О ПРЕДСТАВИМОСТИ ФУНКЦИЙ В КВАДРАТУРАХ

А. Г. Хованский

Функция $f(x)$ *представима в квадратурах* или *квадратурна*, если ее можно получить из постоянных функций $y(x) = c$ цепочкой следующих операций: интегрирований, дифференцирований, взятий суперпозиций, потенциирований и арифметических операций. Например, функция $f(x) = \int \operatorname{arctg} x\, dx$ квадратурна. Это видно из обращения равенств: $f'(x) = \operatorname{arctg} x$, $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x' = 1$.

Римановы поверхности квадратурных функций обладают общими геометрическими свойствами, поэтому можно иногда доказать неквадратурность функции, зная лишь расположение ее римановой поверхности над комплексной плоскостью. Здесь мы обсудим некоторые результаты, полученные в этой области, и их связь с теорией Галуа.

1. S-функции. Определим класс функций, внутри которого будут проводиться дальнейшие рассмотрения. Многозначная аналитическая функция одного комплексного переменного называется *S-функцией*, если множество ее особых точек на комплексной плоскости не более чем счетно. Можно показать, что S-функции замкнуты относительно интегрирования, дифференцирования, суперпозиций, мероморфных операций [1]), решения алгебраических и линейных дифференциальных уравнений. Поэтому, например, *квадратурные функции имеют не более счетного числа особых точек.*

Заметим, что множество особых точек S-функции может быть всюду плотным на комплексной плоскости, а ее группа монодромии — континуальной. Эта неприятность вызвана не излишней широтой класса S-функций, а существом дела. Так, функция $\ln(1 - x^{\alpha})$ при иррациональном α имеет плотное на единичной окружности множество точек логарифмического ветвления и континуальную группу монодромии.

2. Основная теорема. *Класс S-функций, обладающих разрешимой группой монодромии, замкнут относительно интегрирования, дифференцирования, мероморфных операций и суперпозиций.*

Доказательство заключается в учете изменений группы монодромии функции, которые происходят при интегрировании, дифференцировании и т. д. По идее оно близко к рассуждению, проведенному в статье [1]. Некоторые осложнения вызваны лишь возможной плотностью множества особых точек функции.

Основная теорема, например, показывает, что *группа монодромии квадратурной функции обязательно разрешима.* Более того, S-функцию с неразрешимой группой монодромии невозможно получить из однозначных S-функций при помощи интегрирований, дифференцирований, суперпозиций и мероморфных операций.

3. Неразрешимость алгебраических уравнений. Пусть дано алгебраическое уравнение $y^n + R_1 y^{n-1} + \ldots + R_n = 0$, где $R_i = R_i(x)$ — рациональные функции комплексного переменного. Теорема Галуа утверждает, что для разрешимости этого уравнения в радикалах необходима и достаточна разрешимость группы монодромии M функции $y(x)$. Из основной теоремы видно, что в случае неразрешимости группы M нельзя исправить положение ни при помощи введения новых однозначных функций, ни при помощи интегрирования и каких-либо мероморфных операций.

4. Неразрешимость линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим уравнение вида $y' = A(z)y$, где $A(z)$ — матрица мероморфных функций. Пусть группа монодромии этого уравнения неразрешима. Тогда из теоремы Пикара — Вессио [2] следует, что оно не решается в квадратурах. Легко видеть, что почти при всех начальных данных группа монодромии решения совпадает с группой монодромии уравнения. Основная

[1]) Мероморфная операция $\overline{F}$ заключается в сопоставлении набору из n функций $f_1, \ldots, f_n$ определенной почти при всех значениях аргумента мероморфной функции F от них $\overline{F}$: $(f_1, \ldots, f_n) \to F(f_1, \ldots, f_n)$. Арифметические операции и потенцирование являются примерами мероморфных операций.

теорема поэтому показывает, что общее решение уравнения с неразрешимой группой монодромии нельзя получить из однозначных функций интегрированиями, дифференцированиями, суперпозициями и мероморфными операциями. В частности, при решении таких уравнений не могут помочь специальные однозначные функции (например, функции Вейерштрасса [1]).

5. Разрешимость линейных дифференциальных уравнений. Вообще говоря, из разрешимости группы монодромии M уравнения не следует его разрешимость в квадратурах. Не решается, например, уравнение $y'' + xy = 0$ [2], все решения которого однозначны. Теория особых точек Фукса [3] и теорема Пикара — Вессио дают возможность доказать разрешимость уравнений с разрешимой группой монодромии в следующих двух случаях: 1) матрица $A(z)$ состоит из рациональных функций, имеющих лишь простые полюсы и обращающихся в нуль на бесконечности; 2) матрица $A(z)$ состоит из двоякопериодических функций, имеющих лишь простые полюсы (уравнение в этом случае решается в квадратурах с использованием функций Вейерштрасса).

6. Одно следствие. Остановимся на одном из следствий основной теоремы. Пусть функция $f(x)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость на многоугольник, ограниченный дугами окружностей. Основная теорема дает возможность явно классифицировать все многоугольники, для которых функция $f(x)$ представима в квадратурах.

7. Обобщения. Изменения групп монодромии S-функций при суперпозициях, интегрированиях и т. д. можно описать в общем случае, не предполагая разрешимости групп монодромии у исходных функций. Таким способом, например, можно получить необходимое условие представимости функций в *обобщенных квадратурах*, т. е. в квадратурах и алгебраических функциях. Отметим также, что основная теорема частично переносится на случай нескольких переменных (ср. [1]).

Автор глубоко благодарен В. И. Арнольду за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Хованский, О суперпозициях голоморфных функций с радикалами, УМН **26**: 2 (1971).

[2] И. Капланский, Введение в дифференциальную алгебру, М., ИЛ, 1959.

[3] Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Гос. научно-технич. изд-во Украины, 1939.

[4] E. R. Kolchin, Galois theory of differential fields, Amer. J. of Math. **75** (1953), 753—824.

Поступило в Правление общества 19 октября 1970 г.

---

[1]) Для функций Вейерштрасса это утверждение следует также из дифференциальной теории Галуа, развитой Колчиным в статье [4].