одинаковые характеристики $\mathrm{ind}^\pm$. По формуле Эйлера для однородных функций полином $Q$ имеет степень $k-1$. Воспользовавшись теперь теоремой 1, получим $|\mathrm{ind}^+ - \mathrm{ind}^-| \leqslant \Pi(m, k-1)$, учитывая равенства $\mathrm{ind}^+ + \mathrm{ind}^- = 1$ и $\chi = \mathrm{ind}^+$, получим нужное неравенство $|1 - 2\chi| \leqslant \Pi(m, k-1)$.

Отметим, что точность этого неравенства для эйлеровой характеристики известна только при $n = 2$ (см. [7]).

Всесоюзный научно-исследовательский институт системных исследований

Поступила в редакцию 14 июня 1978 г.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. П е т р о в с к и й И. Г., О л е й н и к О. А., О топологии действительных алгебраических поверхностей, Изв. АН СССР, серия матем. **13** (1949), 389—402.
2. А р н о л ь д В. И., Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского — Олейник и смешанные структуры Ходжа, Функц. анализ **12**, вып. 1 (1978), 1—14.
3. E i s e n b u d D., L e v i n e H., The topological degree of a finite $C^\infty$-map germ., Ann. Math. **106**, № 1 (1977), 19—38.
4. Х и м ш и а ш в и л и Г. Н., О локальной степени гладкого отображения, Сооб. АН Груз. ССР **85**, № 2 (1977), 309—311.
5. L. Kronecker's Werke, Über einige Interpolationsformeln fur ganze Funktion mehrer Variabeln, v. 1 (1895), 133—141.
6. Х о в а н с к и й А. Г., Многогранники Ньютона и формула Эйлера — Якоби, УМН **33**, вып. 6 (1978), 245—246.
7. P e t r o v s k y I. G., On the topology of real plane algebraic curves, Ann. Math. **39** (1938), 187—209.